Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sauro Tulipani

Questioni di teoria dei modelli per linguaggi universali positivi. II: Metodi di "back and forth"

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.5, p. 328–335.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_5_328_0>

Logica matematica. — *Questioni di teoria dei modelli per linguaggi universali positivi.* II: *Metodi di «back and forth»* [*]. Nota di SAURO TULIPANI, presentata [**] dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper we continue the investigations of a previous one, giving a back and forth characterization of L–equivalence, where L is an universal positive (u.p.) language.

The key idea is to use partial abridgments in place of partial isomorphisms. This allows us to proceed in the same way as in the classical characterization of elementary equivalence.

These results and those [1] by Barwise and Schlipf on recursively saturated models are used to get a Robinson Consistency Theorem for u.p. and negation of u.p. sentences. It follows that, given u.p. or negation of u.p. sentences α, β, the interpolating sentence can be chosen u.p. or negation of u.p. Finally we discuss Craig's Theorem for u.p. languages.

1. NOTAZIONI E PRELIMINARI

Si conservano le notazioni usate in [6]. $\mathscr{L}$ indicherà un linguaggio del primo ordine associato a un tipo di similitudine τ privo di simboli funzionali e con un numero finito di costanti.

$\mathscr{L} = \{\tau, \forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, =\}$. Quando sarà necessario supporremo τ finito e senza costanti. L è il sottolinguaggio di $\mathscr{L}$, detto universale positivo (o, abbreviando, u.p.), definito da $L = \{\tau, \forall, \wedge, \vee, =\}$. F_n^k è l'insieme delle formule di L in forma premessa contenente le variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$ di cui $x_1, \cdots, x_k$ sono libere. Detto $F^k = \bigcup_{n \in \omega} F_n^k$ si ha che ogni formula con k variabili libere ne ha una equivalente in F^k e ogni enunciato ne ha uno equivalente in F^0. $\mathbf{F}_n^k$ è il sottoinsieme delle formule di $\mathscr{L}$ della forma $\neg \varphi$ con $\varphi \in F_n^k$; $\mathbf{F}^k = \bigcup_{n \in \omega} \mathbf{F}_n^k$. Una sequenza $(a_1, \cdots, a_n)$ spesso sarà indicata con $\bar{a}$ e la sua lunghezza $\lg(\bar{a}) = n$. Lo stesso $\bar{x}$ indicherà una sequenza di variabili. Se $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^k$ diciamo $\mathscr{A} \underset{F_n^k}{\sqsubseteq} \mathscr{B}$ sopra $\bar{a}, \bar{b}$ se, per ogni $\varphi(\bar{x}) \in F_n^k$, $\mathscr{A} \models \varphi(\bar{a})$ implica $\mathscr{B} \models \varphi(\bar{b})$.

Analogamente $\mathscr{A} \underset{F^k}{\sqsubseteq} \mathscr{B}$. Osserviamo che $\mathscr{A} \underset{F_n^k}{\sqsubseteq} \mathscr{B}$ è equivalente a $\mathscr{B} \underset{\mathbf{F}_n^k}{\sqsubseteq} \mathscr{A}$.

Si scriverà $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$ per $\mathscr{A} \underset{F^0}{\sqsubseteq} \mathscr{B}$ sopra le sequenze vuote e $\mathscr{A} \mathrel{\sqsubseteq\!\!\!\sqsupseteq} \mathscr{B}$ per $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$ e $\mathscr{B} \sqsubseteq \mathscr{A}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 15 novembre 1975.

(1) Ringrazio il prof. H.J. Keisler per aver comunicato i recenti risultati sui modelli ricorsivamente saturati di K.J. Barwise e J. Schlipf al corso C.I.M.E. di Bressanone (Giugno 1975).

Se $T(\mathscr{A})$ è l'insieme degli enunciati u.p. veri in $\mathscr{A}$ è anche $\mathscr{A} \,\boxed{}\, \mathscr{B}$ sse $T(\mathscr{A}) = T(\mathscr{B})$, cfr. [6].

Infine se $\{\mathscr{A}_i, i \in I\}$ è una famiglia di strutture di tipo solo relazionale la somma diretta $\mathscr{A} = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{A}_i$ è la struttura con insieme base $\bigcup_{i \in I} A_i$ supponendo gli A_i a due a due disgiunti e con le interpretazioni dei simboli di relazione definite da $R^{\mathscr{A}} = \bigcup_{i \in I} R^{\mathscr{A}_i}$. Per la definizione di riduzione si veda [6], oppure « abridgment » in [4].

2. Caratterizzazione della L–equivalenza

In questo paragrafo supporremo che il tipo di similitudine sia senza simboli funzionali né di costanti.

DEFINIZIONE 2.1. Siano $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ strutture dello stesso tipo di similitudine, $\lambda \in \omega + 1$, $\bar{a}^0 \in A^k$, $\bar{b}^0 \in B^k$, si dirà λ–riduzione parziale di $\mathscr{A}$ su $\mathscr{B}$ sopra $\bar{a}^0, \bar{b}^0$ una relazione unaria I su $\bigcup_{n<\lambda} (A^n \times B^n)$, (scriveremo $\bar{a}\, I\, \bar{b}$ se $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$ e $(\bar{a}, \bar{b})$ è in tale relazione) tale che:

1) $\bar{a}^0\, I\, \bar{b}^0$:

2) Se $\bar{a}\, I\, \bar{b}$ e $\varphi(x)$ è una formula atomica allora $\mathscr{A} \models \varphi(\bar{a})$ implica $\mathscr{B} \models \varphi(\bar{b})$.

3) Se $\bar{a}\, I\, \bar{b}$, $\lg(\bar{a}) = \lg(\bar{b}) < n < \lambda$ allora per ogni $d \in B$ esiste $c \in A$ tale che $\bar{a}c\, I\, \bar{b}d$.

DEFINIZIONE 2.2. Si dice che $\mathscr{B}$ è λ–riduzione parziale di $\mathscr{A}$ se esiste una λ–riduzione parziale I da $\mathscr{A}$ su $\mathscr{B}$ sopra le sequenze $\varnothing, \varnothing$. In tal caso si scrive $\mathscr{A} \xrightarrow[\lambda\mathscr{P}]{\circ} \mathscr{B}$.

LEMMA 2.1. *Se* $\mathscr{A} \xrightarrow[(n+1)\mathscr{P}]{\circ} \mathscr{B}$ *sopra* $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^k$, *allora* $\mathscr{A} \,\boxed{}_{F_n^k}\, \mathscr{B}$ *sopra* $\bar{a}, \bar{b}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su $n - k$. Se $n - k = 0$ allora $\alpha(x_1, \cdots, n_n) \in F_n^n$ è senza quantificatori e quindi $\mathscr{A} \models \alpha(\bar{a})$ implica $\mathscr{B} \models \alpha(\bar{b})$ segue facilmente dalla 2) della Definizione 2.1.

Se $n - k > 0$ si consideri $\mathscr{A} \models \forall x_s\, \alpha(\bar{a})$ $k < s \leq n$. Cambiando nome alle variabili si può supporre $s = k + 1$. Supponiamo per assurdo $\mathscr{B} \models\!\!\!/\; \forall x_{k+1}\, \alpha(\bar{b})$; allora esiste un $d \in B$ con $\mathscr{B} \models\!\!\!/\; \alpha(\bar{b}, d)$ e per la 1) e 3) della Definizione 2.1. esiste un $c \in A$ tale che $\bar{a}c\, I\, \bar{b}d$. $\alpha(\bar{x}, x_{k+1}) \in F_n^{k+1}$ e allora per ipotesi di induzione se fosse $\mathscr{A} \models \alpha(\bar{a}, c)$ sarebbe $\mathscr{B} \models \alpha(\bar{b}, d)$ che non è. Quindi $\mathscr{A} \models\!\!\!/\; \alpha(\bar{a}, c)$ che è assurdo perché $\mathscr{A} \models \forall x_{k+1}\, \alpha(\bar{a})$.

LEMMA 2.2. *Se* $\mathscr{A} \sqsubseteq_{F_n^k} \mathscr{B}$, $n > k$, *sopra* $\bar{a}^0 \in A^k$, $\bar{b}^0 \in B^k$ *e il tipo di similitudine è finito allora* $\mathscr{A} \xrightarrow[(n+1)\mathscr{P}]{\circ} \mathscr{B}$ *sopra* $\bar{a}^0$, $\bar{b}^0$. (*Se* $k = 0$ *conveniamo che le sequenze* $\bar{a}^0$, $\bar{b}^0$ *siano le sequenze vuote*).

Dimostrazione. Sia $\operatorname{typ}(\bar{a}^0, a) = \{\varphi(\bar{x}^0, x_{k+1}) : \varphi \in \mathbf{F}_n^{k+1} \text{ e } \mathscr{A} \models \varphi(\bar{a}^0, a)\}$.

Osserviamo che essendo il tipo di similitudine finito ogni F_n^k è finito e quindi lo è anche ogni $\operatorname{typ}(\bar{a}, a)$.

Supposto di aver definito I^s $0 \leq s < n - k$ tale che $\bar{a}\, I^s\, \bar{b}$ implica $\mathscr{A} \sqsubseteq_{F_n^s} \mathscr{B}$ sopra $\bar{a}$, $\bar{b}$, definiamo I^{s+1}.

Sia $d \in B$. Se $\operatorname{typ}(\bar{b}, d)$ è vuoto si ponga $\bar{a}c\, I^{s+1}\, \bar{b}d$ per ogni $c \in A$; se $\operatorname{typ}(\bar{b}, d) \neq \varnothing$ si consideri $\varphi \equiv \bigwedge_{\neg\Psi \in \operatorname{typ}(\bar{b}, d)} \Psi$ e si ponga $\bar{a}c\, I^{s+1}\, \bar{b}d$ per ogni c tale che $\mathscr{A} \models \neg\varphi(\bar{a}, c)$. Un tale c esiste sempre; infatti sia $d \in B$ e $\mathscr{B} \models \neg\varphi(\bar{b}, d)$ con $\varphi \in F_n^{s+1}$ allora $\mathscr{A} \models \exists x \neg\varphi(\bar{a})$, altrimenti $\mathscr{A} \models \forall x\, \varphi(\bar{a})$ e per ipotesi induttiva sarebbe $\mathscr{B} \models \forall x\, \varphi(\bar{b})$ contro il fatto che $\mathscr{B} \models \neg\varphi(\bar{b}, d)$.

Resta da vedere ora che $\mathscr{A} \sqsubseteq_{F_n^{s+1}} \mathscr{B}$ sopra $\bar{a}c$, $\bar{b}d$.

Se $\psi \in F_n^{s+1}$ e $\mathscr{A} \models \psi(\bar{a}, c)$ allora $\mathscr{B} \models \psi(\bar{b}, d)$ perché altrimenti $\neg\psi(\bar{x}, x_{s+1}) \in \operatorname{typ}(\bar{b}, d)$ e allora $\models \neg\varphi \to \neg\psi$ per costruzione e quindi $\mathscr{A} \models \neg\psi(\bar{a}, c)$ che è assurdo. Detto ora $I = I^0 \cup I^1 \cup \cdots I^{n-k}$ si ha che $I : \mathscr{A} \xrightarrow[(n+1)\mathscr{P}]{\circ} \mathscr{B}$ per costruzione.

TEOREMA 2.1. $\mathscr{A} \boxed{\equiv} \mathscr{B}$ *se e solo se per ogni* n *esiste una coppia* I, J *di* n*–riduzioni parziali* $I : \mathscr{A} \xrightarrow[n\mathscr{P}]{\circ} \mathscr{B}$ $J : \mathscr{B} \xrightarrow[n\mathscr{P}]{\circ} \mathscr{A}$. (*In tal caso si scrive anche* $\mathscr{A} \xleftrightarrow[n\mathscr{P}]{\circ} \mathscr{B}$).

Dimostrazione. Segue immediatamente dai Lemmi 2.1. e 2.2.

COROLLARIO 2.1. *Se* $\mathscr{A}_i \boxed{\equiv} \mathscr{B}_i$, $i \in I$, *allora* $\bigoplus_{i \in I} \mathscr{A}_i \boxed{\equiv} \bigoplus_{i \in I} \mathscr{B}_i$.

3. CARATTERIZZAZIONE DELLA $L_{\infty\omega}$–EQUIVALENZA

In questo paragrafo supporremo che il tipo τ non contenga simboli funzionali e contenga solo un numero finito di simboli di costanti. $L_{\infty\omega}$ è ottenuto da L «permettendo» congiunzioni e disgiunzioni di insiemi arbitrari di formule.

DEFINIZIONE 3.1. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ si dicono pseudoisomorfi se esiste una coppia di riduzioni f, g $f : \mathscr{A} \xrightarrow{\circ} \mathscr{B}$ $g : \mathscr{B} \xrightarrow{\circ} \mathscr{A}$. Si scrive in tal caso anche $\mathscr{A} \xleftrightarrow{\circ} \mathscr{B}$.

Osservazione:

1) La relazione $\mathscr{A} \leftarrow\!\circ\!\rightarrow \mathscr{B}$ è una relazione di equivalenza.

2) $\mathscr{A} \leftarrow\!\circ\!\rightarrow \mathscr{B}$ e $\mathscr{A}$ finito implica $\mathscr{A} \simeq \mathscr{B}$.

3) $\mathscr{A} \leftarrow\!\circ\!\rightarrow \mathscr{B}$ non implica in generale $\mathscr{A} \simeq \mathscr{B}$ come mostra il seguente esempio: $\mathscr{A} = (\mathrm{N}, \mathrm{R})$, $\mathscr{B} = (\mathrm{N}, \mathrm{S})$, N insieme dei naturali $\mathrm{R} = \{0, 1\}$ $\mathrm{S} = \{0, 1, 2\}$ $\mathscr{A} \underset{pr}{\overset{id}{\rightleftarrows}} \mathscr{B}$ (*id* è la funzione identità e *pr* è il predecessore definito da $pr\,0 = 0$ $pr\,n = n - 1$ se $n > 0$) e non è $\mathscr{A}$ isomorfo a $\mathscr{B}$.

TEOREMA 3.1. *Se* $\mathscr{A} \underset{\omega\mathscr{P}}{\longrightarrow\!\circ\!\rightarrow} \mathscr{B}$ *sopra* $a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_k$, *che sono le interpretazioni delle costanti rispettivamente in* $\mathscr{A}$ *e in* $\mathscr{B}$, B *contabile, allora esiste una riduzione* $f : \mathscr{A} \longrightarrow\!\circ\!\rightarrow \mathscr{B}$.

Dimostrazione. Poiché B è contabile allora $\mathrm{B} = \{b'_n : n < \lambda, \lambda \in \omega + 1\}$.

Costruiamo due sequenze $\{a_n\}\{b_n\}$ $n < \lambda$ tali che $\{b_n : n < \lambda\} = \mathrm{B}$ $a_n \in \mathrm{A}$, $a_n \overset{f}{\mapsto} b_n$ sia una riduzione di $\mathscr{A}$ su $\mathscr{B}$.

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$, $n \leq k$ le interpretazioni delle costanti.

Supponiamo di avere $\{a_n\}\{b_n\}$, $k \leq n \leq h$, con $a_1\, a_2, \cdots, a_h \mathrm{I}\, b_1, \cdots, b_h$; sia $b_{h+1} \in \{b'_n\}$ il primo elemento di tale sequenza non ancora scelto e si scelga a_{h+1} in A con la condizione 3) della Definizione 2.1. tale che $a_1, \cdots, a_h\, a_{h+1} \mathrm{I}\, b_1, \cdots, b_h\, b_{h+1}$. Il procedimento continua induttivamente fino ad esaurire tutti gli elementi di $\{b'_n\}$. Per la condizione 1) e 2) sempre della Definizione 2.1. $f : a_n \mapsto b_n$ è una riduzione.

TEOREMA 3.2. $\mathscr{A} \underset{\mathrm{L}_{\infty\omega}}{\equiv} \mathscr{B}$ *se e solo se* $\mathscr{A} \underset{\omega\mathscr{P}}{\longleftrightarrow} \mathscr{B}$.

La dimostrazione, come quella del Teorema 2.1, si basa su due lemmi:

LEMMA 3.1. $\mathscr{A} \underset{\omega\mathscr{P}}{\longrightarrow\!\circ\!\rightarrow} \mathscr{B}$ *sopra* $\bar{a} \in \mathrm{A}^k$, $\bar{b} \in \mathrm{B}^k$, *allora* $\mathscr{A} \underset{\mathrm{F}^k}{\models} \mathscr{B}$ *sopra* $\bar{a}, \bar{b}$ (*avendo indicato con* F^k *le formule di* $\mathrm{L}_{\infty\omega}$ *con libere le prime k variabili*).

Dimostrazione. Se $\mathscr{A} \models \alpha(\bar{a})$ con $\alpha \in \mathrm{F}^k$ una induzione sulla costruzione di α mostra $\mathscr{B} \models \alpha(\bar{b})$.

LEMMA 3.2. *Se* $\mathscr{A} \underset{\mathrm{F}^k}{\models} \mathscr{B}$ *sopra* $\bar{a} \in \mathrm{A}^k$, $\bar{b} \in \mathrm{B}^k$ *allora esiste una* ω*–riduzione parziale di* $\mathscr{A}$ *su* $\mathscr{B}$ *sopra* $\bar{a}, \bar{b}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 2.2. essendo permesse in $\mathrm{L}_{\infty\omega}$ disgiunzioni infinite.

COROLLARIO 3.1. *Se* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ *sono contabili* $\mathscr{A} \underset{\mathrm{L}_{\infty\omega}}{\equiv} \mathscr{B}$ *se e solo se* $\mathscr{A} \leftarrow\!\circ\!\rightarrow \mathscr{B}$.

Dimostrazione. Segue dai Teoremi 3.1. e 3.2.

COROLLARIO 3.2. Se $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$, B *finito allora esiste una riduzione* $f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$.

Dimostrazione. Sia $|B| = k$ allora esiste una n–riduzione parziale I di $\mathscr{A}$ su $\mathscr{B}$ per $n > k$ tale che $a_1, \cdots, a_r \, \mathrm{I} \, b_1, \cdots, b_r$ se a_i, b_i interpretano le costanti ripettivamente in $\mathscr{A}$ e in $\mathscr{B}$.

Essendo $n > k$ I è una ω–riduzione parziale e allora dal Teorema 3.1. segue l'asserto.

COROLLARIO 3.3. *Se* $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$, B *finito, allora* $\mathscr{A} \simeq \mathscr{B}$.

4. ALCUNE APPLICAZIONI DEL « BACK AND FORTH »

All'inizio di questo paragrafo è utile richiamare alcuni concetti e alcuni risultati di Barwise e Schlipf sui modelli ricorsivamente saturati.

Consideriamo in tutto il paragrafo linguaggi senza simboli di funzioni e di costanti e con un numero finito di simboli relazionali.

Una struttura $\mathscr{A}$ si dice ricorsivamente saturata se, dato un qualunque sottoinsieme finito $A_0 \subseteq A$ e un qualunque insieme *ricorsivo* di formule Γ con una variabile libera del linguaggio $\mathscr{L}_{A_0}$, che ha costanti per elementi di A_0, allora vale: *se* Γ *è finitamente soddisfacibile in* $(\mathscr{A}, a)_{a \in A_0}$ *allora è anche ivi soddisfacibile*.

Vale il teorema di esistenza: *ogni teoria consistente ha un modello ricorsivamente saturato contabile*.

Se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono strutture per un linguaggio $\mathscr{L}$ si consideri il linguaggio $\mathscr{L}(U, V)$ ottenuto da $\mathscr{L}$ aggiungendo due simboli relazionali unari e sia $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ la struttura per $\mathscr{L}(U, V)$ così definita $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = (\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}, A, B)$. $\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$ è la somma diretta di $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ e A, B (supposti disgiunti) interpretano rispettivamente U e V.

È facile dedurre dal teorema di esistenza il risultato per ogni $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ esistono $\mathscr{A}', \mathscr{B}'$ contabili tali che $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \equiv (\mathscr{A}', \mathscr{B}')$ e $(\mathscr{A}', \mathscr{B}')$ è ricorsivamente saturato.

Applicheremo ora tali risultati per dedurre un teorema di consistenza di Robinson per teorie contenenti enunciati u.p. e negazioni di enunciati u.p.

TEOREMA 4.1. *Se* $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *è ricorsivamente saturata e*

$$\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B} \qquad \textit{allora} \quad \mathscr{A} \underset{\omega\mathscr{P}}{\longrightarrow} \mathscr{B}.$$

Dimostrazione. Costruiamo I: $\mathscr{A} \underset{\omega\mathscr{P}}{\longrightarrow} \mathscr{B}$. Sia F^k al solito l'insieme delle formule di L in forma premessa con variabili libere $x_1, \cdots, x_k$. Poniamo $\mathscr{A} \sqsubseteq_{F^k} \mathscr{B}$ sopra $\bar{a}, \bar{b}$ se per ogni $\varphi \in F^k$ $\mathscr{A} \models \varphi(\bar{a})$ implica $\mathscr{B} \models \varphi(\bar{b})$. Per ogni formula $\varphi(\bar{x})$ del linguaggio $\mathscr{L}$, si può considerare la sua relativizzata φ^U ad U, vedi [2], pp. 242, e vale:

$$\mathscr{A} \models \varphi(\bar{a}) \qquad \text{se e solo se} \quad (\mathscr{A}, \mathscr{B}) \models \varphi^U(\bar{a}).$$

Sia $\varnothing\ \mathrm{I}^0\ \varnothing$; $\mathscr{A} \underset{\mathrm{F}^0}{\sqsubseteq} \mathscr{B}$ sopra $\varnothing$, $\varnothing$ per ipotesi.

Supponiamo di avere I^k, $k \geq 0$ tale che se $\bar{a}\ \mathrm{I}^k\ \bar{b}$ allora $\mathscr{A} \underset{\mathrm{F}^k}{\sqsubseteq} \mathscr{B}$ sopra $\bar{a}$, $\bar{b}$; definiamo I^{k+1}.

Sia $d \in \mathrm{B}$ e si consideri l'insieme di formule nel linguaggio $\mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ con costanti $\bar{a}$, $\bar{b}$, d:

$$\Gamma = \{(\mathrm{U}(x) \wedge \varphi^{\mathrm{U}}(\bar{a}, x)) \rightarrow \varphi^{\mathrm{V}}(\bar{b}, d) : \varphi(\bar{x}, x) \in \mathrm{F}^{k+1}\}.$$

Γ è ricorsivo. Vediamo che è finitamente soddisfacibile in $((\mathscr{A}, \mathscr{B}), \bar{a}, \bar{b}, d)$. Sia Γ_0 un sottoinsieme finito $\{(\mathrm{U}(x) \wedge \varphi_1^{\mathrm{U}}) \rightarrow \varphi_1^{\mathrm{V}}, \cdots, (\mathrm{U}(x) \wedge \varphi_n^{\mathrm{U}}) \rightarrow \varphi_n^{\mathrm{V}}\}$ e siano $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ tra $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ tali che: $\mathscr{B} \models \neg \varphi_i(\bar{b}, d)$ $i = 1, \cdots, r$ allora $\mathscr{B} = \exists x (\neg \varphi_1(\bar{b}) \wedge \cdots \wedge \neg \varphi_r(\bar{b}))$, ma per ipotesi induttiva $\mathscr{A} \underset{\mathrm{F}^k}{\sqsubseteq} \mathscr{B}$ sopra $\bar{a}$, $\bar{b}$ e quindi

$$\mathscr{A} \models \exists x (\neg \varphi_1(\bar{a}) \wedge \cdots \wedge \neg \varphi_r(\bar{a}))$$

altrimenti

$$\mathscr{A} \models \forall x (\varphi_1(\bar{a}) \vee \cdots \vee \varphi_r(\bar{a}))$$

da cui

$$\mathscr{B} \models \forall x (\varphi_1(\bar{b}) \vee \cdots \vee \varphi_r(\bar{b})).$$

Si scelga $c \in \mathrm{A}$ tale che $\mathscr{A} \models \neg \varphi_i(a, c)$ $i = 1, \cdots, r$; si vede subito che Γ_0 è soddisfatto da c in $((\mathscr{A}, \mathscr{B}), \bar{a}, \bar{b}, d)$.

Per l'ipotesi $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ ricorsivamente saturato segue che Γ è soddisfatto in $((\mathscr{A}, \mathscr{B}), \bar{a}, \bar{b}, d)$ da qualche $c \in \mathrm{A}$.

Si ponga $\bar{a}c\ \mathrm{I}^{k+1}\ \bar{b}d$ per ogni tale c. Detto $\mathrm{I} = \bigcup_{r \in \omega} \mathrm{I}^r$ si ha che I è una ω-riduzione parziale di $\mathscr{A}$ su $\mathscr{B}$.

Sia $\mathscr{A}$ una struttura per un linguaggio $\mathscr{L}$, si indichi con $\mathrm{H}(\mathscr{A})$ l'insieme degli enunciati da $\mathrm{F}^0 \cup \mathbf{F}^0$ veri in $\mathscr{A}$. Vale allora un teorema di consistenza di Robinson sotto la seguente forma:

TEOREMA 4.2. *Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ strutture di tipi relazionali finiti, τ_1, τ_2, rispettivamente; sia $\tau_0 = \tau_1 \cap \tau_2$ e $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A} \restriction \tau_0$ $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B} \restriction \tau_0$ con $\mathscr{A}_0 \sqsubseteq\!\sqsupseteq \mathscr{B}_0$, allora* $\mathrm{H}(\mathscr{A}) \cup \mathrm{H}(\mathscr{B})$ è *consistente nel linguaggio $\mathscr{L}$ associato a $\tau_1 \cup \tau_2$.*

Dimostrazione. Si consideri $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ nel linguaggio $\mathscr{L}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ e siano $\mathscr{A}', \mathscr{B}'$ contabili tali che $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \equiv (\mathscr{A}', \mathscr{B}')$ e $(\mathscr{A}', \mathscr{B}')$ ricorsivamente saturato. Sia $\mathscr{A}_0' = \mathscr{A}' \restriction \tau_0$, $\mathscr{B}_0' = \mathscr{B}' \restriction \tau_0$ allora dall'ipotesi discende $\mathscr{A}_0' \sqsubseteq\!\sqsupseteq \mathscr{B}_0'$; dunque per il Teorema 4.1. e 3.1. esiste una coppia di riduzioni

$$\mathrm{I}: \ \mathscr{A}_0' \multimap \mathscr{B}_0', \qquad \mathrm{J}: \ \mathscr{B}_0' \multimap \mathscr{A}_0'.$$

Se $\mathrm{R} \in \tau_1 - \tau_2$ si definisca R' su $\mathscr{B}'$ con $(b_1, \cdots, b_r) \in \mathrm{R}'$ se e solo se esistono $a_1, \cdots, a_r \in \mathrm{A}$ tali che $\mathrm{I}a_i = b_i$ $i = 1, \cdots, r$ e $(a_1, \cdots, a_r) \in \mathrm{R}^{\mathscr{A}'}$. Operando in tal modo si può trasformare $\mathscr{A}'$ e $\mathscr{B}'$ in due strutture $\mathscr{A}''$ e $\mathscr{B}''$ pseudo-isomorfe.

Da ciò segue

$$\mathscr{A}'' \models \mathrm{H}(\mathscr{A}) \cup \mathrm{H}(\mathscr{B}).$$

COROLLARIO 4.1. *Siano* $\alpha, \beta \in \mathrm{F}^0 \cup \mathbf{F}^0$ *(enunciati u.p. o loro negazioni), contenenti solo simboli relazionali, allora esiste un enunciato interpolante* $\theta \in \mathrm{F}^0 \cup \mathbf{F}^0$ *con simboli relazionali comuni ed* α *e* β.

Dimostrazione. Sia M l'insieme degli enunciati di $\mathrm{F}^0 \cup \mathbf{F}^0$ nel linguaggio $\mathscr{L}_0$ associato al tipo $\tau_0 = \tau_1 \cap \tau_2$, τ_1 tipo che contiene i simboli di α e τ_2 quello che contiene i simboli di β. Sia poi $\mathrm{S} = \{\theta : \theta \in \mathrm{M}, \models \alpha \rightarrow \theta\}$. Si può supporre α e quindi S consistente perché altrimenti si prenda come $\theta \neg \forall x\,(x = x)$. Se per assurdo non esistesse $\theta \in \mathrm{S}$ tale che $\models \theta \rightarrow \beta$ allora $\mathrm{S} \cup \{\neg \beta\}$ sarebbe consistente. Sia $\mathscr{B}$ struttura di tipo τ_2, $\mathscr{B} \models \mathrm{S} \cup \{\neg \beta\}$. Sia $\mathrm{K} = \mathrm{H}(\mathscr{B} \upharpoonright \tau_0)$; $\mathrm{K} \cup \{\alpha\}$ è consistente perché altrimenti esiste $\theta \in \mathrm{K}$ tale che $\models \alpha \rightarrow \neg \theta$ e cioè $\neg \theta \in \mathrm{S}$ per cui $\mathscr{B} \models \neg \theta$ che non è. Sia allora $\mathscr{A} \models \mathrm{K} \cup \{\alpha\}$, $\mathscr{A}$ struttura di tipo τ_1. $\mathscr{A} \upharpoonright \tau_0 \sqsubseteq \mathscr{B} \upharpoonright \tau_0$ quindi per il Teorema 4.2. $\mathrm{H}(\mathscr{A}) \cup \mathrm{H}(\mathscr{B})$ è consistente in $\mathscr{L}$, linguaggio associato a $\tau_1 \cup \tau_2$, ma ciò è assurdo perché $\mathscr{A} \models \alpha$, $\mathscr{B} \models \neg \beta$, $\models \alpha \rightarrow \beta$.

Il corollario precedente ha una forma più restrittiva per linguaggi u.p.

Se L è un linguaggio u.p. una classe di strutture sarà detta L–elementare se è la classe dei modelli di un enunciato di L. Una classe sarà detta L–proiettiva se è la classe dei ridotti ad L di una classe L_1–elementare. Due classi K_1, K_2 si dice che hanno intersezione quasi vuota e si scrive $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2 \simeq \varnothing$ se $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2$ contiene solo strutture degeneri, cioè con un solo elemento.

TEOREMA 4.3. *Se* L_1, L_2 *sono due linguaggi u.p., associati a tipi di similitudine* τ_1, τ_2 *tali che i loro simboli funzionali e di costante stiano tutti in* $\tau_0 = \tau_1 \cap \tau_2$, L_0 *linguaggio per* τ_0, K_1, K_2 *sono classi* L_0*–proiettive, ridotte di classi* L_1*–elementari ed* L_2 *elementari rispettivamente e con* $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{K}_2 \simeq \varnothing$, *allora esiste una classe* L_0*–elementare* N *tale che* $\mathrm{N} \supseteq \mathrm{K}_1$ *e* $\mathrm{N} \cap \mathrm{K}_2 \simeq \varnothing$.

Dimostrazione. Sia

$$\mathrm{K}_1 = \{\mathscr{A}' : \mathscr{A}' = \mathscr{A} \upharpoonright \tau_0, \mathscr{A} \models \alpha\} \qquad \mathrm{K}_2 = \{\mathscr{B}' : \mathscr{B}' = \mathscr{B} \upharpoonright \tau_0, \mathscr{B} \models \beta\}.$$

È facile vedere che con le ipotesi fatte K_1, K_2 sono chiuse rispetto agli ultraprodotti e alle riduzioni.

Allora per i teoremi caratterizzanti gli enunciati universali positivi cfr. [4] si ha che $\mathrm{K}_1 = \mathrm{M}d(\mathrm{S}_1)$, $\mathrm{K}_2 = \mathrm{M}d(\mathrm{S}_2)$ con S_1, S_2 enunciati positivi di $\mathrm{L}_0 \cdot \mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2$ non ha modelli non degeneri per ipotesi quindi esiste $\theta_1 \in \mathrm{S}_1$ e $\theta_2 \in \mathrm{S}_2$ tale che $\theta_1 \wedge \theta_2$ non ha modelli non degeneri; allora $\mathrm{N} = \mathrm{M}d(\theta_1)$ soddisfa la tesi del teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. J. BARWISE e J. SCHLIPF (1975) – *Recursively saturated and resplendent models*. To appear.

[2] C. C. CHANG e H. J. KEISLER (1973) – *Model Theory*. Amsterdam.

[3] R. FRAISSÉ (1954) – *Sur quelques classifications des systémes de relations*, « Publ. Sci. Univ. Alger. », Sér A 1, 35–182.

[4] H. J. KEISLER (1960) – *Theory of models with generalized atomic formulas*, « J. Symb. Logic », *25*, 1–26.

[5] J. A. MAKOWSKY e S. TULIPANI (1975) – *Some model theory for monotone quantifiers*. In preparazione.

[6] A. MARCJA e S. TULIPANI (1974) – *Questioni di teoria dei modelli per linguaggi universali positivi*, I, « Acc. Lincei Rend. della Cl. Sc. fis. mat. e nat. », Ser. VIII, *51* (6).

[7] A. ROBINSON (1956) – *A result on consistency and its application to the theory of definition*, « Indag. Math. », *18*, 47–58.

[8] A. ROBINSON (1974) – *Introduzione alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell'algebra*. Boringhieri.