Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Guido Gotusso

Azione di richiamo ritardata sull'oscillatore armonico smorzato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **59** (1975), n.5, p. 416–420.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_5_416_0>

Meccanica. — *Azione di richiamo ritardata sull'oscillatore armonico smorzato.* Nota di GUIDO GOTUSSO, presentata [*] dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — The problem of the retarted restoring force on harmonic oscillator in presence of viscous resistence is studied with the aid of a symbolic method already employed by the author.

In un precedente lavoro [1] si fece ricorso a una notazione simbolica che venne utilizzata per studiare il comportamento dell'oscillatore libero con azione di richiamo ritardata. Vogliamo ora ricorrere allo stesso espediente per esaminare il caso in cui sia presente anche una resistenza di tipo viscoso (ohmico). Sebbene le cose si presentino ora più complicate, si vedrà che è possibile giungere a un risultato utilizzabile in molti casi.

Siamo ora alle prese con una equazione di movimento così fatta:

$$m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + kx(t - \tau) = 0 \tag{1}$$

dove m è la massa, k la rigidità del richiamo, h il coefficiente di resistenza, τ il ritardo.

Ponendo, come di consueto:

$$\frac{k}{m} = 2\,\varepsilon \quad ; \quad \frac{h}{m} = \omega^2 \tag{2}$$

e usando la ricordata notazione simbolica, l'equazione di moto assumerà l'aspetto:

$$\{D^2 + 2\,\varepsilon D + \omega^2 e^{-\tau D}\}\, x = 0 \tag{3}$$

alla quale è correlata la seguente equazione caratteristica:

$$z^2 + 2\,\varepsilon z + \omega^2 e^{-\tau z} = 0\,. \tag{4}$$

Incominciamo col vedere che cosa comporta la risoluzione della (4) che, nel lavoro rammentato (dove $\varepsilon = 0$) si era ottenuta in forma grafica atta a una esauriente discussione.

(*) Nella seduta del 15 novembre 1975.

(1) Sulla stabilità di movimenti con azione di richiamo ritardata. Atti Accademia Scienze di Torino, CVIII (1973–74), 143–153.

Poniamo:

$$z = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta} \tag{5}$$

$$\xi = \rho \cos \theta \quad ; \quad \eta = \rho \operatorname{sen} \theta \tag{6}$$

e allora la (4) origina il sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} & \xi^2 - \eta^2 + 2\,\varepsilon\xi = -\,\omega^2\, e^{-\tau\xi} \cos \tau\eta \\ & 2\,\xi\eta + 2\,\varepsilon\eta = \omega^2\, e^{-\tau\xi} \operatorname{sen} \tau\eta \end{aligned} \right. \tag{7}$$

del quale interessano le soluzioni reali.

Sono in gioco tre parametri ω, ε, τ, ma possiamo facilmente ridurci a due soli.

Infatti, ponendo:

$$\tau\xi = X \quad ; \quad \tau\eta = Y \quad ; \quad \tau\rho = R \quad ; \quad \tau\omega = \Omega \quad ; \quad \tau\varepsilon = E\,;$$

il sistema (7) si può scrivere così:

$$\left\{ \begin{aligned} & X^2 - Y^2 + 2\,EX = -\,\Omega^2\, e^{-X} \cos Y \\ & 2\,XY + 2\,EY = \Omega^2\, e^{-X} \operatorname{sen} Y \end{aligned} \right. \tag{9}$$

nel quale figurano i due soli parametri E e Ω. Il problema è ricondotto alla risoluzione e alla discussione del sistema (9) in campo reale.

Il sistema (9) può facilmente trasformarsi nel seguente:

$$\frac{2\,XY + 2\,EY}{X^2 - Y^2 + 2\,EX} = -\tan Y \tag{10}$$

$$Y\,(X^2 + Y^2) = \Omega^2\, e^{-X}\,(Y \cos Y + X \operatorname{sen} Y)\,. \tag{11}$$

Ora, la (10) e la (11) rappresentano due famiglie di curve le cui intersezioni risolvono il problema. Si noti che le (10), (11) sono adimensionali.

La (10) è abbastanza praticabile, in quanto, posto:

$$E + X = U \tag{12}$$

essa diviene:

$$\frac{2\,UY}{U^2 - E^2 - Y^2} = -\tan Y \tag{13}$$

donde:

$$U^2 + 2\,Y \cot Y \cdot U - (E^2 + Y^2) = 0 \tag{14}$$

$$X = -\,Y \cot Y \pm \sqrt{Y^2 \cot Y^2 + E^2 + Y^2} - E\,. \tag{15}$$

La famiglia (10) è dunque costituita da curve ciascuna delle quali, per un valore di Y, fornisce sempre due e due soli valori di X che, se $E = 0$, non coincidono mai.

Più difficile è semplificare l'aspetto della (11), e dopo numerosi tentativi, ci siamo persuasi che il problema non è suscettibile di una trattazione semplice e facilmente visibile.

Ma vi è ugualmente modo di fare un passo avanti.

In sostanza, a noi interessa soprattutto osservare che dà luogo a stabilità ogni soluzione in cui $\xi \leq 0$ e che dà luogo a instabilità ogni soluzione comportante $\xi > 0$.

Possiamo anche dire:

$$\left\{\begin{aligned} &X > 0 \ : \ \text{instabilità} \\ &X \leq 0 \ : \ \text{stabilità}\,. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Orbene, i due casi espressi nella (16) contengono, come elemento separatore, per intenderci, il caso $X = 0$.

Ora, facendo $X = 0$ nel sistema (10), (11) si ha:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2\,EY}{-Y^2} = -\tan Y \\ &Y^3 = \Omega^2\, Y \cos Y \end{aligned}\right.$$

ossia

$$\left\{\begin{aligned} &Y \tan Y = 2\,E \\ &Y^2 = \Omega^2 \cos Y\,. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Ebbene: nel piano $(E\,,\Omega)$ le (17) sono le equazioni parametriche (nel parametro Y) di una curva che divide il piano in due regioni, in una delle quali c'è stabilità e nell'altra c'è instabilità.

Vediamo di studiare tale curva.

Dal sistema (17) si deduce subito il seguente:

$$\left\{\begin{aligned} &\cos^2 Y + \frac{4\,E^2}{\Omega^2} \cos Y - 1 = 0 \\ &Y^4 + 4\,E^2\, Y^2 - \Omega^4 - 0 \end{aligned}\right. \tag{18}$$

e ognuna delle due equazioni di secondo grado (18) si risolve, senza alternative di segno, ottenendo (nel 1^0 quadrante)

$$\left\{\begin{aligned} &\cos Y = \frac{\sqrt{4\,E^4 + \Omega^4} - 2\,E^2}{\Omega^2} \\ &Y^2 \ \ = \sqrt{4\,E^4 + \Omega^4} - 2\,E^2 \end{aligned}\right. \tag{19}$$

e così la curva $(E\,,\Omega)$ cercata ha l'equazione:

$$\sqrt{4\,E^4 + \Omega^4} - 2\,E^2 = \Omega^2 \cos \sqrt{\sqrt{4\,E^4 + \Omega^4} - 2\,E^2}\,. \tag{20}$$

Se poniano:

$$W^2 = \sqrt{4\,E^4 + \Omega^4} - 2\,E^2 \,. \tag{21}$$

la curva in questione, nel piano $(\Omega\,,W)$, o, se si vuole, nel piano $(\Omega^2\,,W)$ assume l'equazione:

$$\Omega^2 = \frac{W^2}{\cos W} \tag{22}$$

risalendo lungo le varie posizione fatte, è facile vedere che, in sostanza:

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \tau\omega \\ W &= \pm\,\tau\sqrt{\sqrt{4\,\varepsilon^4 + \omega^4} - 2\,\varepsilon^2}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

La curva (22), limitatamente al primo quadrante, è tabulata. Attraversando la curva, si passa da un caso di stabilità ad uno di instabilità e viceversa. La tabella è riportata qui di seguito.

Chiaramente è $\Omega > 0$ e anche $\cos W \geq 0$, talché W può stare, a meno di $2\,\pi n$, nel 1° o nel 4° quadrante.

W	Ω	W	Ω	W	Ω	W	Ω
0.00	0.00	5.00	9.39	11.40	18.17	18.00	22.15
0.20	0.20	5.20	7.60	11.60	15.39	18.20	20.40
0.40	0.42	5.40	6.78	11.80	13.90	18.40	19.39
0.60	0.66	5.60	6.36	12.00	13.06	18.60	18.90
0.80	0.96	5.80	6.16	12.20	12.68	18.80	18.81
1.00	1.36	6.00	6.12	12.40	12.49	19.00	19.11
1.20	1.99	6.20	6.21	12.60	12.60	19.20	19.81
1.40	3.400	6.40	6.42	12.80	12.98	19.40	21.01
		6.60	6.77	13.00	13.65	19.60	22.92
		6.80	7.29	13.20	14.70	19.80	25.97
		7.00	8.06	13.40	16.34		
		7.20	9.23	13.60	19.01		
		7.40	11.17				

La curva presenta asintoti verticali in corrispondenza a

$$\cos W = 0$$

ossia a:

$$W = 2\,\pi n \pm \frac{\pi}{2}$$

e possiede inoltre dei minimi del 1° quadrante e dei massimi nel 4° quadrante. Questi massimi e minimi si hanno in corrispondenza ai valori W per i quali:

$$\frac{d\Omega}{dW} = 0$$

ossia, per la (22)

$$\frac{d}{dW}\left(\frac{W}{\sqrt{\cos W}}\right) = 0 \tag{24}$$

$$\tan W + \frac{2}{W} = 0 \,. \tag{25}$$

Qui di seguito sono riportate le prime radici della (25)

2.4587 ; 5.9594 ; 9.2110 ; 12.4065 ; 15.5803 ; 18.7433 ;
21.9001 ; 25.0531 ; 28.2035 ; 31.3522 ; 34.4996 .

Il caso $\xi = 0$ corrisponde, ovviamente, a un caso stabile. Possiamo vederlo anche direttamente dalle (7), che si presentano così:

$$\begin{cases} \eta_2 = \omega^2 \cos \tau\eta \\ 2\,\varepsilon\eta = \omega^2 \operatorname{sen} \tau\eta \,. \end{cases} \tag{27}$$

I parametri ω, τ, ε devono essere tali da assicurare la compatibilità delle (27), dalle quali si ottiene anche:

$$\begin{cases} \eta^4 + 4\,\varepsilon^2\,\eta^2 = \omega^4 \\ \eta \tan \varepsilon\eta = 2\,\varepsilon \,. \end{cases} \tag{28}$$

ed eliminando η fra le (28) si ha una condizione per ε, ω, τ.