
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

HUGO BEIRÃO DA VEIGA

**Sul più grande punto di biforcazione positivo per una
classe di operatori potenziali non differenziabili**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 59 (1975), n.6, p. 615–619.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1975_8_59_6_615_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *Sul più grande punto di biforcazione positivo per una classe di operatori potenziali non differenziabili.* Nota di HUGO BEIRÃO DA VEIGA (*), presentata (**) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — We characterize the first bifurcation point for some potential non-differentiable operators in Hilbert spaces.

Sia H uno spazio di Hilbert reale di norma $\| \cdot \|$ e prodotto scalare (\cdot , \cdot) . Indicheremo con « \rightarrow » la convergenza in norma e con « \rightharpoonup » la convergenza debole in questo spazio.

Nel seguito indicheremo con \mathbf{K} un cono convesso e chiuso in H di vertice nell'origine, ossia \mathbf{K} è un sottoinsieme chiuso di H tale che $t\mathbf{K} \subset \mathbf{K}$ per ogni $t \geq 0$ e $\mathbf{K} + \mathbf{K} \subset \mathbf{K}$. Si suppone che \mathbf{K} , non vuoto, non si riduca all'origine.

Dato $\rho \geq 0$ porremo $S_\rho = \{x \in H : \|x\| = \rho\}$, $V_\rho = \{x \in H : \|x\| \leq \rho\}$, $\mathbf{K}_\rho = \mathbf{K} \cap V_\rho$.

Un numero reale μ si dice un *punto di biforcazione* (o di diramazione) per un operatore $\Gamma : \mathbf{K} \rightarrow H$ se per $\varepsilon > 0$ esiste una coppia $(\lambda_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \mathbf{R} \times \mathbf{K}$ tale che $\Gamma x_\varepsilon = \mu_\varepsilon x_\varepsilon$, $|\mu - \mu_\varepsilon| < \varepsilon$, $0 < \|x_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Analógamente $+\infty$ è un punto di biforcazione per Γ se nella precedente definizione la condizione $|\mu - \mu_\varepsilon| < \varepsilon$ viene sostituita con $\mu_\varepsilon > 1/\varepsilon$; una definizione analoga vale per $-\infty$.

Se nelle precedenti definizioni si sostituisce la condizione $0 < \|x_\varepsilon\| < \varepsilon$ con $\|x_\varepsilon\| > 1/\varepsilon$ si dirà che μ (risp. $\pm\infty$) è un *punto di biforcazione* (o di diramazione) *asintotico* per l'operatore Γ .

Ovviamente nella prima definizione basta che Γ sia definito in un certo \mathbf{K}_ρ ($\rho > 0$) e nella seconda che lo sia in un certo $\mathbf{K} - \mathbf{K}_\rho$.

Se S è un sottoinsieme non vuoto di H e Φ un funzionale reale definito in S diremo che Φ è debolmente continuo in S se $x_n \in S$, $x_n \rightharpoonup x_0 \in S$ implica che $\Phi(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x_n)$.

Diremo che Φ è debolmente semi-continuo superiormente se sotto le stesse ipotesi si ha $\Phi(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x_n)$. In modo analogo si definisce la semi-continuità inferiore debole.

Indicheremo con \bar{S} la chiusura *debole* di S nel senso seguente: $\bar{S} = \{x \in H : \exists x_n \in S, n = 1, 2, \dots, x_n \rightharpoonup x\}$. Ovviamente $\bar{S} = S$ se S è un sottoinsieme fortemente chiuso e convesso di H .

(*) Ricercatore dello « Instituto de Física e Matemática » (Lisbona).

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1975.

Se $\Phi : S \rightarrow \mathbf{R}$ diremo che Φ è debolmente continuo in \bar{S} se esiste una estensione di Φ a \bar{S} debolmente continua in \bar{S} (valgono definizioni analoghe per le semi-continuità superiore e inferiore debole in \bar{S}).

È ben noto il seguente risultato (cfr. [2], § 6, Teorema 2.1 e [3], § 17, Teorema 17.6).

TEOREMA. *Sia $\Phi : H \rightarrow \mathbf{R}$, $\Phi(0) = 0$, un funzionale debolmente continuo e Fréchet differenziabile in H e poniamo $\Gamma = \nabla\Phi$. Supponiamo che $\Gamma_0 = 0$ e che Γ ammetta una derivata secondo Fréchet nell'origine $D\Gamma(0) = B$, essendo B un operatore lineare continuo compatto e autoaggiunto.*

Allora il più grande autovalore μ_0 di B , se positivo, è un punto di biforcazione per Γ .

In questa Nota generalizzeremo questo risultato ad una classe di operatori definiti in coni e non necessariamente derivabili nell'origine. Questa generalizzazione sarà estesa anche al caso della biforcazione asintotica. Le dimostrazioni dei risultati che enunceremo (insieme a delle applicazioni) saranno presentate in [1].

Diremo che $B : \mathbf{K} \rightarrow H$ è positivamente omogeneo se $B(tx) = tBx$ per ogni $x \in \mathbf{K}$ ed ogni $t \geq 0$. Porremo inoltre

$$m_{\mathbf{K}}(B) = \inf_{x \in \mathbf{K} \cap S_1} (Bx, x), \quad M_{\mathbf{K}}(B) = \sup_{x \in \mathbf{K} \cap S_1} (Bx, x)$$

PROPOSIZIONE 1. *Sia $\Gamma = B + \omega$ con $B : \mathbf{K} \rightarrow H$ positivamente omogeneo e $\omega : \mathbf{K} \rightarrow H$ verificante*

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ 0 \neq x \in \mathbf{K}}} \frac{(\omega x, x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Allora i punti di biforcazione di Γ in \mathbf{K} sono contenuti nell'intervallo chiuso $[m_{\mathbf{K}}(B), M_{\mathbf{K}}(B)]$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia $\Gamma = B + \omega$ con $B : \mathbf{K} \rightarrow H$ positivamente omogeneo e $\omega : \mathbf{K} \rightarrow H$ verificante*

$$(2) \quad \lim_{\substack{\|x\| \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbf{K}}} \frac{(\omega x, x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Allora i punti di biforcazione asintotici di Γ in \mathbf{K} sono contenuti nell'intervallo $[m_{\mathbf{K}}(B), M_{\mathbf{K}}(B)]$.

OSSERVAZIONE 1. Questi risultati hanno un carattere locale bastando nella Proposizione 1 che Γ sia definito in \mathbf{K}_ρ , per un $\rho > 0$, e nella Proposizione 2 che Γ sia definito in $\mathbf{K} - \mathbf{K}_\rho$ per un $\rho \geq 0$.

A questo punto si pone naturalmente il problema di studiare in che condizioni i valori estremi dell'intervallo $[m_{\mathbf{K}}(B), M_{\mathbf{K}}(B)]$ siano effettivamente punti di biforcazione per Γ . Siccome μ è un punto di biforcazione (nell'ori-

gine o asintotico) per Γ se e soltanto se $-\mu$ è un punto di biforcazione per $-\Gamma$, lo studio concernente il valore $m_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$ si riconduce sempre allo studio concernente $M_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$. Quindi, e senza perdita di generalità, ci restringeremo a quest'ultimo caso.

Se Φ è un funzionale reale definito in \mathbf{K} diremo che Φ è Gateaux differenziabile in un punto $x_0 \in \mathbf{K}$ e che il suo gradiente (Gateaux) in x_0 è $y \in \mathbf{H}$ se

$$(3) \quad \Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0) = (y, th) + \omega(x_0, th), \\ \forall h \text{ tale che } x_0 + h \in \mathbf{K}, \forall t \in]0, 1]$$

ove $\lim_{t \rightarrow 0} [\omega(x_0, th)/t] = 0$. Porremo allora $y = \nabla\Phi(x_0)$.

Se $\Phi: \mathbf{K} - \mathbf{K}_\rho \rightarrow \mathbf{R}$ e se $x_0 \in \mathbf{K} - \mathbf{K}_\rho$ si considerano in (3) soltanto gli incrementi h tali che $\|h\| < \|x_0\| - \rho$.

Sia $\Gamma: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{H}$. Useremo nel seguito la seguente condizione (4), che è verificata in particolare se $\Gamma\mathbf{K} \subset \mathbf{K}$ (cfr. Osservazione 3):

$$(4) \quad \text{sia } x \in \text{frontiera di } \mathbf{K} \text{ con } (\Gamma x, x) > 0 \text{ e} \\ \Gamma x \neq \lambda x, \forall \lambda \in \mathbf{R}. \text{ Allora, posto } \rho = \|x\|, \\ \text{esiste } y \in \mathbf{K}_\rho, y \neq x_0, \text{ tale che } (\Gamma x, y) \geq (\Gamma x, x).$$

Nel Teorema 2 questa ipotesi sarà usata per un operatore Γ definito in $\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0}$ essendo allora sottointeso che in (4) si prendono in considerazione soltanto punti x verificanti $\|x\| > \rho_0$.

TEOREMA 1. *Sia $\Phi: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{R}$, $\Phi(0) = 0$, un funzionale debolmente semi-continuo superiormente e Gateaux differenziabile e poniamo $\Gamma = \nabla\Phi$. Supponiamo che Γ verifichi la condizione (4) ed inoltre che si abbia $\Gamma = \mathbf{B} + \omega$ con \mathbf{B} positivamente omogeneo in \mathbf{K} e ω soddisfacente (1).*

Allora se $M_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$ è positivo, $M_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$ è il più grande punto di biforcazione di Γ in \mathbf{K} .

Si osserva che le ipotesi del Teorema 1 implicano che $M_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}) < +\infty$ ma non escludono che $m_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}) = -\infty$. Si osservi anche che il Teorema 1 ha un carattere locale, ossia è sufficiente che le funzioni siano definite e le ipotesi vengano verificate in un certo \mathbf{K}_ρ , con ρ positivo arbitrariamente piccolo.

TEOREMA 2. *Sia $\Phi: \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0} \rightarrow \mathbf{R}$ un funzionale debolmente semi-continuo superiormente in $\overline{\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0}}$, Gateaux differenziabile in $\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0}$ e tale che $\Gamma = \nabla\Phi$ verifichi la condizione (4) ed inoltre $\Gamma = \mathbf{B} + \omega$ con \mathbf{B} positivamente omogeneo in \mathbf{K} e ω verificante (2). Sia $|\Phi(x) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}x, x)|$ limitato su $\mathbf{K} \cap S_\rho$ per ogni $\rho > \rho_0$.*

Allora se $M_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$ è positivo, $M_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$ è il più grande punto di biforcazione asintotico per Γ in \mathbf{K} .

OSSERVAZIONE 2. Nel Teorema 2 la semi-continuità superiore debole di Φ in $\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0}$ può essere sostituita con la semi-continuità superiore debole di Φ in $\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho_0}$ insieme a quella di (Bx, x) in \mathbf{K} . Inoltre quella stessa condizione è soddisfatta se Φ è definito e debolmente semi-continuo superiormente in tutto \mathbf{K} .

OSSERVAZIONE 3 (condizioni sufficienti per la condizione (4)). Affinchè la condizione (4) sia verificata in un punto x è sufficiente che esista $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ tale che $x + \varepsilon \Gamma x \in \mathbf{K}$. In particolare è sufficiente che $\Gamma x \in \mathbf{K}$.

Più in particolare la condizione (4) è verificata se $\Gamma \mathbf{K} \subset \mathbf{K}$ o se $\mathbf{K} = H$.

OSSERVAZIONE 4 (sulle condizioni (1) e (2)). Dati due operatori B e \bar{B} positivamente omogenei su \mathbf{K} diremo che B e \bar{B} sono equivalenti (e scriveremo $B \sim \bar{B}$) se $(Bx, x) = (\bar{B}x, x)$, $\forall x \in \mathbf{K}$. Se $B \sim \bar{B}$ allora $m_{\mathbf{K}}(B) = m_{\mathbf{K}}(\bar{B})$ e $M_{\mathbf{K}}(B) = M_{\mathbf{K}}(\bar{B})$.

Supponiamo che Γ è definito in \mathbf{K}_{ρ} , $\rho > 0$, [risp. in $\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\rho}$] e che $\Gamma = B + \omega$ con B positivamente omogeneo in \mathbf{K} e ω verificante (1) [risp. (2)]. In queste condizioni diremo che $\Gamma = B + \omega$ è una decomposizione ammissibile (nell'origine) [risp. (all'infinito)].

Se $\Gamma = B + \omega$ è una dec. ammissibile e se $B \sim \bar{B}$ allora esiste una dec. ammissibile $\Gamma = \bar{B} + \bar{\omega}$. Reciprocamente se $\Gamma = B + \omega$ e $\Gamma = \bar{B} + \bar{\omega}$ sono due dec. ammissibili allora $B \sim \bar{B}$.

Si osservi che se B è un operatore lineare continuo allora esiste uno (unico) operatore lineare continuo autoaggiunto B_p tale che $B_p \sim B$.

Sia $\Gamma: H \rightarrow H$, $\Gamma 0 = 0$. Γ è Fréchet differenziabile nell'origine (con $D\Gamma(0) = B$ operatore lineare continuo) se $\Gamma = B + \omega$ con ω verificante

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\omega(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Se decomponiamo il campo di vettori $\omega(x)$ nelle componenti radiale e tangenziale, cioè,

$$\omega_1(x) = \frac{(\omega x, x)}{\|x\|^2} x, \quad \omega_2(x) = \omega(x) - \frac{(\omega x, x)}{\|x\|^2} x,$$

e se consideriamo le condizioni ($i = 1, 2$)

$$(6_i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\omega_i(x)\|}{\|x\|} = 0,$$

allora si vede che (5) equivale a (6₁) più (6₂). Invece (1) equivale soltanto a (6₁). Si osservi in proposito che $\omega_1(x)$ appartiene ad uno sottospazio unidimensionale ben determinato (cioè indipendente dal particolare $\omega(x)$) mentre in questo stesso senso $\omega_2(x)$ appartiene ad un iperpiano.

Finalmente se Γ ammette una dec. ammissibile ed è differenziabile Gateaux nell'origine allora $\Gamma = \nabla \Gamma(0) + (\Gamma - \nabla \Gamma(0))$ è una dec. ammissibile.

Le diverse proprietà descritte sussistono se Γ è definito in un cono \mathbf{K} e se la derivata (Fréchet o Gateaux) $D\Gamma(o) = B$ è soltanto un operatore positivamente omogeneo definito in \mathbf{K} (diciamo che un tale operatore B è la derivata Fréchet [risp. Gateaux] di Γ nell'origine se $\Gamma = B + \omega$ ed il resto ω verifica (5) [risp. la solita condizione direzionale] in \mathbf{K}).

Risultati del tutto analoghi sussistono sostituendo (1) con (2) e la differenziabilità (Fréchet o Gateaux) nell'origine con quella all'infinito.

Una discussione più dettagliata verrà presentata in [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. BEIRÃO DA VEIGA - *On bifurcation and asymptotic bifurcation for non differentiable potential operators and for systems of Hammerstein type* (di prossima pubblicazione).
- [2] M. A. KRASNOSEL'SKII (1963) - *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations* (English edition), Pergamon Press.
- [3] M. M. VAINBERG (1964) - *Variational methods for the study of nonlinear operators* (English edition), Holden-Day, Inc.