Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Rita Ciampi Procesi, Dina Smit Ghinelli

Calcolo simbolico per morfismi di spazi tensoriali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.1-2, p. 6–14.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_1-2_6_0>

Algebra. — *Calcolo simbolico per morfismi di spazi tensoriali* (*). Nota (**) di RITA CIAMPI PROCESI e DINA SMIT GHINELLI, presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — The present work describes the explicit calculation of mixed concomitants for $G = GL(k, \mathbf{C})$ and their relations. A set of generators for the module ${}_{\mathbf{C}[S_m]}\mathrm{Hom}_G((V\otimes V^*)^{\otimes m}, (V\otimes V^*)^{\otimes n})_{\mathbf{C}[S_n]}$ is also exhibited. In view of the results of [1], everything remains true for any field of characteristic $p \geq 0$.

1. INTRODUZIONE

Siano $V = \mathbf{C}^k$, $G = GL(k, \mathbf{C})$ e $m, n, p \in \mathbf{N}$. Ogni permutazione $\sigma \in S_{m+n}$ individua un omomorfismo G–invariante

$$\mu_\sigma^{m,n} \in W_{m,n} = \mathrm{Hom}_G((V\otimes V^*)^{\otimes m}, (V\otimes V^*)^{\otimes n}),$$

che chiameremo c o n t r a z i o n e associata a σ (1), definito implicitamente dalla

$$(1) \qquad \langle \psi_{m+1}\otimes u_{m+1}\otimes\cdots\otimes\psi_{m+n}\otimes u_{m+n}, \mu_\sigma^{m,n}(u_1\otimes\psi_1\otimes\cdots\otimes u_m\otimes\psi_m)\rangle =$$
$$= \prod_{j=1}^{m+n}\langle\psi_{\sigma(j)}, u_j\rangle = \prod_{j=1}^{m+n}\langle\psi_j, u_{\sigma^{-1}(j)}\rangle,$$

per $u_j \in V$, $\psi_j \in V^*$.

Al variare di σ in S_{m+n}, gli omomorfismi $\mu_\sigma^{m,n}$ costituiscono un sistema di generatori per lo spazio $W_{m,n}$ (cfr. H. Weyl [3], p. 45 e il diagramma (1) del § 2).

Analogamente, gli omomorfismi G–invarianti

$$\mu_\tau^{n,p} \in W_{n,p} = \mathrm{Hom}_G((V\otimes V^*)^{\otimes n}, (V\otimes V^*)^{\otimes p})$$

o contrazioni associate a permutazioni τ di S_{n+p}, generano lo spazio $W_{n,p} = \mathrm{Hom}_G((V\otimes V^*)^{\otimes n}, (V\otimes V^*)^{\otimes p})$.

Nel presente lavoro, fornita un'espressione esplicita per $\mu_\sigma^{m,n}$, (cfr. § 2), si dimostra che componendo due tali generatori si ottiene ancora un gene-

(*) Lavoro compiuto nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1976.

(1) Osserviamo che il termine «contrazione» andrebbe più propriamente riservato alla forma $\sigma_{m,n}: V^{*\otimes m+n}\otimes V^{\otimes m+n}\to\mathbf{C}$ che, su $\psi_1\otimes\cdots\otimes\psi_{m+n}\otimes u_1\otimes\cdots\otimes u_{m+n}$ assume il comune valore dei tre membri della (1), e che si identifica a $\mu_\sigma^{m,n}$ nell'isomorfismo canonico $\mathrm{Hom}((V\otimes V^*)^{\otimes m}, (V\otimes V^*)^{\otimes n}) \simeq (V^{*\otimes m+n}\otimes V^{\otimes m+n})^*$.

ratore di $W_{m,p} = \mathrm{Hom}_G((V \otimes V^*)^{\otimes m}, (V \otimes V^*)^{\otimes p})$. Precisamente si prova che esiste un unico elemento $\omega \in S_{m+p}$ tale che

$$\mu_\tau^{n,p} \circ \mu_\sigma^{m,n} = \mu_\omega^{m,p}, \tag{2}$$

e di tale elemento si fornisce un'espressione esplicita (cfr. § 3).

Nel § 4, introdotta in $W_{m,n}$ una struttura di modulo sinistro sopra l'algebra gruppo $\mathbf{C}[S_m]$ e destro sopra $\mathbf{C}[S_n]$, si esibisce un sistema di generatori per tale struttura di bimodulo.

Osserviamo, infine, che utilizzando questi generatori canonici per i bimoduli $W_{m,n}$ e $W_{n,p}$, insieme al risultato del § 3 sulla composizione di due contrazioni, si può dedurre tutta una serie di risultati e problemi che si spera possano essere oggetto di uno studio successivo.

2. L'INVARIANTE $\mu_\sigma^{m,n}$ IN FORMA ESPLICITA

Per fissare le notazioni, riassumiamo nel seguente diagramma gli isomorfismi canonici che utilizzeremo

$$\begin{tikzcd}
f \in \mathrm{End}(V^{\otimes m+n}) \arrow[d, "\alpha"] & h \in \mathrm{Hom}((V \otimes V^*)^{\otimes m}, (V \otimes V^*)^{\otimes n}) \arrow[dl, dashed, "\delta"'] \\
(V^{*\otimes m+n} \otimes V^{\otimes m+n})^* & V^{*\otimes m+n} \otimes V^{\otimes m+n}. \arrow[l, "\beta"] \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Con ovvio significato dei simboli, gli isomorfismi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sono definiti dalle:

$$\alpha(f)(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}) = \\ = \langle \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n}, f(u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}) \rangle, \tag{2}$$

$$\beta(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{m+n} \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{m+n})(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}) = \\ = \prod_{i=1}^{m+n} \langle \psi_i, v_i \rangle \langle \varphi_i, u_i \rangle, \tag{3}$$

$$\gamma(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{m+n} \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{m+n})(u_1 \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes \psi_m) = \\ = \prod_{j=1}^{m} \langle \psi_j, v_j \rangle \langle \varphi_j, u_j \rangle \, v_{m+1} \otimes \varphi_{m+1} \otimes \cdots \otimes v_{m+n} \otimes \varphi_{m+n}, \tag{4}$$

$$\delta(h)(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}) = \\ = \langle \psi_{m+1} \otimes u_{m+1} \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes u_{m+n}, h(u_1 \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes \psi_m) \rangle. \tag{5}$$

Ci proponiamo di determinare, in forma esplicita, l'omomorfismo $\mu_\sigma^{m,n} \in W_{m,n}$ associato ad una permutazione $\sigma \in S_{m+n}$.

Una permutazione σ di S_{m+n} individua l'endomorfismo f_σ di $V^{\otimes m+n}$ definito dalla

$$(6) \qquad f_\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}) = u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(m+n)} .$$

Ma f_σ, tramite l'isomorfismo α del diagramma (1), si identifica alla forma su $V^{*\otimes m+n} \otimes V^{\otimes m+n}$, che indicheremo con $\sigma_{m,n}$, tale che

$$(7) \qquad \sigma_{m,n}(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}) = \\ = \prod_{i=1}^{m+n} \langle \psi_i , u_{\sigma^{-1}(i)} \rangle = \prod_{i=1}^{m+n} \langle \psi_{\sigma(i)} , u_i \rangle .$$

Appare ora chiaramente come sia spontaneo chiamare c o n t r a z i o n e associata a σ la forma $\sigma_{m,n} \in (V^{*\otimes m+n} \otimes V^{\otimes m+n})^*$ definita dalla (7). Per abuso di linguaggio (cfr. nota (1)), chiameremo ancora contrazione associata a σ l'unico omomorfismo $\mu_\sigma^{m,n}$ di $W_{m,n}$ verificante la

$$(8) \qquad \delta(\mu_\sigma^{m,n}) = \sigma_{m,n}$$

e, pertanto, definito implicitamente (cfr. (5)–(7)) dalla

$$(9) \qquad \langle \psi_{m+1} \otimes u_{m+1} \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes u_{m+n} , \mu_\sigma^{m,n}(u_1 \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes \psi_m) \rangle = \\ = \prod_{i=1}^{m+n} \langle \psi_i , u_{\sigma^{-1}(i)} \rangle = \prod_{i=1}^{m+n} \langle \psi_{\sigma(i)} , u_i \rangle .$$

Ovviamente risulta (cfr. (1)):

$$(10) \qquad \mu_\sigma^{m,n} = \gamma \circ \beta^{-1}(\sigma_{m,n}) .$$

Si tratta, quindi, di determinare l'elemento $\beta^{-1}(\sigma_{m,n})$ e applicargli la γ.

A tale scopo, fissiamo in V e V^* due basi duali: $B(V) = \{e_s\}_{1 \le s \le k}$ e $B^*(V^*) = \{e^t\}_{1 \le t \le k}$ con $\langle e^t , e_s \rangle = \delta_{ts}$, e ricordiamo che per ogni indice $i = 1, \cdots, m+n$ si ha

$$(11) \qquad \psi_i = \sum_{t_i=1}^{k} \langle \psi_i , e_{t_i} \rangle \cdot e^{t_i} \quad , \quad u_{\sigma^{-1}(i)} = \sum_{s_i=1}^{k} \langle e^{s_i} , u_{\sigma^{-1}(i)} \rangle \cdot e_{s_i} ,$$

da cui

$$(12) \qquad \sigma_{m,n}(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}) = \prod_{i=1}^{m+n} \langle \psi_i , u_{\sigma^{-1}(i)} \rangle = \\ = \prod_{i=1}^{m+n} \left(\sum_{t_i=1}^{k} \sum_{s_i=1}^{k} \langle \psi_i , e_{t_i} \rangle \langle e^{s_i} , u_{\sigma^{-1}(i)} \rangle \langle e^{t_i} , e_{s_i} \rangle \right) = \prod_{i=1}^{m+n} \left(\sum_{s_i=1}^{k} \langle \psi_i , e_{s_i} \rangle \langle e^{s_i} , u_{\sigma^{-1}(i)} \rangle \right) .$$

Con semplici calcoli si ricava ora l'elemento

$$x = \sum_{s_1, \cdots, s_{m+n}}^{1,k} e^{s_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e^{s_{\sigma(m+n)}} \otimes e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_{m+n}} \tag{13}$$

di $V^{*\otimes m+n} \otimes V^{\otimes m+n}$ che risolve la $\beta(x) = \sigma_{m,n}$.

Infatti (cfr. la (3)):

$$\beta(x)(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}) = \sum_{s_1, \cdots s_{m+n}}^{1,k} \prod_{i=1}^{m+n} \langle \psi_i, e_{s_i} \rangle \langle e^{s_{\sigma(i)}}, u_i \rangle =$$

$$= \sum_{s_1, \cdots, s_{m+n}}^{1,k} \prod_{i=1}^{m+n} \langle \psi_i, e_{s_i} \rangle \langle e^{s_i}, u_{\sigma^{-1}(i)} \rangle = \prod_{i=1}^{m+n} \left(\sum_{s_i=1}^{k} \langle \psi_i, e_{s_i} \rangle \langle e^{s_i}, u_{\sigma^{-1}(i)} \rangle \right),$$

da cui, tenendo conto della (12) e per l'arbitrarietà di $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}$, si ha:

$$\beta^{-1}(\sigma_{m,n}) = x = \sum_{s_1, \cdots, s_{m+n}}^{1,k} e^{s_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e^{s_{\sigma(m+n)}} \otimes e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_{m+n}}. \tag{14}$$

A questo punto basta applicare ad x l'isomorfismo γ definito in (4) per ottenere l'espressione esplicita di $\mu_\sigma^{m,n}$. In definitiva resta dimostrata la seguente

2.1. PROPOSIZIONE. *Siano* $V = \mathbf{C}^k$, $G = GL(k, \mathbf{C})$ *e* $m, n \in \mathbf{N}$. *Fissata arbitrariamente una permutazione* $\sigma \in S_{m+n}$, *l'omomorfismo* G*–invariante*

$$\mu_\sigma^{m,n} : \quad (V \otimes V^*)^{\otimes m} \to (V \otimes V^*)^{\otimes n}$$

associato a σ, *definito implicitamente dalla* (9), *ha l'espressione esplicita*

$$\mu_\sigma^{m,n}(u_1 \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes \psi_m) = \sum_{s_1, \cdots, s_{m+n}}^{1,k} \prod_{j=1}^{m} \langle \psi_j, e_{s_j} \rangle \langle e^{s_{\sigma(j)}}, u_j \rangle \cdot \tag{15}$$

$$\cdot\, e_{s_{m+1}} \otimes e^{s_{\sigma(m+1)}} \otimes \cdots \otimes e_{s_{m+n}} \otimes e^{s_{\sigma(m+n)}}$$

ove $\{e_s\}_{1 \le s \le k}$ *ed* $\{e^t\}_{1 \le t \le k}$ *sono basi di* V *e* V* *duali, cioè tali che* $\langle e^t, e_s \rangle = \delta_{ts}$.

3. COMPOSIZIONE DI DUE CONTRAZIONI

Quanto visto nel § 2 ci permette di dimostrare che la composizione di due contrazioni associate a permutazioni è ancora una contrazione associata ad una permutazione. In termini più precisi si ha la seguente

3.1. PROPOSIZIONE. *Siano* $V = \mathbf{C}^k$, $G = GL(k, \mathbf{C})$ *e* $m, n, p \in \mathbf{N}$. *Assegnate due permutazioni* $\sigma \in S_{m+n}$ *e* $\tau \in S_{n+p}$ *e considerati gli omomorfismi* G*–invarianti*

$$\mu_\sigma^{m,n} \in W_{m,n} = \mathrm{Hom}_G((V \otimes V^*)^{\otimes m}, (V \otimes V^*)^{\otimes n}),$$

$$\mu_\tau^{n,p} \in W_{n,p} = \mathrm{Hom}_G((V \otimes V^*)^{\otimes n}, (V \otimes V^*)^{\otimes p}),$$

ad esse associati (cfr. § 2), esiste un unico elemento $\omega \in S_{m+p}$ *tale che*

$$\mu_\omega^{m,p} = \mu_\tau^{n,p} \circ \mu_\sigma^{m,n}. \tag{1}$$

Inoltre tale elemento si calcola esplicitamente con un piccolo programma di calcolatore a partire dall'espressione (6) *della* $\omega_{m,n}$ *dedotta dalla formula esplicita che daremo in* (4), *di* $\mu_\omega^{m,p}$.

Dimostrazione. Con le notazioni del § 2, se $\tau \in S_{n+p}$ risulta

$$\mu_\tau^{n,p} = \gamma \circ \beta^{-1}(\tau_{n,p}) = \gamma \left(\sum_{t_1, \cdots t_{n+p}}^{1,k} e^{t_{\tau(1)}} \otimes \cdots \otimes e^{t_{\tau(n+p)}} \otimes e_{t_1} \otimes \cdots \otimes e_{t_{n+p}} \right) \tag{2}$$

e quindi

$$\mu_\tau^{n,p}(v_1 \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \varphi_n) = \sum_{t_1, \cdots, t_{n+p}}^{1,k} \prod_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, e_{t_i} \rangle \langle e^{t_{\tau(i)}}, v_i \rangle \cdot \tag{3}$$
$$\cdot\, e_{t_{n+1}} \otimes e^{t_{\tau(n+1)}} \otimes \cdots \otimes e_{t_{n+p}} \otimes e^{t_{\tau(n+p)}}.$$

Di qui e dalla (15) del § 2 segue che

$$\mu_\tau^{n,p} \circ \mu_\sigma^{m,n}(u_1 \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes \psi_m) = \sum_{s_1, \cdots, s_{m+n}}^{1,k} \prod_{j=1}^{m} \langle \psi_j, e_{s_j} \rangle \langle e^{s_{\sigma(j)}}, u_j \rangle \cdot \tag{4}$$
$$\cdot \sum_{t_1, \cdots, t_{n+p}}^{1,k} \prod_{i=1}^{n} \langle e^{s_{\sigma(m+i)}}, e_{t_i} \rangle \langle e^{t_{\tau(i)}}, e_{s_{m+i}} \rangle \cdot e_{t_{n+1}} \otimes e^{t_{\tau(n+1)}} \otimes \cdots \otimes e_{t_{n+p}} \otimes e^{t_{\tau(n+p)}}.$$

Nell'isomorfismo

$$\delta : \quad \mathrm{Hom}\,((V \otimes V^*)^{\otimes m}, (V \otimes V^*)^{\otimes p}) \to (V^{*\otimes m+p} \otimes V^{\otimes m+p})^*,$$

definito dalla (5) del § 2 per $n = p$, al composto $\mu_\tau^{n,p} \circ \mu_\sigma^{m,n}$ corrisponde la forma su $V^{*\otimes n+p} \otimes V^{\otimes n+p}$ definita dalla

$$\delta\,(\mu_\tau^{n,p} \circ \mu_\sigma^{m,n})\,(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+p} \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+p}) = \tag{5}$$
$$= \sum_{s_1, \cdots, s_{m+n}}^{1,k} \prod_{j=1}^{m} \langle \psi_j, e_{s_j} \rangle \langle e^{s_{\sigma(j)}}, u_j \rangle \cdot$$
$$\cdot \sum_{t_1, \cdots, t_{n+p}}^{1,k} \prod_{i=1}^{n} \langle e^{s_{\sigma(m+i)}}, e_{t_i} \rangle \langle e^{t_{\tau(i)}}, e_{s_{m+i}} \rangle \prod_{h=1}^{p} \langle \psi_{m+h}, e_{t_{n+h}} \rangle \langle e^{t_{\tau(n+h)}}, u_{m+h} \rangle \,.$$

Poiché in V e V^* sono state scelte basi duali, la (5) si può anche scrivere nella forma

$$\delta\,(\mu_\tau^{n,p} \circ \mu_\sigma^{m,n})\,(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{m+p} \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+p}) = \tag{6}$$
$$= \sum_{s_1, \cdots, s_{m+n}}^{1,k} \sum_{t_1, \cdots, t_{n+p}}^{1,k} \prod_{j=1}^{m} \langle \psi_j, e_{s_j} \rangle \langle e^{s_{\sigma(j)}}, u_j \rangle \cdot \prod_{h=1}^{p} \langle \psi_{m+h}, e_{t_{n+h}} \rangle \langle e^{t_{\tau(n+h)}}, u_{m+h} \rangle,$$

ove

$$s_{\sigma(m+i)} = t_i \quad , \quad t_{\tau(i)} = s_{m+i} \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{7}$$

Dalle (6)–(7) appare chiaramente (cfr. la (12) del § 2) che $\delta(\mu_\tau^{n,p} \circ \mu_\sigma^{m,n})$ è una contrazione $\omega_{m,p}$ associata ad una permutazione ω di S_{m+p}.

Il calcolo della ω si effettua, a partire dalle σ e τ, sfruttando la (6) e tenendo conto delle identificazioni (7). Tale calcolo, pur non essendo teoricamente difficile, è in pratica alquanto lungo, soprattutto per valori elevati di m, n, p; è però possibile schematizzarlo con il seguente programma, che è stato eseguito in linguaggio FORTRAN presso il Centro di Calcolo Interfacoltà dell'Università di Roma:

```
01          INTEGER SIGMA (1000) , TAU (1000) , OMEGA (1000) , P ,
            A , B , H , HT
03          READ (5 , 100) M , N , P
10          MN = M + N
11          NP = N + P
12      100 FORMAT (20 I 4)
13          READ (5 , 100) (SIGMA (I) , I = 1 , MN)
21          READ (5 , 100) (TAU (I) , I = 1 , NP)
27          WRITE (6 , 200) (SIGMA (I) , I = 1 , MN)
35          WRITE (6 , 200) (TAU (I) , I = 1 , NP)
43      200 FORMAT (/////, (10 X , 20 (1 X , I 4)))
44          DO 10 J = 1 , M
47          JT = J
50        5 IF (SIGMA (JT) — M) 8 , 8 , 9
53        9 ICOM = SIGMA (JT) — M
54          A = TAU (ICOM)
55          IF (A — N) 81 , 81 , 91
60       81 JT = M + A
61          GO TO 5
62       91 OMEGA (J) = M + A — N
63          GO TO 10
64        8 OMEGA (J) = SIGMA (JT)
65       10 CONTINUE
67          DO 20 H = 1 , P
72          HT = H + N
73       15 IF (TAU (HT) — N) 18 , 18 , 19
76       18 ICOM = TAU (HT) + M
77          B = SIGMA (ICOM)
00          IF (B — M) 28 , 28 , 29
03       29 HT = B — M
04          GO TO 15
05       28 OMEGA (M + H) = B
06          GO TO 20
07       19 OMEGA (M + H) = M + TAU (HT) — N
10       20 CONTINUE
12          MP = M + P
13          WRITE (6 , 200) (OMEGA (I) , I = 1 , MP)
21          STOP
22          END

END OF COMPILATION:     NO DIAGNOSTICS.
```

4. Il bimodulo ${}_{\mathbf{C}[S_m]}W_{m,n\,\mathbf{C}[S_n]}$

Siano $W_{m,n} = \mathrm{Hom}_G((V\otimes V^*)^{\otimes m}, (V\otimes V^*)^{\otimes n})$ e $\mathbf{C}[S_m]$, $\mathbf{C}[S_n]$, le algebre di gruppo su $\mathbf{C}$ dei gruppi simmetrici S_m ed S_n.

L'insieme $W_{m,n}$ si può dotare nel modo seguente di una struttura di modulo sinistro sopra $\mathbf{C}[S_m]$ e destro sopra $\mathbf{C}[S_n]$ o, più brevemente di $(\mathbf{C}[S_m], \mathbf{C}[S_n])$–modulo.

Fissate comunque le permutazioni $\xi \in S_m$ e $\rho \in S_n$, indichiamo con D_ξ e S_ρ gli endomorfismi di $(V\otimes V^*)^{\otimes m}$ e, rispettivamente, $(V\otimes V^*)^{\otimes n}$ definiti, per $u_i, v_j \in V$, $\psi_i, \varphi_j \in V^*$ $(i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n)$ dalle

$$D_\xi(u_1\otimes\psi_1\otimes\cdots\otimes u_m\otimes\psi_m) = u_1\otimes\psi_{\xi(1)}\otimes\cdots\otimes u_m\otimes\psi_{\xi(m)}, \tag{1}$$

$$S_\rho(v_1\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes\varphi_n) = v_{\rho^{-1}(1)}\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes v_{\rho^{-1}(n)}\otimes\varphi_n. \tag{2}$$

Osserviamo inoltre che, per $\varphi'_j \in V^*$ e $v'_j \in V$ si ha, come si vede subito, la

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\langle \varphi'_1\otimes v'_1\otimes\cdots\otimes\varphi'_n\otimes v'_n, S_\rho(v_1\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes\varphi_n)\rangle = \\ &= \langle \varphi'_{\rho(1)}\otimes v'_1\otimes\cdots\otimes\varphi'_{\rho(n)}\otimes v'_n, v_1\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes\varphi_n\rangle.\end{aligned}$$

È ora immediato verificare che, se $\mu \in W_{m,n}$, la composizione

$$S_\rho\circ\mu\circ D_\xi$$

definisce su $W_{m,n}$ una struttura di $(\mathbf{C}[S_m], \mathbf{C}[S_n])$–modulo che indicheremo con ${}_{\mathbf{C}[S_m]}W_{m,n\,\mathbf{C}[S_n]}$.

Ci proponiamo di trovare un sistema di generatori di tale modulo. A tale scopo, saranno utili le proposizioni seguenti.

4.1. Proposizione. *Se $\mu = \mu_\lambda^{m,n} \in W_{m,n}$ è una contrazione associata alla permutazione λ di S_{m+n} e ξ', ρ', sono gli elementi di S_{m+n} immagini di ξ e ρ nelle inclusioni di S_m ed S_n in $S_m\times S_n \subseteq S_{m+n}$, risulta*

$$S_\rho\circ\mu_\lambda^{m,n}\circ D_\xi = \mu_{\rho'\xi'\lambda}. \tag{4}$$

Dimostrazione. Il secondo membro della (4) è definito implicitamente dalla

$$\begin{aligned}(5)\qquad &\langle \psi_{m+1}\otimes u_{m+1}\otimes\cdots\otimes\psi_{m+n}\otimes u_{m+n}, \mu_{\rho'\xi'\lambda}(u_1\otimes\psi_1\otimes\cdots\otimes u_m\otimes\psi_m)\rangle = \\ &= \prod_{h=1}^{m+n}\langle \psi_{\rho'\xi'\lambda(h)}, u_h\rangle.\end{aligned}$$

D'altra parte, denotata con $\lambda_{m,n}$ la forma associata a λ (cfr. la (7) del § 2), per il primo membro della (4), tenendo conto delle (1)–(3), si ha

$$\langle \psi_{m+1} \otimes u_{m+1} \otimes \cdots \otimes \psi_{m+n} \otimes u_{m+n} \,,\, S_\rho \circ \mu_\lambda^{m,n} \circ D_\xi (u_1 \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes \psi_m) \rangle =$$

$$= \langle \psi_{\rho'(m+1)} \otimes u_{m+1} \otimes \cdots \otimes \psi_{\rho'(m+n)} \otimes u_{m+n} \,,\, \mu_\lambda^{m,n} (u_1 \otimes \psi_{\xi(1)} \otimes \cdots \otimes u_m \otimes \psi_{\xi(m)}) \rangle =$$

$$= \lambda_{m,n} (\psi_{\xi(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\xi(m)} \otimes \psi_{\rho'(m+1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\rho'(m+n)} \otimes u_1 \otimes \cdots u_{m+n}) =$$

$$= \lambda_{m,n} (\psi_{\rho'\xi'(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\rho'\xi'(m+n)} \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{m+n}) = \prod_{h=1}^{m+n} \langle \psi_{\lambda_{\rho'\xi'(h)}} \,,\, u_h \rangle ,$$

ove $\lambda_{\rho'\xi'(h)}$ indica la λ che opera sugli elementi $\rho' \, \xi' \, (h)$, il che non è altro che $\rho' \circ \xi' \circ \lambda \, (h)$, e la (4) è dimostrata.

Nel seguito, per non appesantire le notazioni, useremo lo stesso simbolo per denotare una permutazione di S_m o di S_n e la sua immagine nell'inclusione $S_m \subset S_m \times S_n \subset S_{m+n}$ o, rispettivamente $S_n \subset S_m \times S_n \subset S_{m+n}$. Apparirà chiaramente dal contesto di quale permutazione si tratta.

Proviamo ora una proposizione che, unita alla (4.1), di permette di esibire un sistema di generatori per il $(\mathbf{C}[S_m] \,,\, \mathbf{C}[S_n])$–modulo $W_{m,n}$.

4.2. PROPOSIZIONE. *Ogni permutazione* $\sigma \in S_{m+n}$ *si decompone in modo unico in un prodotto*

$$\sigma = \rho \circ \xi \circ \overline{\sigma} \tag{6}$$

ove ξ *e* ρ *sono elementi di* S_{m+n} *che operano, rispettivamente, solo sui primi* m *e sugli ultimi* n *elementi, mentre l'elemento* $\overline{\sigma}$ *di* S_{m+n} – che verrà chiamato shuffle o *smazzata* di tipo $(m \,,\, n)$ – *lascia invariato l'ordine dei primi* m *e degli ultimi* n *elementi, pur alterandone i posti.*

Dimostrazione. Siano $h_1 < h_2 < \cdots < h_m$ gli elementi di $\{1 \,,\, 2 \,,\cdots,\, m+n\}$ che hanno per immagine, tramite σ, i numeri da 1 a m e, analogamente, $k_{m+1} < k_{m+2} < \cdots < k_{m+n}$ quelli che hanno per immagine, in σ, i numeri da $m+1$ ad n. Definite, per $i = 1 \,,\cdots,\, m$ e $j = 1 \,,\cdots,\, n$ le $\overline{\sigma} \,,\, \xi \,,\, \rho$, mediante le

$$\overline{\sigma}\,(h_i) = i \,, \qquad \overline{\sigma}\,(k_{m+j}) = m + j \,, \tag{7}$$

$$\xi\,(i) = \sigma\,(h_i) \,, \qquad \xi\,(m+j) = m + j \,, \tag{8}$$

$$\rho\,(i) = i \,, \qquad \rho\,(m+j) = \sigma\,(k_{m+j}) \,, \tag{9}$$

risulta, come è facile verificare, $\sigma = \rho \circ \xi \circ \overline{\sigma}$.

Dalle proposizioni (4.1) e (4.2) e dal primo teorema fondamentale per il gruppo lineare (cfr. H. Weyl [3], p. 45) segue:

4.3. PROPOSIZIONE. *Le contrazioni* $\mu_{\sigma}^{m,n} \in W_{m,n}$ *associate alle smazzate* $\overline{\sigma} \in S_{m+n}$ *costituiscono un sistema di generatori per il* $(\mathbf{C}[S_m], \mathbf{C}[S_n])$*-modulo* $\mathbf{C}[S_m] W_{m,n} \mathbf{C}[S_n]$.

Si noti che l'ipotesi che il campo base sia quello complesso, posta solo per poter rinviare ai teoremi classici della teoria degli invarianti, è inessenziale. Infatti, tenendo conto di [1], tutti i risultati e tutte le dimostrazioni esposte nel presente lavoro restano validi nell'ipotesi che il campo sia arbitrario e di caratteristica qualsiasi.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. DE CONCINI e C. PROCESI - *A characteristic free approach to invariant theory* (in corso di stampa su «Advances in Mathematics»).

[2] C. PROCESI (1976) - *The invariant theory of* $n \times n$ *matrices*, «Advances in Math.», *19* (3).

[3] H. WEYL (1946) - *The classical groups*, Princeton Univ. Press.