Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Dantoni

Sul prodotto di due omomorfismi forti fra sistemi algebrici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.6, p. 545–552.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_6_545_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 dicembre 1976

Presiede il Presidente della Classe BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Sul prodotto di due omomorfismi forti fra sistemi algebrici.* Nota di GIOVANNI DANTONI, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — One considers two strong homomorphisms, φ and ψ. In Sec. 3 one finds a necessary and sufficient condition for the product $\varphi\psi$ to be a strong homomorphism. One also proves the following result: if φ is surjective or ψ is an isomorphism, then $\varphi\psi$ is a strong homomorphism.

In Sec. 4 it is proved that any homomorphism can be split into the product of an isomorphism and a surjective strong homomorphism except for a particular case which is then determined.

1. Ricordiamo alcune nozioni ben note [1] per precisare in quale senso le adopereremo in certi casi particolari (relazione nullaria, relazione n–aria vuota, omomorfismo forte, ecc.).

Sia A un insieme non vuoto e sia n un intero ≥ 0.

Se è $n \geq 1$ si indica con A^n l'insieme delle n–uple ordinate $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ di elementi di A $(a_i \in A)$. Se è $n = 0$ si pone $A^0 = \{\varnothing\}$.

Si chiama operazione n–aria definita su A una applicazione

$$\omega : A^n \to A \tag{1}$$

di A^n in A. L'intero n si chiama la arità della operazione ω. L'elemento di A che corrisponde alla n–upla $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A^n$ mediante la ω si indica con $a_1 a_2 \cdots a_n \omega$, od anche con $\omega(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e si chiama il valore dell'operazione ω nel punto $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Se è $n = 0$ si ha $A^0 = \{\varnothing\}$ e la (1) diventa $\omega : \{\varnothing\} \to A$, quindi definire su A una operazione nullaria ω vuol dire scegliere un elemento a di A e porre $\omega(\varnothing) = a$. Questo elemento a si chiama l'elemento di A che corrisponde (o che è associato) all'operazione nullaria ω e si indica con lo stesso simbolo ω dell'operazione nullaria, cioè si pone $\omega = a$.

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1976.

(1) A. I. MAL'CEV (1973) – *Algebraic Systems*, Springer, Berlin. R. S. PIERCE (1968) – *Introduction to the Theory of Abstract Algebras*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Si chiama relazione n–aria definita su A un qualunque sottoinsieme ρ di A^n

(2) $$\rho \subseteq A^n.$$

Se è $n = 0$ allora la (2) diventa $\rho \subseteq \{\varnothing\}$ e quindi le relazioni nullarie definite su A sono: $\rho = \varnothing$ e $\rho = \{\varnothing\}$.

Per ogni intero $n \geq 0$ fra le relazioni n–arie definite su A c'è la relazione vuota: $\rho = \varnothing \subseteq A^n$.

Si chiama sistema algebrico, o semplicemente sistema, un insieme non vuoto A con un insieme di operazioni definite su di esso e un insieme di relazioni, ciascuna con la sua arità, definite pure su di esso. L'insieme A si chiama il sostegno del sistema.

Fissiamo un insieme
$$\Omega_\omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$$
di simboli ω_i a ciascuno dei quali è associato un intero $n_i \geq 0$ che chiamiamo la arità di ω_i.
Fissiamo un altro insieme
$$\Omega_\rho = \{\rho_j \mid j \in J\}$$
di simboli ρ_j a ciascuno dei quali è associato un intero $m_j \geq 0$ che chiamiamo la arità di ρ_j. Supponiamo che sia $\Omega_\omega \cap \Omega_\rho = \varnothing$ e poniamo $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$.

Consideriamo un insieme A non vuoto. Ad ogni simbolo ω_i facciamo corrispondere una operazione definita su A e avente la stessa arità n_i di ω_i. Ad ogni simbolo ρ_j facciamo corrispondere una relazione definita su A e avente la stessa arità m_j di ρ_j. Otteniamo così un insieme $(\Omega_\omega)_A$ di operazioni definite su A e un insieme $(\Omega_\rho)_A$ di relazioni, ciascuna con la sua arità, definite pure su A. La terna $\mathscr{A} = \langle A , (\Omega_\omega)_A , (\Omega_\rho)_A \rangle$ si dice che è un sistema algebrico di tipo $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$ e sostegno A.

La totalità dei sistemi algebrici che si ottengono nel modo suddetto, tenendo fissi Ω_ω e Ω_ρ e facendo variare in tutti i modi possibili l'insieme A, le operazioni che corrispondono ai simboli ω_i e le relazioni che corrispondono ai simboli ρ_j, si chiama la classe dei sistemi algebrici di tipo $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$.

Nel seguito un sistema algebrico di tipo $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$ e sostegno A sarà indicato con $\mathscr{A} = \langle A , \Omega_\omega , \Omega_\rho \rangle$ od anche semplicemente con $\mathscr{A}$. L'operazione che corrisponde al simbolo ω_i in $\mathscr{A}$ sarà indicata con $(\omega_i)_\mathscr{A}$ e la relazione che corrisponde al simbolo ρ_j in $\mathscr{A}$ sarà indicata con $(\rho_j)_\mathscr{A}$.

2. Siano $\mathscr{A} = \langle A , \Omega_\omega , \Omega_\rho \rangle$ e $\mathscr{B} = \langle B , \Omega_\omega , \Omega_\rho \rangle$ sistemi algebrici di tipo $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$. Sia $\varphi : A \to B$ un'applicazione di A in B. Indichiamo con $A\varphi$ l'immagine di A in B mediante la $\varphi : A\varphi = \{a\varphi \mid a \in A\}$.

Indichiamo con $(\rho_j)_\mathscr{A}\, \varphi$ la relazione di arità m_j definita su B nel modo seguente:

- Se è $(\rho_j)_\mathscr{A} \neq \varnothing$ ed $m_j \neq 0$, allora poniamo:
$$(\rho_j)_\mathscr{A}\, \varphi = \{(a_1 \varphi , a_2 \varphi , \cdots , a_{m_j} \varphi) \mid (a_1 , a_2 , \cdots , a_{m_j}) \in (\rho_j)_\mathscr{A}\}.$$
- Se è $(\rho_j)_\mathscr{A} = \varnothing$ ed $m_j \geq 0$, allora poniamo: $\varnothing\varphi = \varnothing$.
- Se è $(\rho_j)_\mathscr{A} \neq \varnothing$ ed $m_j = 0$, allora poniamo: $\{\varnothing\}\, \varphi = \{\varnothing\}$.

Premesso ciò poniamo le seguenti definizioni [2]:

a) Isomorfismo di $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ è un'applicazione biunivoca $\varphi : A \to B$ di A in B tale che:

1) $(a_1 a_2 \cdots a_{n_i} (\omega_i)_\mathscr{A})\, \varphi = (a_1 \varphi)(a_2 \varphi) \cdots (a_{n_i} \varphi)\, (\omega_i)_\mathscr{B}$,

per ogni $i \in I$ tale che $n_i \geq 1$ e per ogni $a_1 , a_2 , \cdots , a_{n_i} \in A$;
$(\omega_i)_\mathscr{A}\, \varphi = (\omega_i)_\mathscr{B}$, per ogni $i \in I$ tale che $n_i = 0$.

(2) Una formulazione delle definizioni di vari tipi di omomorfismo analoga a questa, ma per il caso più generale delle corrispondenze omomorfe, trovasi in G. DANTONI, *Sui riferimenti rispetto ai quali una data corrispondenza fra sistemi relazionali è omomorfa*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *57* (1974), 491–501.

2) $(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,\varphi = (\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j}$, per ogni $j \in J$.

b) Omomorfismo di $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ è un'applicazione $\varphi : A \to B$ di A in B tale che vale la 1) e la

3) $(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,\varphi \subseteq (\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j}$, per ogni $j \in J$.

c) Omomorfismo forte di $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ è un'applicazione $\varphi : A \to B$ di A in B tale che vale la 1) e la

4) $(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,\varphi = (\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j}$, per ogni $j \in J$.

Nel seguito un omomorfismo φ di $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ sarà indicato con $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.
Osserviamo che

Un'applicazione $\varphi : A \to B$ *è un isomorfismo di* $\mathscr{A}$ *in* $\mathscr{B}$ *se e solo se è un omomorfismo forte e biunivoco di* $\mathscr{A}$ *in* $\mathscr{B}$.

È noto che se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono algebre (cioè se è $\Omega_\rho = \varnothing$), allora ogni omomorfismo di $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ è forte, e ogni omomorfismo biunivoco di $\mathscr{A}$ in $\mathscr{B}$ è un isomorfismo. Se invece $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ non sono algebre ma sistemi algebrici, allora, in generale, non è vera nè la prima nè la seconda delle dette proprietà.

3. Il prodotto di due omomorfismi fra sistemi algebrici è un omomorfismo [3], ma il prodotto di due omomorfismi forti in generale non è un omomorfismo forte.

Siano $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ sistemi algebrici di tipo $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$.

a) *Il prodotto di un omomorfismo forte* $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *per un omomorfismo forte* $\psi : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ *è un omomorfismo forte se e solo se si ha*

$$[(\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j}]\,\psi = (\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi \cap (A\varphi)^{m_j}\,\psi, \qquad \textit{per ogni} \quad j \in J. \tag{3}$$

Infatti, per ogni $j \in J$ si ha

$$(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,\varphi = (\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j} \tag{4}$$

$$(\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi = (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (B\psi)^{m_j} \tag{5}$$

perché φ e ψ sono omomorfismi forti. Inoltre da $A\varphi \subseteq B$ segue $(A\varphi)\,\psi \subseteq B\psi$, quindi $[(A\varphi)\,\psi]^{m_j} \subseteq (B\psi)^{m_j}$, quindi $[A\,(\varphi\psi)]^{m_j} = [(A\varphi)\,\psi]^{m_j} = (B\psi)^{m_j} \cap [(A\varphi)\,\psi]^{m_j}$. E poiché $[(A\varphi)\,\psi]^{m_j} = (A\varphi)^{m_j}\,\psi$ si ha

$$[A\,(\varphi\psi)]^{m_j} = (B\psi)^{m_j} \cap (A\varphi)^{m_j}\,\psi\,. \tag{6}$$

Dalle (4), (5) e (6) segue

$$(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,(\varphi\psi) = [(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,\varphi]\,\psi = [(\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j}]\,\psi$$

$$(\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap [A\,(\varphi\psi)]^{m_j} = (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (B\psi)^{m_j} \cap (A\varphi)^{m_j}\,\psi = (\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi \cap (A\varphi)^{m_j}\,\psi\,.$$

Pertanto si ha

$$(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,(\varphi\psi) = (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap [A\,(\varphi\psi)]^{m_j}$$

se e solo se vale la (3).

(3) A. I. MAL'CEV, *loc. cit.*, p. 35.

b) Il prodotto di un omomorfismo forte suriettivo per un omomorfismo forte qualunque è un omomorfismo forte.

Infatti, se è $A\varphi = B$ allora si ha

$$[(\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j}]\,\psi = [(\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap B^{m_j}]\,\psi = (\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi$$

$$(\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi \cap (A\varphi)^{m_j}\,\psi = (\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi \cap B^{m_j}\,\psi = (\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi$$

e quindi vale la (3).

c) Il prodotto di un omomorfismo forte per un isomorfismo è un omomorfismo forte.

Dobbiamo dimostrare che se $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ è un omomorfismo forte e $\psi : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ è un isomorfismo allora si ha:

$$(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,(\varphi\psi) = (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\,(\varphi\psi))^{m_j}\,, \quad \text{per ogni } j \in J\,. \tag{7}$$

Infatti, sappiamo che $\varphi\psi$ è un omomorfismo e quindi si ha

$$(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,(\varphi\psi) \subseteq (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\,(\varphi\psi))^{m_j}\,, \qquad \text{per ogni } j \in J\,. \tag{8}$$

Se è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} = \varnothing$ allora la (7) segue subito dalla (8). Se è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} \neq \varnothing$ ed $m_j = 0$, allora è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} = \{\varnothing\}$ e quindi, essendo $\psi : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ isomorfismo, si ha anche $(\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi = (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (B\psi)^{m_j} = \{\varnothing\}$, e quindi $(\rho_j)_{\mathscr{B}} = \{\varnothing\}$. Da questa, essendo $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ omomorfismo forte, segue $(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,\varphi = (\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j} = \{\varnothing\}$, e quindi $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = \{\varnothing\}$; pertanto si ha $(\rho_j)_{\mathscr{A}}\,(\varphi\psi) = \{\varnothing\}$ e $(\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\,(\varphi\psi))^{m_j} = \{\varnothing\}$, e quindi anche in questo caso vale la (7).

Supponiamo ora che sia $(\rho_j)_{\mathscr{C}} \neq \varnothing$ ed $m_j \geq 1$, e dimostriamo che si ha

$$(\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\,(\varphi\psi))^{m_j} \subseteq (\rho_j)_{\mathscr{A}}\,(\varphi\psi)\,. \tag{9}$$

Infatti, sia

$$(c_1\,, c_2\,, \cdots, c_{m_j}) \in (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\,(\varphi\psi))^{m_j}\,. \tag{10}$$

Da $A\varphi \subseteq B$ segue $A\,(\varphi\psi) = (A\varphi)\,\psi \subseteq B\psi$ e quindi $(A\,(\varphi\psi))^{m_j} \subseteq (B\psi)^{m_j}$, e quindi

$$(\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\,(\varphi\psi))^{m_j} \subseteq (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (B\psi)^{m_j}\,.$$

E poiché è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (B\psi)^{m_j} = (\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi$ perché ψ è un isomorfismo, si ha che dalla (10) segue $(c_1\,, c_2\,, \cdots, c_{m_j}) \in (\rho_j)_{\mathscr{B}}\,\psi$ e quindi, sempre perché ψ è un isomorfismo, si ha

$$(c_1\,\psi^{-1}\,, c_2\,\psi^{-1}\,, \cdots, c_{m_j}\,\psi^{-1}) \in (\rho_j)_{\mathscr{B}}\,.$$

Ma da $c_r \in (A\varphi)\,\psi$ $(r = 1\,, 2\,, \cdots, m_j)$ segue $c_r\,\psi^{-1} \in A\varphi$, quindi si ha anche

$$(c_1\,\psi^{-1}, c_2\,\psi^{-1}\,, \cdots, c_{m_j}\,\psi^{-1}) \in (A\varphi)^{m_j}$$

e quindi si ha

$$(c_1\,\psi^{-1}\,, c_2\,\psi^{-1}\,, \cdots, c_{m_j}\,\psi^{-1}) \in (\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j}\,.$$

Ma è $(\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (A\varphi)^{m_j} = (\rho_j)_{\mathscr{A}}\, \varphi$ perché φ è un omomorfismo forte, quindi si ha

$$(c_1\, \psi^{-1}, c_2\, \psi^{-1}, \cdots, c_{m_j}\, \psi^{-1}) \in (\rho_j)_{\mathscr{A}}\, \varphi\,.$$

Da questa, essendo φ omomorfismo forte, segue che esistono $a_1, a_2, \cdots$ $\cdots, a_{m_j} \in A$ tali che $a_r\, \varphi = c_r\, \psi^{-1}\, (r = 1, 2, \cdots, m_j)$, ed inoltre $(a_1, a_2, \cdots$ $\cdots, a_{m_j}) \in (\rho_j)_{\mathscr{A}}$. Pertanto dalla (10) segue

$$(c_1, c_2, \cdots, c_{m_j}) = (a_1, a_2, \cdots, a_{m_j})\, (\varphi\psi) \in (\rho_j)_{\mathscr{A}}\, (\varphi\psi)$$

e quindi vale la (9). Dalle (8) e (9) segue la (7).

d) Dalla proprietà *b*) (o dalla *c*)), tenendo presente che ogni omomorfismo forte è il prodotto di un omomorfismo forte suriettivo per un isomorfismo [4], segue che

Gli omomorfismi che si possono decomporre nel prodotto di un omomorfismo forte suriettivo per un isomorfismo sono tutti e soli gli omomorfismi forti.

4. Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA. *Siano* $\mathscr{A} = \langle A, \Omega_\omega, \Omega_\rho \rangle$ *e* $\mathscr{B} = \langle B, \Omega_\omega, \Omega_\rho \rangle$ *sistemi algebrici di tipo* $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un omomorfismo $\varphi : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ *si possa decomporre nel prodotto di un isomorfismo per un omomorfismo forte suriettivo è che per ogni* $j \in J$ *tale che* $m_j = 0$ *e* $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = \varnothing$ *sia anche* $(\rho_j)_{\mathscr{B}} = \varnothing$.

La condizione è necessaria. Infatti, supponiamo che $\varphi : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ si possa decomporre nel prodotto di un isomorfismo $\varepsilon : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}$ per un omomorfismo forte suriettivo $\psi : \mathscr{C} \rightarrow \mathscr{B}$. Sia $j \in J$ tale che $m_j = 0$ e $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = \varnothing$. Si ha $(\rho_j)_{\mathscr{A}}\, \varepsilon =$ $= (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\varepsilon)^{m_j}$, cioè $\varnothing = (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap \{\varnothing\}$, quindi $(\rho_j)_{\mathscr{C}}$ non può essere $\{\varnothing\}$, quindi è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} = \varnothing$. Ma si ha anche $(\rho_j)_{\mathscr{C}}\, \psi = (\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap (C\psi)^{m_j}$, quindi $\varnothing = (\rho_j)_{\mathscr{B}} \cap \{\varnothing\}$, quindi $(\rho_j)_{\mathscr{B}}$ non può essere $\{\varnothing\}$, quindi è $(\rho_j)_{\mathscr{B}} = \varnothing$.

La condizione è sufficiente. Infatti, consideriamo il sistema $\mathscr{C} = \langle C, \Omega_\omega, \Omega_\rho \rangle$ di tipo $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$, definito nel seguente modo.

- Il sostegno di $\mathscr{C}$ è l'insieme $C = (\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B)$.
- Se è $n_i = 0$ poniamo: $(\omega_i)_{\mathscr{C}} = (1, (\omega_i)_{\mathscr{A}})$.
- Se è $n_i \geq 1$ e $c_r = (1, a_r) \in \{1\} \times A \quad (r = 1, 2, \cdots, n_i)$, poniamo:

$$c_1\, c_2 \cdots c_{n_i}\, (\omega_i)_{\mathscr{A}} = (1, a_1\, a_2 \cdots a_{n_i}\, (\omega_i)_{\mathscr{A}}).$$

- Se è $n_i \geq 1$ e almeno uno dei $c_1, c_2, \cdots, c_{n_i}$ sta in $\{2\} \times B$, poniamo:

$$c_1\, c_2 \cdots c_{n_i}\, (\omega_i)_{\mathscr{C}} = (2, b_1\, b_2 \cdots b_{n_i}\, (\omega_i)_{\mathscr{B}})$$

dove b_r è il secondo elemento di c_r se $c_r \in \{2\} \times B$, mentre $b_r = a_r\, \varphi$ se è $c_r = (1, a_r) \in \{1\} \times A$.

(4) A. I. MAL'CEV, *loc. cit.*, pp. 45-46.

Indichiamo con $\varepsilon_1 : A \to C$ ed $\varepsilon_2 : B \to C$ le applicazioni di A in C e di B in C definite da

$$a\varepsilon_1 = (1, a), b\varepsilon_2 = (2, b), \quad \text{per ogni} \quad a \in A, b \in B.$$

Poniamo

$$(\rho_j)_{\mathscr{C}} = (\rho_j)_{\mathscr{A}} \varepsilon_1 \cup (\rho_j)_{\mathscr{B}} \varepsilon_2, \quad \text{per ogni} \quad j \in J. \tag{11}$$

Con ciò risulta definito il sistema algebrico $\mathscr{C}$.

Indichiamo infine con $\psi : C \to B$ l'applicazione di C in B definita da

$$(1, a) \psi = a\varphi, (2, b) \psi = b, \quad \text{per ogni} \quad a \in A, b \in B.$$

a) Si ha $\varphi = \varepsilon_1 \psi$ perché, per ogni $a \in A$, è $a(\varepsilon_1 \psi) = (a\varepsilon_1) \psi = (1, a) \psi = a\varphi$.

b) L'applicazione $\varepsilon_1 : A \to C$ è un isomorfismo di $\mathscr{A}$ in $\mathscr{C}$.

Infatti, la ε_1 è biunivoca. Inoltre, per $n_i = 0$ si ha

$$(\omega_i)_{\mathscr{A}} \varepsilon_1 = (1, (\omega_i)_{\mathscr{A}}) = (\omega_i)_{\mathscr{C}}.$$

Per $n_i \geq 1$ ed $a_1, a_2, \cdots, a_{n_i} \in A$ si ha

$$(a_1 a_2 \cdots a_{n_i} (\omega_i)_{\mathscr{A}}) \varepsilon_1 = (1, a_1 a_2 \cdots a_{n_i} (\omega_i)_{\mathscr{A}}) =$$
$$= (1, a_1)(1, a_2) \cdots (1, a_{n_i}) (\omega_i)_{\mathscr{C}} = (a_1 \varepsilon_1)(a_2 \varepsilon_1) \cdots (a_{n_i} \varepsilon_1) (\omega_i)_{\mathscr{C}}.$$

Verifichiamo infine che, per ogni $j \in J$ si ha

$$(\rho_j)_{\mathscr{A}} \varepsilon_1 = (\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\varepsilon_1)^{m_j}. \tag{12}$$

Infatti, non può essere $(\rho_j)_{\mathscr{A}} \neq \varnothing$ e $(\rho_j)_{\mathscr{B}} = \varnothing$ perché dall'esistenza dell'omomorfismo $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ segue $(\rho_j)_{\mathscr{A}} \varphi \subseteq (\rho_j)_{\mathscr{B}}$. Non può essere $m_j = 0$, $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = \varnothing$, $(\rho_j)_{\mathscr{B}} = \{\varnothing\}$, per l'ipotesi del teorema. Se è $m_j \geq 0$ e $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = (\rho_j)_{\mathscr{B}} = \varnothing$, allora la (12) segue subito dalla (11). Anche nel caso $m_j = 0$ e $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = (\rho_j)_{\mathscr{B}} = \{\varnothing\}$ la (12) segue subito dalla (11).

Se è $m_j \geq 1$, $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = \varnothing$ e $(\rho_j)_{\mathscr{B}} \neq \varnothing$, allora per la (11) è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} = (\rho_j)_{\mathscr{B}} \varepsilon_2$, quindi è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\varepsilon_1)^{m_j} = \varnothing$, quindi vale la (12). Infine, se è $m_j \geq 1$, $(\rho_j)_{\mathscr{A}} \neq \varnothing$ e $(\rho_j)_{\mathscr{B}} \neq \varnothing$, allora per la (11) è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} \cap (A\varepsilon_1)^{m_j} = (\rho_j)_{\mathscr{A}} \varepsilon_1$ che è la (12).

c) L'applicazione $\psi : C \to B$ è un omomorfismo forte di $\mathscr{C}$ su tutto $\mathscr{B}$.

Infatti, la ψ è su tutto B. Inoltre, per $n_i = 0$ si ha

$$(\omega_i)_{\mathscr{C}} \psi = (1, (\omega_i)_{\mathscr{A}}) \psi = (\omega_i)_{\mathscr{A}} \varphi = (\omega_i)_{\mathscr{B}}.$$

Per $n_i \geq 1$ e $c_1, c_2, \cdots, c_{n_i} \in C$ con $c_r = (1, a_r) \in \{1\} \times A$ $(r = 1, 2, \cdots, n_i)$, si ha:

$$(c_1 c_2 \cdots c_{n_i} (\omega_j)_{\mathscr{C}}) \psi = (1 , a_1 a_2 \cdots a_{n_i} (\omega_i)_{\mathscr{A}}) \psi = (a_1 a_2 \cdots a_{n_i} (\omega_i)_{\mathscr{A}}) \varphi =$$
$$= (a_1 \varphi) (a_2 \varphi) \cdots (a_{n_i} \varphi) (\omega_i)_{\mathscr{B}} =$$
$$= [(1 , a_1) \psi] [(1 , a_2) \psi] \cdots [(1 , a_{n_i}) \psi] (\omega_i)_{\mathscr{B}} = (c_1 \psi) (c_2 \psi) \cdots (c_{n_i} \psi) (\omega_i)_{\mathscr{B}} .$$

Infine sia $n_i \geq 1$ e almeno uno dei $c_1 , c_2 , \cdots, c_{n_i}$ sia elemento di $\{2\} \times B$. In questo caso si ha:

$$(c_1 c_2 \cdots c_{n_i} (\omega_i)_{\mathscr{C}}) \psi = (2 , b_1 b_2 \cdots b_{n_i} (\omega_i)_{\mathscr{B}}) \psi = \tag{13}$$
$$= b_1 b_2 \cdots b_{n_i} (\omega_i)_{\mathscr{B}} ,$$

dove, se è $c_r = (2 , b_r) \in \{2\} \times B$, allora b_r è il secondo elemento di c_r e si ha quindi $c_r \psi = (2 , b_r) \psi = b_r$; se è $c_r = (1 , a_r) \in \{1\} \times A$, allora è $b_r = a_r \varphi$ e si ha quindi $c_r \psi = (1 , a_r) \psi = a_r \varphi = b_r$. In entrambi i casi si ha $c_r \psi = b_r$, e quindi dalla (13) segue

$$(c_1 c_2 \cdots c_{n_i} (\omega_i)_{\mathscr{C}}) \psi = (c_1 \psi) (c_2 \psi) \cdots (c_{n_i} \psi) (\omega_i)_{\mathscr{B}} .$$

Ci resta da verificare che è

$$(\rho_j)_{\mathscr{C}} \psi = (\rho_j)_{\mathscr{B}} . \tag{14}$$

Infatti si ha:

$$(\rho_j)_{\mathscr{C}} \psi = [(\rho_j)_{\mathscr{A}} \varepsilon_1 \cup (\rho_j)_{\mathscr{B}} \varepsilon_2] \psi \tag{15}$$

$$(\rho_j)_{\mathscr{B}} \varphi \subseteq (\rho_j)_{\mathscr{B}} , \quad \text{perché} \quad \varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B} \text{ è un omomorfismo.} \tag{16}$$

Se è $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = \varnothing$ allora è anche $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = \varnothing$ per la (16), e quindi per la (15) è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} \psi = \varnothing$, e quindi vale la (14). Se è $(\rho_j)_{\mathscr{B}} \neq \varnothing$ ed $m_j = 0$, allora è $(\rho_j)_{\mathscr{B}} = \{\varnothing\}$, quindi, per l'ipotesi del teorema, è anche $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = \{\varnothing\}$, quindi per la (15) è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} \psi = \{\varnothing\}$, quindi vale la (14). Se $(\rho_j)_{\mathscr{B}} \neq \varnothing$, $m_j \geq 1$ e $(\rho_j)_{\mathscr{A}} = \varnothing$, allora per la (15) è $(\rho_j)_{\mathscr{C}} \psi = [(\rho_j)_{\mathscr{B}} \varepsilon_2] \psi = (\rho_j)_{\mathscr{B}}$, e quindi vale la (14).

Infine, se è $(\rho_j)_{\mathscr{B}} \neq \varnothing$, $m_j \geq 1$ e $(\rho_j)_{\mathscr{A}} \neq \varnothing$, allora si ha

$$[(\rho_j)_{\mathscr{A}} \varepsilon_1] \psi = (\rho_j)_{\mathscr{A}} \varphi \quad , \quad [(\rho_j)_{\mathscr{B}} \varepsilon_2] \psi = (\rho_j)_{\mathscr{B}} \tag{17}$$

e dalle (15), (17) e (16) segue

$$(\rho_j)_{\mathscr{C}} \psi = [(\rho_j)_{\mathscr{A}} \varepsilon_1 \cup (\rho_j)_{\mathscr{B}} \varepsilon_2] \psi = [(\rho_j)_{\mathscr{A}} \varepsilon_1] \psi \cup [(\rho_j)_{\mathscr{B}} \varepsilon_2] \psi =$$
$$= (\rho_j)_{\mathscr{A}} \varphi \cup (\rho_j)_{\mathscr{B}} = (\rho_j)_{\mathscr{B}}$$

e quindi anche in questo caso vale la (14).

Dal teorema dimostrato segue subito il seguente

COROLLARIO. *Se in* Ω_ρ *non ci sono simboli di relazioni nullarie, cioè se è* $m_j \geq 1$ *per ogni* $j \in J$, *allora ogni omomorfismo fra sistemi algebrici di tipo* $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$ *si può decomporre nel prodotto di un isomorfismo per un omomorfismo forte suriettivo.*

OSSERVAZIONE. Se nella definizione di classe dei sistemi algebrici di tipo $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$ si mette la condizione che ad ogni simbolo di relazione nullaria ρ_j $(m_j = 0)$ deve corrispondere sempre la stessa relazione, $\varnothing$ oppure $\{\varnothing\}$, in tutti i sistemi della classe, allora si ha che ogni omomorfismo fra sistemi algebrici di tipo $\Omega = \Omega_\omega \cup \Omega_\rho$ si può decomporre nel prodotto di un isomorfismo per un omomorfismo forte suriettivo.