Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Costache Apreutesel

Algèbres $HC(;), HP(;)$ et obstructions à l'intègrabilité

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.1, p. 17–25.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_1_17_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Geometria differenziale. — *Algèbres* HC (;) , HP (;) *et obstructions à l'intégrabilité.* Nota di COSTACHE APREUTESEI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Viene studiato l'annullarsi di alcune classi caratteristiche, nella coomologia di de Rham, associate ad una coppia di sottofibrati vettoriali integrabili sopra una varietà differenziabile (reale od analitica complessa).

On définit l'algèbre quotient de cohomologie $\mathscr{H}$ (K) d'un sous-fibré (distribution [1], [2]) K du fibré tangent à une variété différentiable V_n. Pour chaque fibré vectoriel E sur V_n l'algèbre $\mathscr{H}$ (K) possède une sous-algèbre HC (E ; K) dans le cas complexe et HP (E ; K) pour le cas réel. On obtient des théorèmes de nullité ([3], [4]) pour les algèbres HC (V/K ; K) , HP (V/K ; K), Chern (V/K) et Pont (V/K), en utilisant la platitude d'une connexion presque-basique le long des feuilles de K quand V et K sont intégrables et $K \subset V$. On note que la Remarque 3.1 met en évidence l'importance de l'algèbre HP (V/K ; K). Les G_T-structures [1] sont examinées de ce point de vue. (Pour les notations voir plus loin). En ce qui concerne les classes charactéristiques consulter [4], [5], [6].

A. CAS COMPLEXE

1. Soit V_n une variété analytique complexe (paracompacte) ayant $\dim_C V_n = n \geq 3$, $T_R V_n$ le fibré tangent réel C^∞ de V_n et $T^c V_n = T_R V_n \underset{R}{\otimes} C$. Alors $T^c V_n = T^c \oplus \bar{T}^c$ où T^c, $\bar{T}^c$ sont le fibré tangent, holomorphe et antiholomorphe respectivement, de V_n. D'ici nous avons la décomposition $T^{*c} V_n = T^{*c} + \bar{T}^{*c}$ (les sections C^∞ des fibrés vectoriels T^{*c}, $\bar{T}^{*c}$ sont les 1-formes différentielles de type (1 , 0) et (0 , 1), respectivement).

Considérons un sous-fibré vectoriel complexe C^∞, K, de T^c ayant la fibre de dimension complexe q. Nous notons par $C^\infty(\cdot)$ le foncteur qui associe à chaque fibré vectoriel l'espace de ses sections de classe C^∞; soit $(U_a , a \in J)$ un recouvrement de la variété V_n par les voisinages de trivialisation locale de K. Soient ensuite $\Lambda(V_n)$, $\Lambda(U_a)$ les algébres des formes différentialles définies sur V_n et U_a respectivement, à valeurs complexes et de classe C^∞. Nous noterons par $I_a(K)$ l'idéal dans l'algèbre $\Lambda(U_a)$, engendré par les 1-formes (sections) de $C^\infty(T^{*c}/U_a)$ qui s'annulent sur $C^\infty(K/U_a)$. On met

$$Z^s(K) = \{\omega \in \Lambda^s(V_n)/d\omega = 0 \ , \ \omega/U_a \in I_a(K) \ , \forall a \in J\}$$

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1977.

et

(1) $$H^s(K) = \{[\omega] \in H^s(V_n\,;C)/\omega \in Z^s(K)\}$$

où d note l'opérateur de différentiation estérieure et $H(V_n\,;C) = \bigoplus_s H^s(V_n\,;C)$ est l'algèbre de de Rham de la variété V_n. L'ensemble $H(K) = \bigoplus_s H^s(K)$ possède une structure d'idéal dans l'algèbre $H(V_n\,;C)$. Nous pouvons considérer maintenant l'algèbre

(2) $$\mathscr{H}(K) = H(V_n\,;C)/H(K)\,.$$

On a

$$H(K) \cap H^s(V_n\,;C) = H^s(K) \quad , \quad \mathscr{H}^s(K) = H^s(V_n\,;C)/H^s(K)$$

et donc

$$\mathscr{H}(K) = \bigoplus_s \mathscr{H}^s(K)\,.$$

Avec cette notation a lieu le

LEMME 1.1. *On peut associer à chaque sous-fibré vectoriel complexe* C^∞, K *de* T^c, *l'algèbre* $\mathscr{H}(K)$ *pour qui on a*

$$\mathscr{H}(K) = \bigoplus_{s=0}^{q} \mathscr{H}^s(K)\,.$$

DÉFINITION 1.1. L'algèbre $\mathscr{H}(K)$ s'appelle l'algèbre quotient de cohomologie du sous-fibré vectoriel K.

On note que les algèbres H(K) et $\mathscr{H}$(K) dépendent de V_n et K, mais nous utilisons cette terminologie et notation pour la simplicité.

Soit φ une fonction polynomiale à coefficients complexes de n variables $X_1, \cdots, X_n$, symétrique et homogène de degré h. Si E est un fibré vectoriel complexe C^∞ sur V_n et Ω la courbure d'une connexion sur E alors la φ–classe de Chern de E donnée par l'égalité

$$\varphi(E) = (\sqrt{-1}/2\pi)^h\,[\varphi(\Omega)]$$

est un élément de $H^{2h}(V_n\,;C)$. La classe $\varphi(E)$ définit l'élément $(\varphi(E)) \in \mathscr{H}(K)$. Considérons l'ensemble

(3) $$HC(E\,;K) = \{(\varphi(E)) \in \mathscr{H}(K)/\varphi \in C[X_1, \cdots, X_n],\ \varphi \text{ symétrique et homogène}\}.$$

HC(E ; K) est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathscr{H}$(K). Si nous prenons

$$HC^s(E\,;K) = HC(E\,;K) \cap \mathscr{H}^s(K)$$

on a le

LEMME 1.2. *Soit donné un sous-fibré vectoriel complexe* C^∞, K *de* T^c. *Alors on peut associer à chaque fibré vectoriel complexe* C^∞ E *sur* V_n, *l'algèbre*

$$HC(E\,;K) = \bigoplus_{s=0}^{q} HC^s(E\,;K)\,.$$

2. Notons par V un sous–fibré vectoriel complexe de T^c pour qui on a $K \subset V$. Nous supposons que $V, K, V/K$ sont des fibrés vectoriels holomorphes et V, K sont intégrables [4]. Le fibré V/K est holomorphe; alors les équations de Cauchy–Riemann permettent de définir un opérateur $\bar\partial : C^\infty(V/K) \to \to C^\infty(\bar T^{*c} \otimes V/K)$ (une section $\hat\tau \in C^\infty((V/K)/U_a)$ est holomorphe si et seulement si $\bar\partial\hat\tau = 0$). Puis, par l'application naturelle

$$C^\infty(\bar T^c) \times C^\infty(\bar T^{*c}) \to \Lambda^0(V_n),$$

on peut définir une application (la restriction du « produit intérieur » aux espaces $C^\infty(\bar T^c)$ et $C^\infty(\bar T^{*c})$)

$$i(Z) : C^\infty(\bar T^{*c}) \to \Lambda^0(V_n), \qquad \forall Z \in C^\infty(\bar T^c).$$

Nous définissons maintenant une nouvelle application par l'égalité

$$\overset{1}{\nabla}_Z \hat\tau = i(Z)\,\bar\partial\hat\tau, \qquad \forall \hat\tau = \pi(\tau) \in C^\infty(V/K), \tau \in C^\infty(V), Z \in C^\infty(\bar T^c) \tag{4}$$

où $\pi : V \to V/K$ note la projection canonique.

L'opérateur $\bar\partial$ satisfait à la condition

$$\bar\partial(f\hat\tau) = \rho(df) \otimes \hat\tau + f\bar\partial\hat\tau, \qquad \forall f \in \Lambda^0(V_n),$$

où $\rho : T^{*c}V_n \to \bar T^{*c}$ note la projection; alors on a la

Remarque 1.1. Pour tout $Z \in C^\infty(\bar T^c)$, $\overset{1}{\nabla}_Z$ satisfait aux conditions de la définition d'une connexion sur V/K.

La relation

$$\overset{2}{\nabla}_Y \hat\tau = \pi[Y, \tau], \qquad \forall \tau \in C^\infty(V), \hat\tau = \pi(\tau) \in C^\infty(V/K), Y \in C^\infty(K), \tag{5}$$

définit une application qui est indépendante de τ de la classe $\hat\tau$ et elle satisfait à toutes les propriétés d'une connexion sur le fibré V/K pour $Y \in C^\infty(K)$. Soit $K^\perp$ le fibré vectoriel orthogonal à K dans T^c par rapport à une métrique fixée sur V_n. Nous pouvons décomposer T^cV_n par ces espaces: $T^cV_n = K \oplus \oplus K^\perp \oplus \bar T^c$. Si $\bar\nabla$ est une connexion sur V/K alors on peut définir une nouvelle connexion pour V/K,

$\nabla : C^\infty(T^cV_n) \times C^\infty(V/K) \to C^\infty(V/K)$ par l'égalité

$$\begin{gathered}\nabla_X \hat\tau = \overset{1}{\nabla}_Z \hat\tau + \overset{2}{\nabla}_Y \hat\tau + \bar\nabla_U \hat\tau \quad , \quad \forall X = Y + Z + U \in C^\infty(T^cV_n), \\ \hat\tau = \pi(\tau) \in C^\infty(V/K), Y \in C^\infty(K), Z \in C^\infty(K^\perp), U \in C^\infty(\bar T^c).\end{gathered} \tag{6}$$

Soit $(\hat\tau_e)$ un repère holomorphe de V/K sur U_a, où $(U_a, a \in J)$ note maintenant un recouvrement de V_n avec les voisinages de trivilisation locale simultanée pour les fibrés vectoriels V, K et V/K. Considérons la matrice $\|\theta_{je}\|$ des 1–formes de connexion de ∇ rapportée au repère $(\hat\tau_e)$ $(j, e = 1, 2, \cdots, m$

où m note la dimension de la fibré de V/K). Par l'égalité (6) et $\nabla_X \hat{\tau}_e = = i(X) \left(\sum_{j=1}^{m} \theta_{ej} \otimes \hat{\tau}_e \right)$ nous obtenons les relations

$$\nabla_U \hat{\tau}_j = \sum_{e=1}^{m} \theta_{je}(U) \hat{\tau}_e = 0 \,, \qquad \forall U \in C^\infty(\overline{T}^c) \,. \tag{7}$$

Nous écrivons $\theta_{je} = \alpha_{je} + \beta_{je}$ où α_{je} sont des 1-formes du type (1, 0) et les 1-formes β_{je} ont le type (0, 1). En prenant $U = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}$ $\left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right)\right.$ note le repère naturel de $\overline{T}^c$ sur $\left.U_a\right]$, par les conditions (7) on obtient $\beta_{je} = 0$ et donc θ_{je} sont du type (1, 0); il en résulte que ∇ est une connexion de type (1, 0). Puis, pour la connexion ∇ on trouve l'égalité

$$\nabla_X \hat{\tau} = \overset{2}{\nabla}_X \hat{\tau} \,, \ \forall X \in C^\infty(K) \,, \ \hat{\tau} = \pi(\tau) \in C^\infty(V/K) \,, \ \tau \in C^\infty(V) \,. \tag{8}$$

On peut donner maintenant la

DÉFINITION 2.1. Une connexion ∇ pour V/K de type (1, 0) et qui satisfait la propriété (8) s'appelle connexion presque-basique.

Il en résulte le

LEMME 2.2. *Soient* V, K *des sous-fibrés vectoriels de* T^c *et* $K \subset V$. *Si* V, K, V/K *sont holomorphes et* V, K *sont intégrables alors il existe sur* V/K *une connexion presque-basique.*

Si (z^α) $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ sont des coordonnées analytiques complexes sur U_a, notons par $\| \overset{a}{\theta}_{je} \|$ la matrice de connexion de la connexion ∇ par rapport au repère de V/K sur U_a défini par les champs de vecteurs $\hat{\tau}'_1 = \pi\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right), \cdots, \hat{\tau}'_m = \pi\left(\frac{\partial}{\partial z^m}\right)$ où $m + q = \dim_C V$. Par les égalités (5) et (8) nous obtenons

$$\frac{\nabla \partial}{\partial z^{h'}} \hat{\tau}'_j = \pi \left[\frac{\partial}{\partial z^{h'}} \,, \frac{\partial}{\partial z^j} \right] = 0 \tag{9}$$

$(j = 1, 2, \cdots, m \,;\, h' = m+1, \cdots, m+q)$ où $\left(\frac{\partial}{\partial z^{h'}}\right)$ est un repère holomorphe de K sur U_a. Les relations (9) donnent

$$\overset{a}{\theta}_{je} \left(\frac{\partial}{\partial z^{h'}} \right) = 0 \tag{10}$$

et donc θ_{je} appartiennent à l'idèal $I_a(K)$ définit dans la section 1 et qui maintenent, peut etre éngendré par les 1-formes $dz^{\hat{K}}$ $(\hat{K} = 1, 2, \cdots, m, m+q+1, m+q+2, \cdots, n)$. Les inclusions $dI_a(K) \subseteq I_a(K)$ ont lieu; on en déduit que $\overset{a}{\Omega}_{je} \in I_a(K)$ où $\overset{a}{\Omega} = \| \overset{a}{\Omega}_{je} \|$ est la matrice des 2-formes de courbure de ∇ par rapport au repère $(\hat{\tau}'_j)$. Nous en déduisons avec les notations utilisées, le

LEMME 2.3.

$$\overset{a}{\Omega}_{je} \in \mathrm{I}_a(\mathrm{K}) \,,\ \forall a \in \mathrm{J} \,, \qquad (j\,,e = 1\,,2\,,\cdots, m)\,. \tag{11}$$

Soit φ la fonction polynomiale de la section 1 et $\tilde{\varphi}$ le polynôme qui satisfait à la condition,

$$\varphi(\overset{a}{\Omega}) = \tilde{\varphi}(\sigma_1(\overset{a}{\Omega}),\cdots,\sigma_h(\overset{a}{\Omega}))$$

où h est le degré de φ et les formes $\sigma_1(\overset{a}{\Omega})$, $\sigma_2(\overset{a}{\Omega})$, $\cdots$, $\sigma_h(\overset{a}{\Omega}))$ sont données par l'égalité [4]

$$\text{dét}\,(\mathrm{I} + t\overset{a}{\Omega}) = 1 + \sigma_1(\overset{a}{\Omega})\,t + \cdots + \sigma_m(\overset{a}{\Omega})\,t^m\,.$$

Si Ω est la courbure de ∇ alors

$$\varphi(\Omega)/\mathrm{U}_a = \varphi(\overset{a}{\Omega}) \in \mathrm{I}_a(\mathrm{K})\,, \qquad \forall a \in \mathrm{J}$$

et donc $(\varphi(\mathrm{V}/\mathrm{K})) = 0 \in \mathrm{HC}(\mathrm{V}/\mathrm{K}\,;\mathrm{K})$ où $\mathrm{HC}(\mathrm{V}/\mathrm{K}\,;\mathrm{K})$ note l'algèbre $\mathrm{HC}(\mathrm{E}\,;\mathrm{K})$ qui correspond au fibré vectoriel complexe V/K.

Il en suit le

THÉORÈME 2.4. *Soient* V_n *une variété analytique complexe,* V *et* K *des sous-fibrés vectoriels complexes de* T^c, *où* $\mathrm{K} \subset \mathrm{V}$. *Si* V , K , V/K *sont holomorphes et* V , K *sont intégrables alors*

$$\mathrm{HC}^s(\mathrm{V}/\mathrm{K}\,;\mathrm{K}) = 0\,, \qquad s \geq 1\,.$$

Prenons maintenant $\mathrm{V} \equiv \mathrm{T}^c$. Il suit que T^c/K est un fibré vectoriel holomorphe parce que K est holomorphe. En considérant l'algèbre $\mathrm{HC}(\mathrm{T}^c/\mathrm{K}\,;\mathrm{K})$, directement ou par le Theorème 2.4, on obtient la

Conséquence 1. Soient V_n une variété analytique complexe et K un sous-fibré vectoriel holomorphe de T^c. Si K est intégrable alors

$$\mathrm{HC}^s(\mathrm{T}^c/\mathrm{K}\,;\mathrm{K}) = 0\,, \qquad s \geq 1\,.$$

Nous notons par H (V) l'idéal dans l'algèbre $\mathrm{H}(\mathrm{V}_n\,;\mathrm{C})$ associé au sous-fibré vectoriel V. Il en ressort qu'il existe l'inclusion $\mathrm{H}(\mathrm{V}) \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{K})$. Il résulte de la Conséquence 1, la

Conséquence 2. Soit V un sous-fibre vectoriel holomorphe intégrable de T^c. Alors on a

$$\mathrm{HC}^s(\mathrm{T}^c/\mathrm{V}\,;\mathrm{K}) = 0\,, \qquad s \geq 1$$

pour le sous-fibré vectoriel complexe K de V.

On déduit, par la définition de l'algèbre $\mathrm{I}_a(\mathrm{K})$, que $\Lambda^s\mathrm{I}_a(\mathrm{K}) = 0$ pour $s > n - q$. Alors, si $h = \deg\varphi$ et $n - q < h \leq n$ il suit que la φ-classe de V/K est

$$\varphi(V/K) = (\sqrt{-1}/2\pi)^h [\varphi(\Omega)] = 0 .$$

D'où on peut enoncer le

THÉORÈME 2.5. *Soient* V_n *une variété analytique complexe,* $n = \dim_{\mathbf{C}} V_n$, V *et* K *des sous-fibrés vectoriels de* T^c *et* $K \subset V$. *Si* $V, K, V/K$ *sont holomorphes et* V, K *sont intégrables alors pour tout polynôme* $\varphi \in \mathbf{C}[X_1, \cdots, X_n]$, *symétrique et homogène, on a*

$$\varphi(V/K) = 0$$

où $\deg \varphi = h$, $n - q < h \leq n$ *et* q *est la dimension complexe de la fibre de* K.

Si $V \equiv T^c$, avec les notations du Théorème 2.5. nous obtenons la suivante.

Conséquence [4]. Si V_n est une variété analytique complexe et K un sous-fibré vectoriel holomorphe intégrable de T^c alors

$$\varphi(T^c/K) = 0$$

pour $n - q < h \leq n$.

B. CAS RÉEL

3. On fait les démonstrations des résultats de cette section de la manière analogue aux démonstrations des résultats des Sections 1 et 2. Dans ce qui suit la variété (paracompacte) V_n $(n \geq 3)$ et les sous-fibrés V, K du fibré TV_n tangent à V_n seront réelles et différentiables C^∞; $\Lambda(V_n)$, $\Lambda(U_a)$ notent les algèbres des formes différentiables C^∞ (à valeurs réelles) sur V_n et U_a, respectivement. L'idéal $H(K)$ est défini par l'ensemble des classes $[\omega] \in H(V_n; \mathbf{R})$ où $\omega/U_a \in I_a(K)$, $\forall a \in J$ et $I_a(K)$ note l'idéal dans l'algèbre $\Lambda(U_a)$ engendré par les 1-formes qui s'annulent sur les sections C^∞ de K/U_a.

Par la définition $\mathscr{H}(K) = H(V_n; \mathbf{R})/H(K)$ est l'algèbre quotient de cohomologie de K.

LEMME 3.1. *Pour l'algèbre quotient de cohomologie* $\mathscr{H}(K)$ *a lieu la décomposition*

$$\mathscr{H}(K) = \bigoplus_{s=0}^{q} \mathscr{H}^s(K)$$

où q *est la dimension réelle de la fibre de* K.

Notons par $\varphi(E)$ la φ-classe de Pontrjagin du fibré vectoriel réel E sur V_n [5]. Alors

$$HP(E; K) = \{(\varphi(E)) \in \mathscr{H}(K)/\varphi(E) \in \mathrm{Pont}(E)\}$$

est une sous–algèbre de l'algèbre quotient de cohomologie $\mathcal{H}(K)$. Pour cette algèbre a lieu le suivant

LEMME 3.2.

$$\mathrm{HP}(E\,;K) = \bigoplus_{s=0}^{q} \mathrm{HP}^s(E\,;K)\,,$$

où $\mathrm{HP}^s(E\,;K) = \mathrm{HP}(E\,;K) \cap \mathcal{H}^s(K)$ *sont des espaces nuls si* s *n'est pas divisible par* 4.

Une connexion ∇ sur V/K s'appelle presque–basique si

$$\nabla_X \hat{\tau} = \pi[X\,,\tau]\,,\ \forall X \in C^\infty(K)\,,\ \hat{\tau} = \pi(\tau) \in C^\infty(V/K)$$

où $\pi : V \to V/K$ est projection canonique, V , K sont sous–fibrés vectoriels intégrables de TV_n et $K \subset V$. On peut définir une connexion presque–basique [2] sur V/K par l'égalité

$$\nabla_X \hat{\tau} = \pi[Y\,,\tau] + \overline{\nabla}_Z \hat{\tau}\,,\ \forall X = Y + Z \in C^\infty(TV_n)\,,\ Y \in C^\infty(K)\,, \tag{12}$$
$$\tau \in C^\infty(V)\,,\ Z \in C^\infty(K^\perp)\,,\ \hat{\tau} = \pi(\tau) \in C^\infty(V/K)$$

où $\overline{\nabla}$ est une connexion sur V/K et $K^\perp$ note le fibré vectoriel orthogonale à K en rapport avec une métrique riemannienne sur V_n. Les 2–formes de courbure $\overset{a}{\Omega}_{je}$ $(j\,,e = 1\,,2\,,\cdots, m =$ la dimension de la fibre de $V/K)$ d'une connexion presque–basique ∇ appartiennent à l'idéal $I_a(K)$, $\forall a \in J$ [2]. Alors on a

THÉORÈME 3.3. *Soient* V , K *des sous–fibrés vectoriels différentiables* C^∞ *de* TV_n *et* $K \subset V$. *Si* V *et* K *sont intégrables alors*

$$\mathrm{HP}^s(V/K\,;K) = 0\,;\qquad s \geq 1\,.$$

Conséquence 1. Si K est un sous–fibré vectorie C^∞ intégrable de VT_n alors

$$\mathrm{HP}^s(TV_n/K\,;K) = 0\,,\qquad s \geq 1\,.$$

D'ici découle la

Conséquence 2. Si V , K sont sous–fibrés vectoriels C^∞ de TV_n et $K \subset V$ alors

$$\mathrm{HP}^s(TV_n/V\,;K) = 0\,,\qquad s \geq 1$$

pour V intégrable.

Nous pouvons considérer l'algèbre $H(K\,;V) = H(K)/H(V)$ parceque $H(V)$ est un idéal de $H(K)$; la décomposition

$$H(K\,;V) = \bigoplus_{s=0}^{n-p} H^s(K\,;V)$$

a lieu, où $n - p = \dim V$. Puis, $H(K ; V)$ est un idéal dans l'algèbre quotient de cohomologie de V, $\mathscr{H}(V)$. Nous pouvons prendre alors l'algèbre

$$\mathscr{H}(K ; V) = \mathscr{H}(V)/H(K ; V) \qquad \text{d'où}$$

$$\mathscr{H}(K ; V) = \bigoplus_{s=0}^{n-p} \mathscr{H}^s(K ; V) . \tag{13}$$

Soit

$$HP^s(V/K ; V) = \{\hat{a} = a + H^s(V)/a \in \mathrm{Pont}(V/K)\} .$$

Alors $HP^s(V/K ; K) = \bigoplus_s HP^s(V/K ; V)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{H}(V)$. On peut définir

$$\overline{HP}(V/K ; V) = \bigoplus_s \overline{HP}^s(V/K ; V) \tag{14}$$

où

$$\overline{HP}^s(V/K ; V) = \{\hat{b} = b + H^s(K ; V)/b \in HP^s(V/K ; V)\} . \tag{15}$$

Conséquence 3. Si V, K sont des sous-fibrés intégrables de TV_n et $K \subset V$ alors

$$\overline{HP}^s(V/K ; V) = 0 , \qquad s \geq 1 .$$

On peut également formuler le résultat de la Conséquence 3 pour la cas complexe.

Les relations $\Lambda^s I_a(K) = 0$, $s > n - q$, $\forall a \in J$ donnent le

THÉORÈME 3.4. *Si* V, K *sont sous-fibrés vectoriels* C^∞, *intégrables de* TV_n *et* $K \subset V$, *alors*

$$\mathrm{Pont}^s(V/K) = 0 , \qquad s > 2(n - q) .$$

Il en résulte que certaines classes de Pontrjagin d'une G_T-structure intégrable sont nulles [2].

Conséquence [3]. Si K est un sous-fibré vectoriel C^∞, intégrable de TV_n, alors

$$\mathrm{Pont}^s(TV_n/K) = 0 , \qquad s > 2(n - q) .$$

Remarque 3.1. Si $q \leq [n/2]$ alors $s > 2(n-q) \geq n$ et donc le Théorème 3.4. ne fait pas des distinctions entre les sous-fibrés vectoriels intégrables et non-intégrables. Dans cette situation le Théorème 3.3 (la Conséquence 1) offre une information cohomologique sur l'intégrabilité de V et K (respectivement K) si $q > 3$.

C. G_T-STRUCTURES

4. DÉFINITION 4.1. Une G_T-structure sur V_n ($n \geq 3$) est définie par un couple (V, M) de sous-fibrés vectoriels de TV_n (distributions [1], [2]) de classe C^∞, qui satisfoint, pour tout $x \in V_n$, aux conditions suivantes:

1) $T_x V_n = V_x + M_x$;

2) le sous–fibrés vectoriel $K = V \cap M$ a la fibre de dimension q, $1 \leq \leq q < \min(n - p, n - m)$, $n - p = \dim V_x$, $n - m = \dim M_x$, où $T_x V_n$, V_x, M_x sont les fibres locaux de TV_n, V et M respectivement, au–dessus de x. Nous appellerons K le fibré de définition de la structure (V, M).

Si V et M sont intégrables, alors K est intégrable et il existe donc des connexions presque–basiques sur chaque fibré V/K et M/K. Alors le Théorème 3.3 donne le

THÉORÈME 4.1. *Si la* G_T*–structure* (V, M) *ayant le fibré de définition* K *est intégrable, alors*

$$HP^s(V/K; K) = 0 \quad , \quad HP^s(M/K; K) = 0, \quad s \geq 1 .$$

Etant donné une G_T–structure (V, M), $V \cap M = K$, on note $\bar{H} = V \cap K^\perp$, $\bar{\bar{K}} = M \cap K^\perp$ ($K^\perp$ est le fibré orthogonale à K). Alors pour le fibré tangent TV_n nous avons $TV_n = \bar{K} \oplus K \oplus \bar{\bar{K}}$. De cette décomposition nous obtenons le

LEMME 4.2. *On a les isomorphismes des fibrés vectoriales*

$$TV_n/V \simeq M/K \quad , \quad TV_n/M \simeq V/K .$$

Appliquons la conséquence du Théorème 3.4 au couple (TV_n, M) et (TV_n, V). Alors par le Lemme 4.2 il resulte le

THÉORÈME 4.3. *Si* (V, M) *est une* G_T*–structure intégrable avec le fibré de définition* K, *on a*

$$\mathrm{Pont}^s(V/K) = 0, \quad s > 2m, \quad \mathrm{Pont}^s(M/K) = 0, \quad s > 2p,$$

où $p = \operatorname{codim} V$, $m = \operatorname{codim} M$.

Remarque 4.1. Le résultat du Théorème 4.3 est plus fort que le résultat du Théorème 3.4, mais il a lieu dans des conditions particulières.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. APREUTESEI (1970) – *Automorphismes d'une* G_T*–structure*, « C. R. Acad. Sc. Paris », *271*, 1970, sér. A, 481–484.
[2] C. APREUTESEI (1975) – *Quelques classes caractéristiques et* G_T*–structures*, « C. R., Acad. Sc. Paris », *280*, sér. A, 41–44.
[3] R. BOTT. (1970) – *On a topological obstruction to integrability*, « Proc. Sympos. Pure. Math. », *16*, « Amer. Math. Soc. », 127–132.
[4] P. BAUM et R. BOTT (1972) – *Singularities of holomorphic foliations*, « J. Differential Geometry », *7*, 279–342.
[5] R. BOTT (1972) – *Lectures on characteristic classes and foliations* (« Lectures Notes », 279).
[6] S. S. CHERN (1950) – *Differential geometry of fiber bundles*, Proc., Int. Congress, Vol. II, 397–411.