ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

SANDRA SABBI

Ancora sulle equazioni costitutive nei corpi ferromagnetici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.1, p. 61–66.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_1_61_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Fisica matematica. — *Ancora sulle equazioni costitutive nei corpi ferromagnetici.* Nota di SANDRA SABBI (*), presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — In Crupi's constitutive equations for ferromagnetic bodies a suitable functional is introduced, in such a way to account for viscosity and hysteresis phenomena which always give rise to energy dissipation.

1. In una Nota precedente [1] ho studiato le equazioni costitutive proposte dal Crupi [2], [3] per i corpi ferromagnetici e da esse ho dedotto, fra l'altro, come un corpo ferromagnetico, soggetto ad un campo magnetico periodico, potrebbe in un periodo emettere energia. Poiché fenomeni del genere non sono, per quanto mi risulta, comprovati dall'esperienza, nella mia Nota accennavo alla possibilità che l'energia emessa venga superata da energia dissipata dovuta a fenomeni di isteresi.

In questa Nota costruirò un funzionale che, aggiunto nelle equazioni costitutive del Crupi, può rappresentare quei fenomeni di isteresi (più esattamente di viscosità e di isteresi) tali per cui si abbia nel corpo energia dissipata in quantità sempre superiore a quella emessa, o, che è lo stesso, si abbia in totale energia dissipata.

Si noti che il funzionale è stato aggiunto nelle equazioni costitutive solo per ovviare alla difficoltà energetica richiamata in principio, ma non intendo affatto affermare che esso rappresenti la realtà fisica, tanto più che le equazioni del Crupi si riferiscono a corpi ferromagnetici anisotropi per i quali, a quanto mi risulta, le ricerche sperimentali sono piuttosto scarse; inoltre è ovvio che le predette difficoltà energetiche si potrebbero eliminare anche con altri funzionali forse più convenienti.

Comunque debbo segnalare che la costruzione del funzionale della presente Nota non è stata del tutto facile, perchè si voleva ottenere energia totale dissipata per ogni periodo del campo magnetico agente sul corpo.

Si osservi tuttavia che rimane il seguente paradosso: l'energia dissipata può avere valori diversi se si inverte la legge di variazione del campo magnetico.

2. Nella [1] supposti i tensori η_{ik} e γ_{ikpq} simmetrici (come ha provato il Crupi [3, n. 1] senza le ipotesi energetiche della [1]) e supposto il campo magnetico $\mathbf{H}(t)$ periodico di periodo $T = 2\pi/\omega$, ho trovato, in base alle equa-

(*) Borsista del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1977.

zioni costitutive del Crupi, per l'energia $\mathcal{U}_1$ dissipata (o emessa, a seconda del segno), in un periodo e per unità di volume, l'espressione:

$$\mathcal{U}_1 = -\int_0^T \mathbf{H}(t) \times \nu\mathbf{H}(t) \cdot \frac{d\mathbf{H}(t)}{dt}\, dt \tag{2.1}$$

dove $\mathbf{H}(t)$ è il campo magnetico all'istante t e ν un tensore doppio, o che è lo stesso, una trasformazione lineare. Come si è osservato in [1], se per una certa legge di variazione del campo $\mathcal{U}_1$ risulta positiva (energia dissipata), essa risulta invece negativa (energia emessa) se si inverte tale legge (1).

Poiché, come si è detto, $\mathbf{H}(t)$ è periodico lo si può supporre sviluppabile in serie di Fourier e scrivere:

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'(t) \quad , \quad \mathbf{H}'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(\exp(in\omega t)\,\mathbf{H}_n) \tag{2.2}$$

dove $\mathbf{H}_n$ è, per ogni n, un vettore complesso, cioè del tipo $\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ vettori reali ordinari, i è l'unità immaginaria, $\mathcal{R}$ indica la parte reale, $\mathbf{H}_0$ è un vettore ordinario indipendente dal tempo.

Cerchiamo ora un valore maggiorante per il valore assoluto della funzione integranda a secondo membro di (2.1).

Ricordiamo che, essendo ν una trasformazione lineare e detto $\boldsymbol{m}$ un vettore generico, esiste sempre un numero ν_m tale che:

$$|\nu\boldsymbol{m}| \leq \nu_m m . \tag{2.3}$$

Ora si ha, tenendo presente che $\dfrac{d\mathbf{H}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{H}'}{dt}$:

$$\mathbf{H} \times \nu\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{H}'}{dt} = \mathbf{H}' \times \nu\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{H}'}{dt} + \mathbf{H}_0 \times \nu\mathbf{H}' \cdot \frac{d\mathbf{H}'}{dt} + \mathbf{H}_0 \times \nu\mathbf{H}_0 \cdot \frac{d\mathbf{H}'}{dt} \cdot \tag{2.4}$$

Poiché $\mathbf{H}(t)$ è periodica di periodo T e $\mathbf{H}_0$ è costante, l'integrale da zero a T dell'ultimo termine di (2.4) è nullo.

Inoltre, ricordando la disuguaglianza di Cauchy, si ha:

$$\left| \mathbf{H}' \times \nu\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{H}'}{dt} \right| \leq \left(\nu_m \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}} \mathrm{H}\mathrm{H}' \left| \frac{d\mathbf{H}'}{dt} \right| \right) \leq \tag{2.5}$$

$$\leq \frac{1}{2} \nu_m \left(r\mathrm{H}^2 \left(\frac{d\mathbf{H}'}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r} \mathrm{H}'^2 \right)$$

(1) Si avrebbe energia dissipata o emessa (a seconda della legge di variazione $\mathbf{H}(t)$) anche nel caso più generale in cui η_{ik} e γ_{ikpq} non siano simmetrici, come si proverebbe con l'ovvio ragionamento esposto alla fine della [1], perché $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ non sarebbe un differenziale esatto nelle componenti di $\mathbf{H}$.

dove r è una costante positiva introdotta affinché i termini che compaiono al secondo membro di (2.5) siano delle stesse dimensioni, a tal fine dunque la costante r avrà dimensioni $[\mathrm{H}^{-1}\,\mathrm{T}]$. Però, per semplificare, supporremo fissate le unità di misura e sceglieremo $r=1$; procederemo in modo analogo nel seguito. Inoltre ora è:

$$\left|\mathbf{H}_0\times\nu\mathbf{H}'\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right|\le\left(\nu_m\,\mathrm{H}_0\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{H}'\right)\le\frac{1}{2}\,\nu_m\,\mathrm{H}_0\left(\mathrm{H}'^2+\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\cdot\tag{2.6}$$

Si ha dunque:

$$|\mathscr{U}_1|\le\frac{\nu_m}{2}\int_0^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{H}^2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right)^2+\mathrm{H}'^2+\mathrm{H}_0\,\mathrm{H}'^2+\mathrm{H}_0\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\mathrm{d}t.\tag{2.7}$$

3. Supponiamo ora di aggiungere, nella relazione del Crupi fra **B** e **H** un termine $\mathbf{B}_2(t)$ definito dalla formula (il primo termine a secondo membro è di viscosità, l'altro è ereditario):

$$\mathbf{B}_2(t)=-\lambda_1\,\mathrm{H}^2\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t}+\phi\left(\mathbf{H}\left(\begin{matrix}t\\ \tau\\ -\infty\end{matrix}\right)\right)\tag{3.1}$$

dove λ_1 è una costante positiva e $\phi\left(\mathbf{H}\left(\begin{matrix}t\\ \tau\\ -\infty\end{matrix}\right)\right)$ è un funzionale dei valori di $\mathbf{H}(\tau)$ precedenti $\mathbf{H}(t)$. Più precisamente supporremo:

$$\begin{aligned}\phi\left(\mathbf{H}\left(\begin{matrix}t\\ \tau\\ -\infty\end{matrix}\right)\right)&=\lambda_2\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{t}\exp(-\alpha(t-\tau))\,(\mathbf{H}(\tau)-\mathscr{M}(\mathbf{H}))\,\mathrm{d}\tau\,+\\&+\lambda_3\,|\mathscr{M}(\mathbf{H})|\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{t}\exp(-\alpha(t-\tau))\,(\mathbf{H}(\tau)-\mathscr{M}(\mathbf{H}))\,\mathrm{d}\tau-\lambda_4\,\mathscr{M}(\mathbf{H})\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\tag{3.2}$$

con $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ costanti reali positive e $\mathscr{M}(\mathbf{H})$ è il valor medio di $\mathbf{H}(\tau)$ nell'intervallo $]-\infty, t]$, cioè:

$$\mathscr{M}(\mathbf{H})=\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{h}\int_{-h}^{t}\mathbf{H}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\tag{3.3}$$

Ora si osservi che nel nostro caso è:

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(\mathbf{H})&=\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{h}\int_{-h}^{t}\mathbf{H}_0\,\mathrm{d}\tau+\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{h}\int_{-h}^{t}\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}(\exp(in\omega t)\,\mathbf{H}_n)\,\mathrm{d}\tau=\\&=\lim_{h\to+\infty}\left[\mathbf{H}_0\,\frac{t+h}{h}\right]+\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{h}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}\left(\frac{\exp(in\omega\tau)}{in\omega}\,\mathbf{H}_n\right)\right]_{-h}^{t}=\mathbf{H}_0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Si ha perciò:

$$(3.5)\qquad \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\alpha\,(t-\tau)\right)\left(\mathbf{H}(\tau)-\mathscr{M}(\mathbf{H})\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{t} \exp(-\alpha t)\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}\left(\exp(in\omega t+\alpha\tau)\,\mathbf{H}_n\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}\left(\frac{\exp(in\omega t)}{in\omega+\alpha}\,\mathbf{H}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}\left(\frac{\exp(in\omega t)}{in\omega}\,\mathbf{H}_n\right) = \int \mathbf{H}'(t)\,\mathrm{d}t$$

dove l'ultimo termine di (3.5) indica ovviamente la primitiva periodica di $\mathbf{H}'(t)$ a valor medio nullo. La (3.1) si può allora scrivere:

$$(3.6)\qquad \mathbf{B}_2(t) = -\lambda_1 H^2\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} + \lambda_2\int \mathbf{H}'(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_3 H_0\int \mathbf{H}'(t)\,\mathrm{d}t - \lambda_4 H_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Da (3.6) segue facilmente che $\mathbf{B}_2(t)$ è una funzione periodica di periodo T e si ha che l'energia $\mathscr{U}_2$ comunicata all'unità di volume del corpo in un periodo per effetto dei termini di viscosità ed ereditari vale, tenendo conto della (3.6):

$$(3.7)\qquad \mathscr{U}_2 = -\int_0^T \mathbf{B}_2(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^T \mathbf{B}_2(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_0^T\left(-\lambda_1 H^2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \lambda_2\int \mathbf{H}'(t)\,\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t} +\right.$$

$$\left. + H_0\lambda_3\int \mathbf{H}'(t)\,\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t} - \lambda_4 H_0\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\mathrm{d}t\,.$$

Ora, con una integrazione per parti, ricordando che la primitiva di $\mathbf{H}'(t)$ che compare in (3.7) è periodica, si ha:

$$\int_0^T\int \mathbf{H}'(t)\,\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \left[\int \mathbf{H}'(t)\,\mathrm{d}t\cdot\mathbf{H}'(t)\right]_0^T - \int_0^T H'^2\,\mathrm{d}t = -\int_0^T H'^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Quindi è:

$$(3.8)\qquad \mathscr{U}_2 = \lambda_1\int_0^T H^2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t + \lambda_2\int_0^T H'^2\,\mathrm{d}t + \lambda_3 H_0\int_0^T H'^2\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \lambda_4 H_0\int_0^T\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t\,.$$

Ora, poiché le costanti λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sono per ipotesi positive, si ha $\mathcal{U}_2$ positiva, cioè il termine $\mathbf{B}_2(t)$ porta sempre a una dissipazione di energia nel materiale. Inoltre se $\mathcal{U}_2 > |\mathcal{U}_1|$ in ogni caso si ha dissipazione di energia. Ovviamente tale condizione è soddisfatta se $\mathcal{U}_2$ è superiore al valore maggiorante (vedi (2.7)) trovato per $|\mathcal{U}_1|$, cioè se le costanti λ_i positive sono tali che:

$$\lambda_i > \frac{\nu_m}{2} \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.9}$$

4. Verifichiamo che, nel caso particolare trattato nella Nota [1], ammessa la presenza del termine $\mathbf{B}_2(t)$, si ha sempre energia totale dissipata. Nel caso citato era (con A e B costanti reali, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ al solito i versori di una terna di assi cartesiani ortogonali, ν_{31} una componente della trasformazione lineare ν):

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}(t) = 2\,\mathrm{A}\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - 2\,\mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{j} + \mathrm{B}\boldsymbol{i} \\ &\mathcal{U}_1 = -12\,\pi(\mathrm{A}^2\,\mathrm{B})\,\nu_{31}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Da cui:

$$|\mathcal{U}_1| \leq 12\,\pi\mathrm{A}^2\,|\mathrm{B}|\,\nu_m \tag{4.2}$$

dove ν_m è la costante definita in n. 2.

Nel nostro caso si ha poi:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \mathrm{H}^2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^T (4\,\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)(4\,\mathrm{A}^2\,\omega^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2\,\pi}{\omega}(16\,\mathrm{A}^4\,\omega^2 + 4\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{B}^2\,\omega^2) \\ &\int_0^T \mathrm{H}'^2\,\mathrm{d}t = \int_0^T 4\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{d}t = \frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2 \\ &\int_0^T \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}'}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^T 4\,\mathrm{A}^2\,\omega^2\,\mathrm{d}t = \frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2\,\omega^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Quindi, ricordando (3.8), (3.9) e che $\mathrm{H}_0 = |\mathrm{B}|$, è:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2 = {} & \lambda_1\,\frac{32\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^4\,\omega^2 + \lambda_1\,\frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{B}^2\,\omega^2 + \lambda_2\,\frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2 + \\ & + \lambda_3\,\frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2\,|\mathrm{B}| + \lambda_4\,\frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2\,|\mathrm{B}|\,\omega^2 \geq \frac{\nu_m}{2}\left(\frac{32\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^4\,\omega^2 + \right. \\ & \left. + \frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{B}^2\,\omega^2 + \frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2 + \frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2\,|\mathrm{B}| + \frac{8\,\pi}{\omega}\,\mathrm{A}^2\,|\mathrm{B}|\,\omega^2\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

L'energia totale comunicata in un periodo all'unità di volume del corpo è data da $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ e tale energia sarà sempre positiva (cioè si avrà sempre dissipazione) se per ogni valore di A, B, ω è $\mathcal{U}_2 > |\mathcal{U}_1|$, cioè se:

$$\frac{\nu_m}{2}\left(\frac{32\pi}{\omega}A^4\omega^2 + \frac{8\pi}{\omega}A^2B^2\omega^2 + \frac{8\pi}{\omega}A^2 + \frac{8\pi}{\omega}A^2|B| + \frac{8\pi}{\omega}A^2|B|\omega^2\right) >$$

$$> 12\pi A^2|B|\nu_m .$$

Semplificando ambo i membri per ν_m, π, A^2, 4, moltiplicando per ω a sinistra e a destra e dopo qualche altro passaggio si ha la disequazione di secondo grado in ω:

$$4\omega^2(4A^2 + B^2 + |B|) - 3|B|\omega + 4(1 + |B|) > 0 . \tag{4.5}$$

Ora dopo un semplice calcolo si trova per il discriminante Δ del polinomio in ω a primo membro di (4.5) il valore:

$$\Delta = -64(4A^2 + |B| + 4A^2|B| + B^2|B|) - 119B^2 < 0 .$$

Poiché Δ è minore di zero e il coefficiente di ω^2 è positivo (e ciò per ogni valore di A, B) la (4.5) è soddisfatta per ogni A, B e ω come si era affermato.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. SABBI – *Sulle equazioni costitutive nei corpi ferromagnetici*. In corso di stampa in questi « Rendiconti ».

[2] G. CRUPI (1973) – *Sull'asimmetria del tensore permeabilità magnetica nei corpi ferromagnetici*, « Rend. dell'Istituto Lombardo », *A 107*, 83–94.

[3] G. CRUPI (1974) – *Sul tensore permeabilità magnetica nei mezzi ferromagnetici anisotropi* « Rend. dell'Istituto Lombardo », *A 108*, 94–106.