
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

SEBASTIANO SORDO

**Sulla stabilità della doppia schiera di vortici alternati
in prossimità di una parete**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 62 (1977), n.3, p. 353–362.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_3_353_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_3_353_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica dei fluidi. — *Sulla stabilità della doppia schiera di vortici alternati in prossimità di una parete.* Nota II di SEBASTIANO SORDO, presentata (*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — In this paper, the condition of stability of a double row of vortices moving near a wall (see Nota I) has been studied in detail and numerically explicited.

In questo lavoro si è ripreso il problema della stabilità di una doppia schiera vorticoso in prossimità di una parete studiando in dettaglio le conseguenze che si traggono dall'esame dell'equazione che nasce dallo sviluppo del determinante trovato nella Nota I e sottorichiamato (I).

Per il campo vorticoso anzidetto è stato affrontato e risolto il problema della stabilità della schiera, precisando l'intervallo in cui detta stabilità obbedisce a condizioni necessarie e sufficienti.

La relazione

$$(I) \quad \begin{vmatrix} (\alpha + A) & b & c & d \\ a_1 & (\alpha + A) & c_1 & -d_1 \\ d_1 & -d & (\alpha - L) & d_2 \\ -c_1 & -c & c_3 & (\alpha - L) \end{vmatrix} = 0$$

si traduce in una equazione di quarto grado in α in cui i coefficienti sono funzioni dei parametri ωl , h/l , $2D/l$; ora, affinché gli spostamenti definiti dalle (II) della Nota I, dei vortici di una generica doppia schiera posta ad una assegnata distanza dalla parete (vedi fig. 1), restino finiti nel tempo, occorre che α sia reale per qualsiasi valore di ωl .

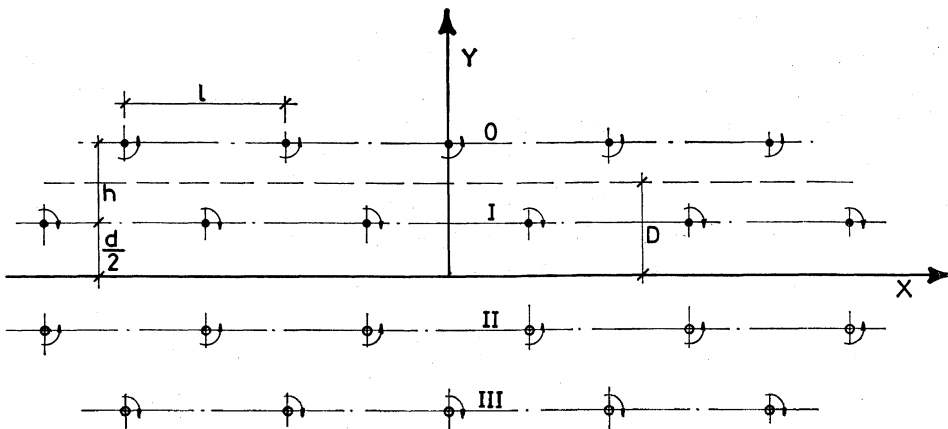


Fig. 1.

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1977.

Questo significa che essendo reale ω , pulsazione spaziale delle perturbazioni applicate ai vortici, λ non deve essere immaginario, per cui lo spostamento del generico vortice di ascissa x_k , sotto questa condizione e con le convenzioni assunte per definire gli spostamenti, si può scrivere:

$$(2) \quad \delta z_k = M \cos \omega (\lambda t + x_k) - iN \sin \omega (\lambda t + x_k)$$

che è rappresentato da un vettore rotante finito, a modulo variabile nel tempo, pari a

$$(3) \quad |\delta z_k| = \sqrt{M^2 \cos^2 \omega (\lambda t + x_k) + N^2 \sin^2 \omega (\lambda t + x_k)}.$$

Sviluppando il determinante si ottiene:

$$(4) \quad \alpha^4 + k_1 \alpha^3 + k_2 \alpha^2 + k_3 \alpha + k_4 = 0$$

dove è:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = 2(A - L) \\ k_2 = L^2 - 4AL + A^2 - c_3 d_2 - a_1 b + 2c_1 d - 2cd_1 \\ k_3 = 2AL^2 - 2LA^2 - 2Ac_3 d_2 + 2La_1 b - 2L(c_1 d - cd_1) + \\ \quad + 2A(c_1 d - cd_1) + 2(d_1 dc_3 - cc_1 d_2) + 2(bc_1 d_1 - a_1 cd) \\ k_4 = A^2 L^2 - A^2 c_3 d_2 - L^2 a_1 b - 2AL(c_1 d - cd_1) + \\ \quad + 2A(d_1 dc_3 - cc_1 d_2) - 2L(bc_1 d_1 - a_1 cd) + a_1 bc_3 d_2 + \\ \quad + a_1 c^2 d_2 + a_1 d^2 c_3 + bc_1^2 d^2 + bd_1^2 c_3 + c^2 d_1^2 + c_1^2 d^2 + 2cdc_1 d_1. \end{array} \right.$$

Analizzando i coefficienti della (4) si nota che essi, per una assegnata coppia di valori h/l e $2D/l$, sono funzioni periodiche del parametro ωl con periodo 2π ; questo consente di studiare l'equazione solo nel campo $0 \leq \omega l \leq 2\pi$ e di valutare in questo intervallo la somma delle serie che compaiono nei termini A, C, E, F, G, H, I, L, Q che sono funzioni trigonometriche di ωl e risultano così espresse:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = -\pi(\pi - \omega l) \frac{ch \left[\frac{h+2D}{l} (\pi - \omega l) \right]}{sh \frac{\pi(h+2D)}{l}} + \\ \quad + \pi^2 \frac{ch \frac{\pi(h+2D)}{l} sh \left[\frac{h+2D}{l} (\pi - \omega l) \right]}{sh^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} \\ C = \frac{(\pi - \omega l)^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 E &= \pi (\pi - \omega l) \frac{sh \left[\frac{h + 2D}{l} (\pi - \omega l) \right]}{sh \frac{\pi (h + 2D)}{l}} - \\
 &\quad - \pi^2 \frac{ch \left[\frac{h + 2D}{l} (\pi - \omega l) \right] ch \frac{\pi (h + 2D)}{l}}{sh^2 \frac{\pi (h + 2D)}{l}} \\
 F &= -\pi (\pi - \omega l) \frac{sh \left[\frac{h}{l} (\pi - \omega l) \right]}{ch \frac{\pi h}{l}} + \pi^2 \frac{ch \left[\frac{h}{l} (\pi - \omega l) \right] sh \frac{\pi h}{l}}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} \\
 G &= -\pi (\pi - \omega l) \frac{sh \left[\frac{2D}{l} (\pi - \omega l) \right]}{ch \frac{\pi 2D}{l}} + \\
 &\quad + \pi^2 \frac{ch \left[\frac{2D}{l} (\pi - \omega l) \right] sh \frac{\pi 2D}{l}}{ch^2 \frac{\pi 2D}{l}} \\
 (6) \quad H &= \frac{\pi}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} \left[\pi ch \left(\omega l \frac{h}{l} \right) - \omega l ch \frac{\pi h}{l} ch \left[\frac{h}{l} (\pi - \omega l) \right] \right] \\
 I &= \frac{\pi}{ch^2 \frac{\pi 2D}{l}} \left[\pi ch \left(\omega l \frac{2D}{l} \right) - \omega l ch \left(\frac{\pi 2D}{l} \right) ch \left[\frac{2D}{l} (\pi - \omega l) \right] \right] \\
 L &= -\pi (\pi - \omega l) \frac{ch \left[\frac{2D - h}{l} (\pi - \omega l) \right]}{sh \frac{\pi (2D - h)}{l}} + \\
 &\quad + \pi^2 \frac{ch \frac{\pi (2D - h)}{l} sh \left[\frac{2D - h}{l} (\pi - \omega l) \right]}{sh^2 \frac{\pi (2D - h)}{l}} \\
 Q &= \pi (\pi - \omega l) \frac{sh \left[\frac{2D - h}{l} (\pi - \omega l) \right]}{sh \frac{\pi (2D - h)}{l}} - \\
 &\quad - \pi^2 \frac{ch \left[\frac{2D - h}{l} (\pi - \omega l) \right] ch \frac{\pi (2D - h)}{l}}{sh^2 \frac{\pi (2D - h)}{l}} .
 \end{aligned}$$

L'equazione (4) è l'equazione di stabilità del sistema vorticoso secondo lo schema tradizionale di calcolo (vedi [1]), ed è stata studiata per schiere di vortici caratterizzate dalla relazione:

$$(7) \quad 0,20 \leq h/l \leq 0,44;$$

si sono considerati in questo modo anche rapporti che sono fuori dall'intervallo definito dalla (1) della Nota I, estendendo il campo del rapporto caratteristico h/l , avendo supposto che la parete influenzi non solo la stabilità delle doppie schiere, ma anche la loro formazione.

L'equazione di stabilità per $\omega l = 0$ e $\omega l = 2\pi$ si riduce alla stessa espressione e, annullandosi i termini in $\sin \omega l (k - \frac{1}{2})$ e $\sin k\omega l$, si trasforma nella

$$(8) \quad \alpha^4 + m\alpha^2 = 0$$

che ammette le soluzioni

$$(9) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \sqrt{-m}, \quad \alpha_4 = -\sqrt{-m}$$

con

$$(10) \quad m = -\frac{ch^2 \frac{\pi 2 D}{l} - ch^2 \frac{\pi h}{l}}{ch^2 \frac{\pi h}{l} \quad ch^2 \frac{\pi 2 D}{l}} \cdot \left(\frac{4\pi^2}{ch^2 \frac{\pi 2 D}{l}} + \frac{2\pi^2}{sh^2 \frac{\pi(2D-h)}{l}} + \frac{2\pi^2}{sh^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} \right)$$

che per $2D/l > h/l$ è sempre negativo.

Quindi si può dire che la (4) per $\omega l = 0$ e 2π ammette sempre radici reali; nel caso di $\omega l = \pi$ annullandosi i termini in $\cos \omega l (k - 1/2)$ diventa una biquadratica

$$(11) \quad \alpha^4 + n_1 \alpha^2 + n_2 = 0$$

mentre resta completa per gli altri valori di ωl .

Essa è stata studiata numericamente per ogni rapporto h/l solo per i valori $2D/l$ in cui l'equazione (8), di più rapido calcolo, ammetteva soluzioni reali; i risultati ottenuti, riportati in fig. 2, mostrano che per ogni schiera con assegnato h/l , esiste un campo continuo del parametro $2D/l$ all'interno del quale la suddetta schiera è stabile col criterio adottato; il grafico mostra poi che il campo di esistenza delle schiere va limitato ai valori

$$(12) \quad 0,205 \leq h/l \leq 0,367.$$

Una particolare singolarità presenta la doppia schiera con rapporto caratteristico

$$(13) \quad h/l = \frac{\text{arch } \sqrt{2}}{\pi} = 0,28054\dots$$

in quanto è stabile in vicinanza della parete per il campo

$$(14) \quad 0,662 \leq 2 D/l \leq 0,729$$

ed inoltre a una distanza infinita dalla stessa, con il che si ricade nel caso classico di campo illimitato.

Infatti se nella (4) il parametro $2 D/l$ tende all' ∞ , l'equazione stessa si trasforma in quella relativa alla doppia schiera di vortici alternati di Kármán.

Per questo sistema quindi la parete ha un effetto instabilizzante per $2 D/l < 0,662$.

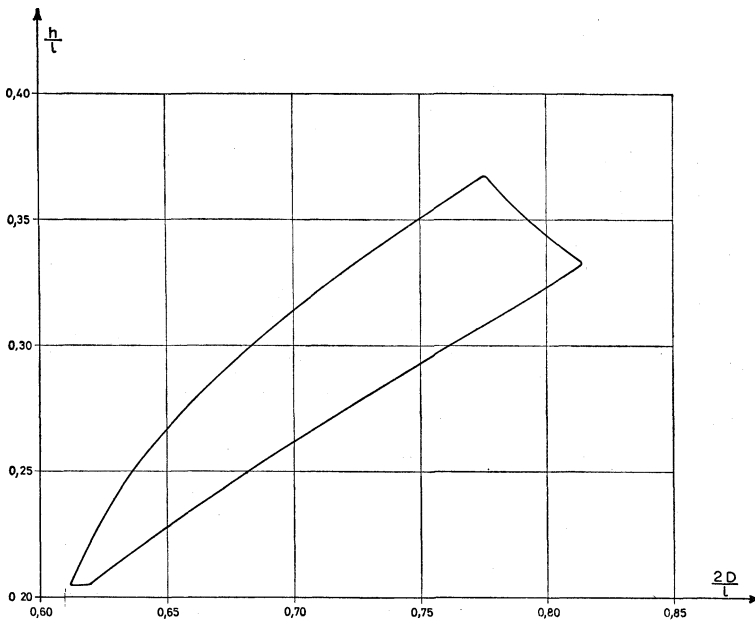


Fig. 2. - Campo di stabilità per una schiera di assegnato h/l .

Per i valori superiori a 0,729 essa crea ancora una azione di disturbo, ma meno intensa, che diminuisce asintoticamente all'aumentare della distanza della parete stessa.

I risultati relativi a questa schiera sono evidenziati in fig. 3 in cui sono riportati per ogni valore di $2 D/l$ i campi dei valori di ω/l , per cui l'equazione di stabilità ammette soluzioni immaginarie.

Dal diagramma si vede che per $2 D/l < 0,662$ c'è un vasto campo di valori di ω/l per i quali si ha instabilità; invece per $2 D/l > 0,729$ la zona di instabilità si restringe all'aumentare di $2 D/l$ e si annulla per distanza infinita. In pratica per $2 D/l = 3$ la doppia schiera considerata non risente più dell'effetto della parete.

Questo calcolo risente tuttavia, come l'originale di Lamb e Villat, di un vizio di origine, in quanto la condizione di stabilità è solo apparentemente necessaria e sufficiente, tanto è vero che G. Pezzoli ha mostrato che la schiera classica in campo illimitato, è invece sempre instabile.

Esaminiamo quindi con il metodo di Pezzoli [6] la configurazione sopra esaminata; secondo questo procedimento che deriva dall'applicazione di un teorema di Lord Rayleigh sulla stabilità dei sistemi vincolati, consideriamo una doppia schiera, ad una certa distanza dalla parete, stabile secondo

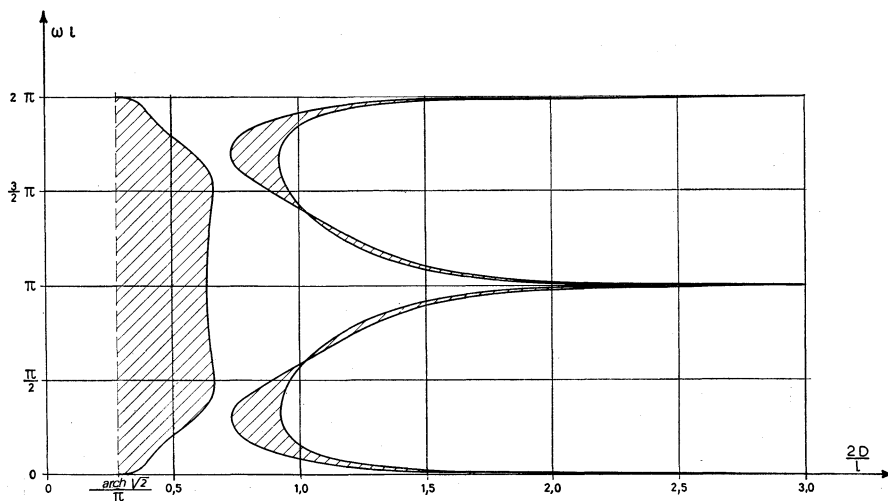


Fig. 3. - Campo a tratteggio: luogo in cui l'equazione di stabilità (4) per $h/l = \frac{ar \operatorname{ch} \sqrt{2}}{\pi}$ ammette soluzioni immaginarie.

il metodo precedentemente adottato, e immaginiamo di vincolare tutti i vortici meno uno che lasceremo libero di muoversi ed al quale daremo un piccolo spostamento dalla sua posizione iniziale. Se la configurazione del sistema preso in considerazione è effettivamente di equilibrio stabile, per il sopraccennato teorema il sistema più vincolato dovrà essere ancora stabile.

Per eseguire questa verifica, riprendiamo la (4) della Nota I e diamo al vortice di affissa z_0 uno spostamento infinitesimo; a causa di questo, il vortice considerato, subirà un incremento di velocità definito dalla relazione

$$(15) \quad \frac{2\pi}{J} \left(\frac{d\eta_0}{dt} + i \frac{d\xi_0}{dt} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\delta z_0}{(z_0 - z_k)^2} + \frac{\delta z_0}{(z_0 - z_{-k})^2} \right) + \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta z_0}{(z_0 - z'_{-k})^2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta z_0}{(z_0 - z'_k)^2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta z_0}{(z_0 - z''_k)^2} - \frac{\delta z_0'''}{(z_0 - z_0''')^2}.$$

Ricordate le (3), (5) e (8) della Nota I, sostituiti inoltre a δz_0 e $\delta z_0'''$ i loro valori, sapendo che per la specularità del sistema è $\delta z_0''' = \xi_0 - i\eta_0$,

ed eguagliate le parti reali e i coefficienti dell'immaginario, si ottiene il sistema

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\pi}{J} \frac{d\eta_0}{dt} &= \frac{\pi^2}{l^2} \left[\frac{1}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{ch^2 \frac{\pi 2D}{l}} - \frac{1}{sh^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} - \frac{1}{3} \right] \xi_0 + \\ &+ \frac{\xi_0}{(h+2D)^2} \\ \frac{2\pi}{J} \frac{d\xi_0}{dt} &= \frac{\pi^2}{l^2} \left[\frac{1}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{ch^2 \frac{\pi 2D}{l}} - \frac{1}{sh^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} - \frac{1}{3} \right] \eta_0 - \\ &- \frac{\eta_0}{(h+2D)^2} \end{aligned} \right.$$

per cui nel piano ξ_0, η_0 l'equazione differenziale equivalente risulta

$$(17) \quad \frac{d\eta_0}{d\xi_0} = \frac{\left[\frac{1}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{ch^2 \frac{\pi 2D}{l}} - \frac{1}{sh^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{h+2D}{l}\right)^2} \right] \xi_0}{\left[\frac{1}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{ch^2 \frac{\pi 2D}{l}} - \frac{1}{sh^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} - \frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{h+2D}{l}\right)^2} \right] \eta_0}$$

Essa possiede nell'origine un punto singolare, la cui natura è legata alle condizioni di equilibrio del vortice.

Scritta la (17) nella forma:

$$(18) \quad \frac{d\eta_0}{d\xi_0} = \frac{C\xi_0 + D\eta_0}{A\xi_0 + B\eta_0}$$

con

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{1}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{ch^2 \frac{\pi 2D}{l}} - \frac{1}{sh^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} - \frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{h+2D}{l}\right)^2} \\ C &= \frac{1}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{ch^2 \frac{\pi 2D}{l}} - \frac{1}{sh^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{h+2D}{l}\right)^2} \\ D &= 0 \end{aligned} \right.$$

è noto che scritto il discriminante

$$(20) \quad \Delta = (A - D)^2 + 4BC$$

il punto singolare della (18) può essere ricondotto a quattro tipi e precisamente:

$$(21) \quad \begin{aligned} \Delta \geq 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{nodo} \quad (AD - BC) > 0 \\ \text{colle} \quad (AD - BC) < 0 \end{array} \right. \\ \Delta < 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{fuoco} \quad (A + D) \neq 0 \\ \text{centro} \quad (A + D) = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Nel nostro caso essendo $A = D = 0$, quindi $\Delta = 4 BC$, potremo avere solamente un colle o un centro dovendosi escludere il nodo perchè dove è $\Delta > 0$ non può essere mai $(AD - BC) > 0$, e il fuoco, perchè non si può mai avere $(A + D) \neq 0$. È noto che un colle è una singolarità sempre instabile mentre un centro rappresenta una configurazione di equilibrio stabile nel senso di Liapounoff.

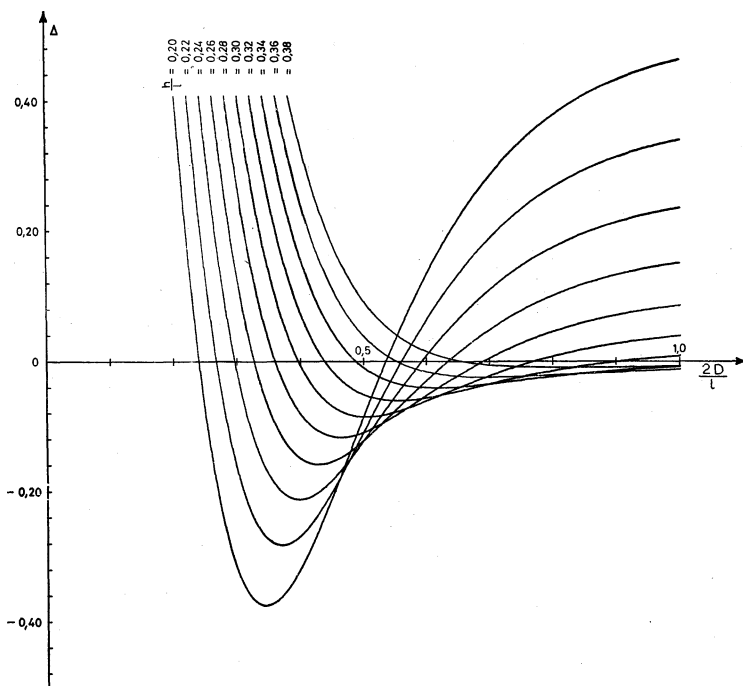


Fig. 4. - Diagramma di Δ per un assegnato h/l .

Si è allora ricercato per ogni rapporto h/l relativo alla condizione (12) il campo in cui la (17) ammette come singolarità un centro.

Nella fig. 4 in cui i valori di Δ sono diagrammati in funzione di $2D/l$ ($h/l \leq 2D/l \leq 1$) con parametro h/l , si vede che esiste una zona in cui Δ è negativo e per la quale si ha quindi un centro. Per maggior chiarezza nella fig. 5 è stato riportato l'intervallo h/l in funzione di $2D/l$ ($0,60 \leq 2D/l \leq 0,85$) per il quale si ha un centro e confrontando il diagramma ottenuto con quella della fig. 2 si vede che le due aree si ricoprono in parte.

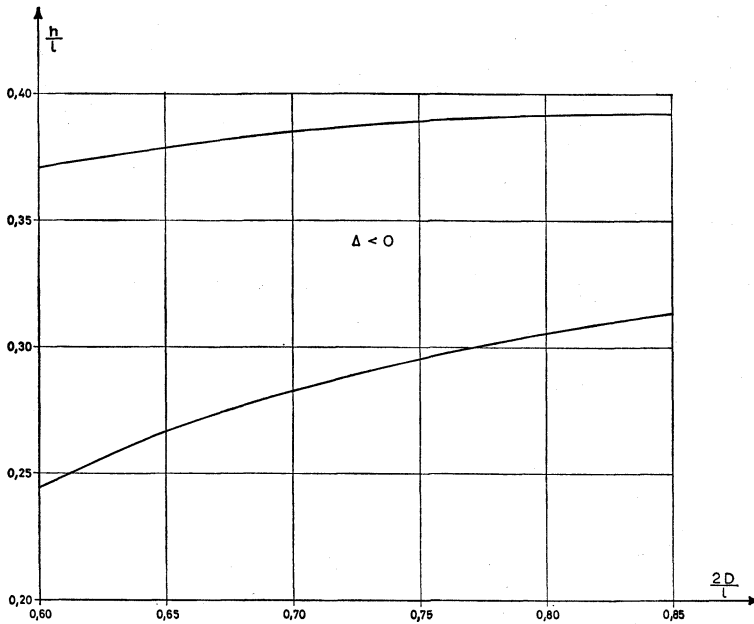


Fig. 5. - Campo dei valori di h/l per i quali si ha un centro.

Per meglio evidenziare le cose, in fig. 6, si è rappresentato in un unico diagramma l'area di stabilità data dall'equazione (4) e l'area in cui la (17) ammette come punto singolare un centro, riportando in ordinate il rapporto h/l e in ascisse D/l .

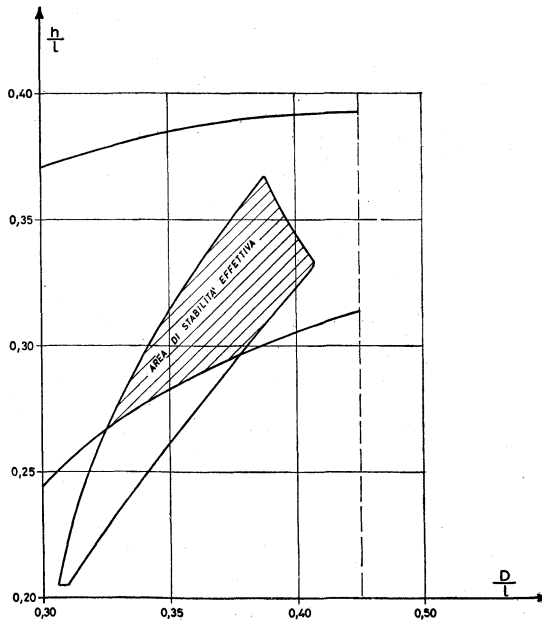


Fig. 6. - Campo a tratteggio: zona di effettiva stabilità per un assegnato h/l .

Risulta quindi che solo le doppie schiere che si possono rappresentare con un punto della zona comune alle due aree sono totalmente ed incondizionatamente stabili.

Ritengo che questo risultato sia nuovo ed inedito ed il problema di qualche interesse anche dal punto di vista tecnico, pur riconoscendo che la presenza dello strato limite e l'essere il fluido non perfetto, apportano certo modifiche al fenomeno.

BIBLIOGRAFIA

SORDO S., 1977 - *Sulla stabilità della doppia schiera di vortici alternati in prossimità di una parete*. Nota I. « Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », n. 2.