Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico Candeloro, Patrizia Pucci

- Alcune stime per l'integrale di Riemann-Stieltjes e per l'integrale di Weierstrass

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.3-4, p. 187–191.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_3-4_187_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Funzioni di variabile reale. — *Alcune stime per l'integrale di Riemann–Stieltjes e per l'integrale di Weierstrass* (*). Nota (**) di DOMENICO CANDELORO e PATRIZIA PUCCI, presentata dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — We state some bilateral bounds for the Riemann–Stieltjes integral and we extend them to the Weierstrass integral.

Siano f, g, h funzioni reali definite sull'intervallo $[a, b]$, e ψ una funzione d'intervallo su $[a, b]$ a valori in $\mathbf{R}$.

Per gli integrali $\int_a^b h\mathrm{d}g$ e $\int_a^b hf\mathrm{d}g$ intesi alla Riemann–Stieltjes stabiliamo delle maggiorazioni a destra e a sinistra, alcune delle quali non solo migliorano quelle di R. Darst e H. Pollard [3] e P. R. Beesack [1], ma le generalizzano. Le disuguaglianze ottenute si confrontano tra loro e si portano vari esempi che illustrano le differenti situazioni che si possono presentare. Infine, diamo un'estensione di tali stime all'integrale $\int_a^b h\psi$ inteso alla Weierstrass.

La dimostrazione dei teoremi che esponiamo seguirà in un altro lavoro più esteso, [2].

1. NOTAZIONI E DEFINIZIONI

Sia $[a, b] \subset \mathbf{R}$ e indichiamo con $\mathscr{I}$ la famiglia dei sottointervalli $\mathrm{I} = [c, d] \subset [a, b]$. Denotiamo con $\mathscr{D}$ la famiglia di tutte le decomposizioni finite D di $[a, b]$ e, per ogni $\mathrm{D} \in \mathscr{D}$, porremo $\delta(\mathrm{D}) = \max\{|\mathrm{I}| : \mathrm{I} \in \mathrm{D}\}$, ove s'intenda $|\mathrm{I}| = |[c, d]| = d - c$.

Se D_1 e D_2 sono elementi di $\mathscr{D}$, scriveremo $\mathrm{D}_2 \geq_1 \mathrm{D}_1$ ($\mathrm{D}_2 \geq_2 \mathrm{D}_1$) se ogni intervallo di D_2 è contenuto in qualche intervallo di D_1 (se $\delta(\mathrm{D}_2) \leq \delta(\mathrm{D}_1)$).

Indichiamo con $\mathscr{E}$ la famiglia di tutti sottoinsiemi $\mathrm{E} \subset [a, b]$ la cui misura (secondo Lebesgue) è $b - a$. Per ogni $\mathrm{E} \in \mathscr{E}$ sia $\mathscr{D}_\mathrm{E}$ la famiglia di tutte le decomposizioni D del tipo $\mathrm{D} = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]\}$, ove $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ con $x_i \in \mathrm{E}$ per ogni $i = 0, 1, \cdots, n$.

Sia $h : [a, b] \to \mathbf{R}$. Per ogni $\mathrm{I} \in \mathscr{I}$, indichiamo con $\Delta h(\mathrm{I}) = \Delta h([c, d])$ il numero $h(d) - h(c)$. Poniamo $\mathrm{V}(h, \mathrm{E}) = \sup_{\mathrm{D} \in \mathscr{D}_\mathrm{E}} \sum_{\mathrm{I} \in \mathrm{D}} |\Delta| h(\mathrm{I})$ per ogni $\mathrm{E} \in \mathscr{E}$ e $\mathrm{V_C}(h) = \inf_{\mathrm{E} \in \mathscr{E}} \mathrm{V}(h, \mathrm{E})$.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico Università di Perugia nell'ambito del G.N.A.F.A.–C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1977.

Il numero $V_C(h)$ si chiama *variazione generalizzata di* h; se $V_C(h) < +\infty$ si dice che h è a *variazione generalizzata limitata.*

Siano ora $h:[a,b] \to \mathbf{R}$ e $\psi:\mathscr{I} \to \mathbf{R}$ e supponiamo che esista un numero reale W con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $D_0 \in \mathscr{D}$ tale che per ogni $D \geq_1 D_0$ ($D \geq_i D_0$) risulti $\left|\sum_{I \in D} h(y_I)\,\psi(I) - W\right| < \varepsilon$ comunque si scelga $y_I \in I$. In questo caso W prende il nome di *integrale di Weierstrass* e si scrive $W = \sigma \int_a^b h\psi \left(W = N \int_a^b h\psi\right)$.

In particolare, se $g:[a,b] \to \mathbf{R}$ e $\psi(I) = \Delta g(I)$, il numero $W = \sigma \int_a^b h\psi = \sigma \int_a^b h\,dg \left(W = N \int_a^b h\psi = N \int_a^b h\,dg\right)$ se esiste, prende il nome di *integrale di Riemann-Stieltjes.*

Nel seguito, enunciando proprietà valide sia per $\sigma \int_a^b h\psi$ che per $N \int_a^b h\psi$, si utilizzerà la scrittura $\int_a^b h\psi$.

2. Una disuguaglianza per $\int_a^b h\,dg$

Sia $g:[a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione essenzialmente limitata. Poniamo $l = \operatorname{inf\,ess} g$ e $L = \operatorname{sup\,ess} g$. Per ogni $E \in \mathscr{E}$, poniamo poi

$$t_g(E) = \inf_{\substack{a \leq c < d \leq b \\ c,d \in E}} \int_c^d dg \qquad \text{e} \qquad T_g(E) = \sup_{\substack{a \leq c < d \leq b \\ c,d \in E}} \int_c^d dg\,;$$

$$m_g(E) = \min\{t_g(E),\, l - g(a),\, g(b) - L\}$$

e

$$M_g(E) = \max\{T_g(E),\, L - g(a),\, g(b) - l\}\,.$$

Introdotto in $\mathscr{E}$ il semi-ordinamento $\leq$ così definito: $E \leq E'$ se e solo se $E' \subseteq E$, poniamo $m_g = \lim_{E \in \mathscr{E}} m_g(E)$ e $M_g = \lim_{E \in \mathscr{E}} M_g(E)$.

Sussiste il seguente:

TEOREMA 2.1. *Sia* $h:[a,b] \to \mathbf{R}$ *tale che* $V_C(h) < +\infty$. *Sia* $g \in L_\infty([a,b])$ *e supponiamo che esista* $\int_a^b h\,dg$. *Ponendo* $i = \operatorname{inf\,ess} h$, *risultano*:

$$\int_a^b h\,dg \leq i\cdot[g(b) - g(a)] + M_g \cdot V_C(h) \tag{2.1}$$

$$\int_a^b h\,dg \geq i\cdot[g(b) - g(a)] + m_g \cdot V_C(h)\,. \tag{2.2}$$

Nelle ipotesi che h sia a variazione (classica) limitata e che g sia limitata, Beesack stabilisce in [1] le seguenti stime

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}g \leq i\cdot[g(b)-g(a)] + \mathrm{T}_g([a,b])\cdot\mathrm{V}(h,[a,b]) \tag{2.3}$$

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}g \geq i\cdot[g(b)-g(a)] + t_g([a,b])\cdot\mathrm{V}(h,[a,b])\,, \tag{2.4}$$

che l'Autore ottiene con ipotesi meno onerose di quelle usate da Darst e Pollard in [3].

In [2] proviamo che le (2.1) e (2.2) migliorano le (2.3) e (2.4). È facile poi trovare degli esempi in cui la coppia di disuguaglianze (2.1), (2.2) è più stringente della coppia (2.3), (2.4). Così sia $[a,b]=[0,1]$ e

$$h(x)=\begin{cases} 0\,, & \text{se } x=0 \circ x=\frac{1}{2} \\ 1\,, & \text{altrove} \end{cases}\;; \qquad g(x)=\begin{cases} 2\,, & \text{se } x=1 \\ 1-x\,, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Allora dalle (2.3) e (2.4) si ottiene $-3 \leq \int_0^1 h\,\mathrm{d}g \leq 6$, mentre per le (2.1) e (2.2) si ha $1 \leq \int_0^1 h\,\mathrm{d}g \leq 1$.

Utilizzando il teorema d'integrazione per sostituzione (cfr. [4], [2]) si possono dare disuguaglianze anche per $\int_a^b hf\,\mathrm{d}g$ nel caso che $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ esista e che h sia limitata.

TEOREMA 2.2. *Se h è limitata, $\mathrm{V_C}(h) < +\infty$, $g \in \mathrm{L}_\infty([a,b])$, se esistono $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ e $\int_a^b hf\,\mathrm{d}g$, allora, detta $\mathrm{G}(x)=\int_a^x f\,\mathrm{d}g$, si ha:*

$$\int_a^b hf\,\mathrm{d}g \leq i\cdot\int_a^b f\,\mathrm{d}g + \mathrm{M_G}\cdot\mathrm{V_C}(h)\,, \tag{2.5}$$

$$\int_a^b hf\,\mathrm{d}g \geq i\cdot\int_a^b f\,\mathrm{d}g + m_{\mathrm{G}}\cdot\mathrm{V_C}(h)\,. \tag{2.6}$$

3. DISUGUAGLIANZE ALTERNATIVE

Modificando opportunamente la dimostrazione del Teorema 2.1 (cfr. [2]), si possono ottenere nuove stime per $\int_a^b h\,\mathrm{d}g$, le quali, in determinate circostanze, sono preferibili alle (2.1) e (2.2). Precisamente si ha, nelle ipotesi del Teorema 2.1,

$$\int_a^b h\,dg \leq i\cdot[g(b)-g(a)] + [h(a)-i]\cdot[\gamma_a - g(a)] + [h(b)-i]\cdot \cdot[g(b)-\delta_b] + T_g\cdot V_C(h)\,, \tag{3.1}$$

$$\int_a^b h\,dg \geq i\cdot[g(b)-g(a)] + [h(a)-i]\cdot[\delta_a - g(a)] + [h(b)-i]\cdot \cdot[g(b)-\gamma_b] + t_g\cdot V_C(h)\,; \tag{3.2}$$

dove

$$\gamma_x = \lim_{E\in\mathcal{E}} \varliminf_{\substack{t\to x\\ t\in E}} g(t) \quad , \quad \delta_x = \lim_{E\in\mathcal{E}} \varlimsup_{\substack{t\to x\\ t\in E}} g(t) \quad , \quad x = a\,,b\,;$$

$$t_g = \lim_{E\in\mathcal{E}} t_g(E) \quad , \quad T_g = \lim_{E\in\mathcal{E}} T_g(E)\,.$$

Le (3.1) e (3.2) possono migliorare le (2.1) e (2.2) nei casi in cui g sia discontinua in almeno uno degli estremi, come mostra il seguente esempio: sia $[a\,,b] = [0\,,1]$ e

$$h(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se} \quad x\in[0\,,1/3] \\ (-3/2)(x-1)\,, & \text{se} \quad x\in]1/3\,,1]\,, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,, & \text{se} \quad x = 0 \\ 1\,, & \text{se} \quad x\in\,]\,1/2n\,,1/(2n-1)\,[\,,\, n\geq 2 \\ 0\,, & \text{se} \quad x\in[1/(2n+1)\,,1/2n]\,,\, n\geq 2 \\ (-3/2)(x-1)\,, & \text{se} \quad x\in[1/3\,,1]\,. \end{cases}$$

Per le (3.1) e (3.2) si ha $-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 h\,dg \leq \frac{1}{2}$. Utilizzando le (2.1) e (2.2) si ha invece $-1 \leq \int_0^1 h\,dg \leq 1$.

In generale, si verifica che, se la (2.1) è migliore della (3.1), allora la (3.2) è migliore della (2.2).

Un'altra coppia di disuguaglianze, che si può stabilire, sempre nelle ipotesi del Teorema 2.1 è la seguente:

$$\int_a^b h\,dg \leq i\cdot[g(b)-g(a)] + V_C(h)\cdot[T_g + \gamma_a - g(a) + g(b) - \delta_b]\,, \tag{3.3}$$

$$\int_a^b h\,dg \geq i\cdot[g(b)-g(a)] + V_C(h)\cdot[t_g + \delta_a - g(a) + g(b) - \gamma_b]\,. \tag{3.4}$$

Le (3.3) e (3.4) migliorano alcune volte, oltre le (2.1) e (2.2), anche le (3.1) e (3.2) e in generale, quando la (3.1) migliora la (3.3), allora la (3.4) migliora la (3.2): i vari casi sono stati esaminati in [2].

4. UNA DISUGUAGLIANZA PER L'INTEGRALE DI WEIERSTRASS

Utilizzando le disuguaglianze date nel Teorema 2.1, si può stabilire una stima anche per l'integrale di Weierstrass $\int_a^b h\psi$.

TEOREMA 4.1. *Siano* $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ *e* $\psi : \mathscr{I} \to \mathbf{R}$ *due funzioni tali che*:

i) *esistono* $\int_a^b \psi$ *e* $\int_a^b h\psi$;

ii) $V_C(h) < +\infty$;

iii) *esiste un insieme* $E \in \mathscr{E}$ *tale che* $\sup\limits_{\substack{x' < x'' \\ x', x'' \in E}} \psi([x', x'']) < +\infty$.

Allora, posto $i = \text{inf ess}\, h$ *e* $G(x) = \int_a^x \psi$ *risultano*:

$$\int_a^b h\psi \leq i \cdot \int_a^b \psi + M_G \cdot V_C(h) ; \tag{4.1}$$

$$\int_a^b h\psi \geq i \cdot \int_a^b \psi + m_G \cdot V_C(h) . \tag{4.2}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] P. R. BEESACK (1975) – *Bounds for Riemann-Stieltjes integrals*, « Rocky Mountain Jour. Math. », *5* (1), 75–78.

[2] D. CANDELORO e P. PUCCI – *Alcune limitazioni per l'integrale di Riemann-Stieltjes e per l'integrale di Weierstrass*. In corso di stampa in « Atti Sem. Mat. Fis. Univ., Modena ».

[3] R. DARST e H. POLLARD (1970) – *An inequality for the Riemann-Stieltjes integral*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *25*, 912–913.

[4] T. H. HILDEBRAND (1963) – *Introduction to the theory of integration*, « Pure and Appl. Math. », *13*, Academic Press, New York.