Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andre Batbedat

Le spectre d'un préanneau booléen

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.5, p. 290–293.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_5_290_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Algebra. — *Le spectre d'un préanneau booleen.* Nota di ANDRÉ BATBEDAT, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — Si associa ad un preanello booleano uno spazio topologico sull'insieme dei suoi ideali massimali, analogamente a quanto aveva fatto Stone per gli anelli booleani.

INTRODUCTION

La dualité de M. H. Stone [6] relie les anneaux booleens unitaires aux espaces topologiques booleens (compacts et engendrés par leurs ofs); divers aspects en sont exposés dans [2], [3] et [5].

Dans [4], P. Janin présente les préanneaux booleens, étudie les espaces localement booleens (localement compacts et engendrés par leurs ofs) puis il associe à tout préanneau booleen P un espace localement booleen qu'il appelle le dual de P, enfin il précise les liens entre P et son dual.

Nous nous intéressons dans cette note au spectre d'un préanneau booleen P, noté Spec (P), c'est-à-dire à l'espace topologique construit à la manière de M. H. Stone sur l'ensemble des idéaux premiers de P (on verra que ce sont les idéaux maximaux); une telle étude se justifie car lorsque P n'a pas de zéro, Spec (P) ne peut pas être identifié à l'espace dual de P au sens de [4].

I. LES CATEGORIES PB ET TDRC

La notion de préanneau booleen a été introduite et étudiée par P. Janin dans [4]; on peut dire succintement qu'il s'agit d'une généralisation de celle d'anneau booleen par oubli du zéro.

Un préanneau booleen P (voir Chapitre V de [1]) est muni de la loi de groupe ternaire troipotent commutatif: $(a , b , c) \rightarrow a + b + c$, et du produit binaire: $(a , b) \rightarrow ab$, associatif, commutatif, idempotent et distributif par rapport à la loi ternaire. Le symbole habituel de sommation Σ est défini ici ssi (si et seulement si) il porte sur un nombre impair d'éléments de P (on pose $\Sigma a = a$). P est unitaire s'il possède un neutre pour le produit; si P possède un zéro o pour le produit, c'est un anneau booleen avec le produit initial et la somme: $a \oplus b = a + b + 0$; réciproquement tout anneau booleen est un préanneau booleen avec zéro pour le produit initial et la loi ternaire issue de la somme.

P muni du produit est un inf-treillis pour l'ordre booleen: $a \leq b$ ssi $ab = a$; en fait, la Proposition 2 de [4] montre que P est un treillis distributif relative-

(*) Nella seduta del 18 novembre 1977.

ment complémenté: le sup de a et b est $a \vee b = a + b + ab$ et pour $c \leq d \leq e$, $c + d + e$ est le complément de d relatif à (c, e). Ensuite la Proposition 29 de [4] prouve que la correspondance ainsi établie est biunivoque.

Soit PB la catégorie des préanneaux booleens non triviaux (les morphismes sont les applications respectant la loi ternaire et le produit) et TDRC la catégorie des treillis distributifs relativement complémentés non triviaux (les morphismes respectent le inf et le sup donc le complément relatif): en associant les objets comme indiqué et en conservant les applications sous-jacentes aux morphismes, on obtient un isomorphisme de catégories entre PB et TDRC.

II. Les idéaux maximaux

Un *idéal* de P est une partie stable pour la loi ternaire et pour l'action produit par un élément de P; c'est encore un idéal du treillis P. L'idéal engendré par une partie t non vide, noté $i(t)$, est l'intersection des idéaux contenant t.

Lemme II.1. *$i(t)$ est l'ensemble des $\Sigma a_j b_j$ avec $a_j \in t$ et $b_j \in$ P.*

En particulier pour $t = \{a\}$, $i(a) = a\mathrm{P}$.

Il résulte des Propositions 21 et 22 de [4]:

Proposition II.2. *Soit u un idéal propre et $a \notin u$: il existe un idéal x maximal parmi ceux qui contiennent u et non a; un tel idéal x est maximal dans* P.

Corollaire II.3. *L'intersection des idéaux maximaux contenant la partie t non vide est $i(t)$.*

Corollaire II.4. *Si* P *est avec zéro* 0, *l'intersection r de tous les idéaux maximaux de* P *est* $\{0\}$. *Sinon r est vide.*

Un idéal x est *premier* s'il est propre et si $ab \in x$ implique $a \in x$ ou $b \in x$. Soit u un idéal, $d \in u$ et $c \in$ P: le translaté de u au point c est l'ensemble des $c + d + e$ pour e parcourant u; l'ensemble des translatés de u est canoniquement un anneau booleen de zéro u (Proposition 7 de [4]). Alors:

Proposition II.5. *Les idéaux premiers de* P *sont ses idéaux maximaux.*

III. Représentations ensemblistes

Soit E un ensemble: l'ensemble $\mathscr{P}$(E) des parties de E est un objet de TDRC pour l'intersection et la réunion; avec l'intersection et la loi ternaire issue de la différence symétrique Δ, c'est un objet de PB.

Soit P [resp: Q] un objet de PB [resp: TDRC]: *une représentation ensembliste* de cet objet est un couple (λ, E) où E est un ensemble et λ un morphisme injectif de cet objet vers $\mathscr{P}$(E). En raison de l'isomorphisme de catégories du I:

PROPOSITION III.1. *Les représentations ensemblistes de l'objet* P *de* PB *sont celles de l'objet* P *de* TDRC.

Au préanneau booleen P non trivial on associe l'ensemble X de ses idéaux maximaux. Pour chaque $a \in \mathrm{P}$, B (a) est l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ avec $a \notin x$; $\mathscr{B}$ est l'ensemble de ces B (a).

LEMME III.2. *Pour tous* a, b, *de* P : $\mathrm{B}(a) \cap \mathrm{B}(b) = \mathrm{B}(ab)$ *et* $\mathrm{B}(a) \cup \mathrm{B}(b) = \mathrm{B}(a \vee b)$.

Preuve: Proposition II.5 pour la première égalité et le fait que chaque x respecte la loi $\vee$ pour la seconde.

Soit μ l'application: $a \in \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{B}(a) \in \mathscr{B}$.

PROPOSITION III.3. (μ, X) *est une représentation ensembliste de* P.

Preuve: μ est injectif en raison de la Proposition II.2 et par le lemme précédent c'est un morphisme de TDRC; on termine par la Proposition III.1.

On retrouve ainsi par des voies différentes, la Proposition 24 de [4].

COROLLAIRE III.4. *Pour tous* a, b, c, *de* P:

$$\mathrm{B}(a+b+c) = \mathrm{B}(a)\,\Delta \mathrm{B}(b)\,\Delta \mathrm{B}(c)\,.$$

IV. LE SPECTRE DE P

LEMME IV.1. *i*) *La réunion des éléments de* $\mathscr{B}$ *est* X *et leur intersection est vide*; *ii*) $\mathrm{B}(a) = \mathrm{X}$ ssi *a est neutre*; *iii*) $\mathrm{B}(b) = \varnothing$ ssi *b est zéro*.

Preuve: Pour chaque $x \in \mathrm{X}$, il existe un élément e de P non dans x donc $x \in \mathrm{B}(e)$; si y est dans tous les B (d), il ne contient aucun élément de P ce qui est absurde. *ii*) et *iii*) par l'isomorphisme μ, compte tenu du *i*).

On munit X de la topologie engendrée par $\mathscr{B}$ et on note encore Spec (P) l'espace ainsi obtenu: tout ouvert non vide est réunion d'éléments de $\mathscr{B}$.

THÉORÈME IV.2. $\mathscr{B}$ *est l'ensemble des ouverts quasi-compacts de* Spec (P).

Preuve: Soit α un ouvert quasi-compact: il est réunion d'éléments de $\mathscr{B}$ donc réunion finie de tels éléments et par le Lemme III.2, $\alpha \in \mathscr{B}$. Montrons maintenant que B (a) est quasi-compact: soit $(\mathrm{B}(b_i))$ une famille d'éléments de $\mathscr{B}$ recouvrant B (a) et u l'idéal engendré par les b_i dans P: en raison de la Proposition II.2, u contient a donc il existe une famille finie (b_j) de b_i pour laquelle $a = \Sigma b_j c_j$ (Lemme II.1); la réunion des B (b_j) recouvre B (a).

COROLLAIRE IV.3. Spec (P) *est quasi-compact* ssi P *est unitaire*.

PROPOSITION IV.4. *Lorsque* P *est avec zéro, les éléments de* $\mathscr{B}$ *sont des ofs*.

Preuve: P étant avec zéro, $\varnothing \in \mathscr{B}$ (Lemme IV.1). On considère B (a) et $x \notin \mathrm{B}(a)$: il existe B (b) contenant x et B (c) complément de B (a) relatif à $(\varnothing, \mathrm{B}(a) \cup \mathrm{B}(b))$, B (c) contient x et ne rencontre pas B (a). Ainsi B (a) est aussi fermé.

PROPOSITION IV.5. *Lorsque* P *est sans zéro,* Spec (P) *est irréductible.*

Preuve: $\mathscr{B}$ ne contenant pas $\varnothing$, l'intersection de deux ouverts non vides n'est pas vide.

COROLLAIRE IV.6. *Lorsque* P *est sans zéro,* Spec (P) *est connexe.*

PROPOSITION IV.7. Spec (P) *est accessible. Il est séparé* ssi P *est avec zéro.*

Preuve. Pour tous x, y, distincts, il existe a dans x et non dans y donc B (a) contient y et non x. Si P est avec zéro B (a) est un of donc Spec (P) est séparé; sinon Spec (P) est irréductible à plus d'un élément donc non séparé.

On note V l'application de $\mathscr{P}$ (P) vers $\mathscr{P}$ (X) qui à la partie t associe l'ensemble des x contenant t : V (t) est le fermé complémentaire de la réunion des B (a) pour a parcourant t. On note j l'application de $\mathscr{P}$ (X) vers $\mathscr{P}$ (P) qui à la partie ε de X associe l'intersection des x de ε (on pose $j(\varnothing) = \mathrm{P}$) : $j(\varepsilon)$ est un idéal. Il résulte de la Proposition II.2 et de ses corollaires que:

PROPOSITION IV.8. *j et* V *constituent des bijections décroissantes et réciproques entre les fermés de* X *et les idéaux de* P, *l'idéal vide étant admis* ssi P *n'a pas de zéro.*

COROLLAIRE IV.9. *La fermeture de la partie* ε *de* X *est* V $(j(\varepsilon))$.

Par ce Corollaire ou la Proposition IV.7, tout point de Spec (P) est fermé.
En résumé, quatre cas se présentent:

Spec (P) est un espace booleen ssi P est un anneau booleen unitaire;

Spec (P) est localement booleen, non compact, ssi P est un anneau booleen non unitaire;

Spec (P) a plus d'un élément, est quasi–compact, accessible, irréductible, engendré pas ses ouverts quasi–compacts ssi P est unitaire sans zéro;

Spec (P) est non quasi–compact, accessible, irréductible, engendré par ses ouverts quasi–compacts ssi P est sans neutre et sans zéro.

Dans une prochaine note nous étudierons des aspects fonctoriels de cette notion de spectre d'un préanneau booleen.

RÉFÉRENCES

[1] A. BATBEDAT (1973) – *Préanneaux idempotents*, ser. VIII, *55* (5), et *Préanneaux booleens, Préanneaux zéro–neutres*, ser. VIII, *55* (6), dicembre 1973, « Atti Acc. Naz. Lincei ».

[2] G. BIRKHOFF (1962) – *Lattice theory*, « Amer. Math. Soc. ».

[3] P. R. HALMOS (1963) – *Lectures on boolean algebras*, Van Nostrand.

[4] P. JANIN (1967) – *Une généralisation des structures booleiennes*, Fac. Sc. Lyon, 1966. « Publ. du dép. de Math. Lyon », *4* (1).

[5] D. PONASSE (1967) – *Logique mathématique*, O.C.D.L., Paris.

[6] M. H. STONE (1936) – « Transactions of the American Mathematical Society », *40*, 37 et *41* (1937), 375.