Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Guglielmo Lunardon

## Una classificazione dei piani di traslazione in relazione alle fibrazioni ad essi associate

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **63** (1977), n.6, p. 504–508.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_6_504_0>

**Geometria.** — *Una classificazione dei piani di traslazione in relazione alle fibrazioni ad essi associate* (*). Nota I di GUGLIELMO LUNARDON, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this work, that is divided in two parts (Nota I and Nota II), we refine the classification of Lenz–Barlotti for the translation planes. In this first part we explicit the relation between congruences and spreads and we classify the translation planes of characteristic 2.

È noto che i piani di traslazione appartengono alle classi 4, 5 e 7 della classificazione di Lenz (si veda [8]) e che sono stati fatti vari tentativi (oltre quello generale indicato da A. Barlotti) per raffinare la loro classificazione (si veda [6] e [14]). Nel presente lavoro (che si divide in Nota I e Nota II) sfruttando la rappresentazione di André (cfr. [1]), mediante la quale ogni piano di traslazione si può rappresentare con una terna $(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$ dove $\Sigma'$ è uno spazio proiettivo, $\Sigma$ un iperpiano di $\Sigma'$ ed $\mathcal{F}$ un'opportuna fibrazione (1) di $\Sigma$, e facendo uso delle proprietà delle congruenze si indica un raffinamento contemporaneo della classificazione di Barlotti e di Burn per le classi 4 e 5. Per la classe 7 di Lenz i vari sottotipi sono stati caratterizzati mediante proprietà intrinseche della fibrazione da A. Herzer (si veda [9] o anche [2] e [7]).

Un piano di traslazione può essere rappresentato da più terne $(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F})$; noi osserveremo che è possibile determinare una terna privilegiata $(\Sigma', \Sigma, \mathcal{F}^*)$ tale che $\Sigma'$ sia uno spazio proiettivo sopra un campo primo $F$ (si veda n. 2). Se $F \neq GF(2)$ la fibrazione può non essere regolare e quindi considereremo i casi in cui la fibrazione è $(A, B, C)$-regolare, $(A, B)$-regolare, regolare o non contiene regoli. Esaminando le proprietà algebriche dei quasicorpi, che coordinatizzano $\mathcal{F}$, è possibile ottenere una classificazione dei piani di traslazione mediante le fibrazioni ad essi associate.

Nel n. 4 interpretando alcuni risultati di Burn si determinano le proprietà geometriche necessarie affinché il piano appartenga ad una delle classi considerate. Nel n. 5 si determinano alcuni esempi di fibrazioni. Al termine del lavoro abbiamo esaminato brevemente i tipi di fibrazioni note; rimane ancora aperto il problema di determinare la classe di molti dei piani noti.

Nel corso di questo lavoro adotteremo la terminologia e le notazioni usate in [8].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. mentre l'Autore godeva di una borsa di studio del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1977.

(1) Alcuni Autori chiamano planari tali fibrazioni.

1. Se $\mathcal{U} = (Q\,;\,+,\cdot)$ è un quasicorpo, gli insiemi

$$N = \{\xi \in Q : \forall a\,,\, b \in Q\,;\, \xi\,(ab) = (\xi a)\, b\,,\, \xi\,(a+b) = \xi a + \xi b\}\,;$$
$$Z = \{a \in Q : \forall b \in Q\,;\, ab = ba\}$$
$$N_c = \{\eta \in Q : \forall a\,,\, b \in Q\,;\, (a\eta)\, b = a\,(\eta b)\}$$

si chiameranno rispettivamente *nocciolo*, *centro* e *nucleo centrale* di $\mathcal{U}$. Si vede subito che $N$ è un corpo. Inoltre se $\mathcal{U}$ è un semicorpo, si dimostra che $N_c$ ed $N_c \cap Z$ sono due corpi.

Se vale la relazione $a\,((bc)\,b) = ((ab)\,c)\,b$ si dirà che $\mathcal{U}$ è un quasicorpo di *Bol*. È immediato che se $\mathcal{U}$ è di Bol vale anche la proprietà di semplificazione per gli inversi a destra, cioè $(ab)\,b^{-1} = a$.

Un quasicorpo associativo, il cui centro contiene un sottocorpo, si chiamerà *normalizzato*. Se $\mathcal{U}$ non è né associativo né distributivo, si dirà che $\mathcal{U}$ è un quasicorpo *proprio*.

Se $\Sigma$ è uno spazio proiettivo, una *fibrazione* di $\Sigma$ è una famiglia di sottospazi di $\Sigma$, che chiameremo *fibre*, in cui valgono le seguenti proprietà:

(1) ogni punto di $\Sigma$ è contenuto in un'unica fibra;

(2) se $A$ e $B$ sono fibre distinte si ha $<A\,,B> = \Sigma$.

Se $\Sigma' = \Sigma\,(V'/K)$ (2) è uno spazio proiettivo ed $\mathcal{F}$ è una fibrazione di un iperpiano fissato $\Sigma$ di $\Sigma'$ (per le condizioni necessarie per l'esistenza di $\mathcal{F}$ si veda [1] e [16]), è noto che si può definire un piano affine $\pi = \pi\,(\Sigma', \Sigma\,,\mathcal{F})$ nel seguente modo: i punti di $\pi$ sono i punti di $\Sigma'$ non incidenti con $\Sigma$; le rette di $\pi$ sono i sottospazi di $\Sigma'$ che intersecano $\Sigma$ in un unico elemento di $\mathcal{F}$. Il piano $\pi$ è di traslazione ed è coordinatizzato da un quasicorpo il cui nocciolo contiene un sottocorpo isomorfo a $K$. Si dimostra che ogni piano di traslazione si può rappresentare in tale modo (cfr. [1], [3], [16]) (3).

Se $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ sono spazi proiettivi, per $i = 1\,,2$ sia $\mathcal{F}_i$ una fibrazione di $\Sigma_i$. Diremo che $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$ sono *isomorfe* se esiste una collineazione $\tau$ di $\Sigma_1$ in $\Sigma_2$ tale che $\mathcal{F}_2 = \{A\tau : A \in \mathcal{F}_1\}$.

Se $\mathcal{U} = (Q\,;\,+,\cdot)$ è un quasicorpo e $K$ è un corpo contenuto nel nocciolo di $U$ si ha che $V = Q \times Q$ è uno spazio vettoriale sinistro su $K$ (4). Si ponga

$$J\,(\infty) = \{(0\,,\,a) : a \in Q\}$$
$$J\,(b) = \{(a\,,\,ab) : a \in Q\}$$

dove $b$ è un elemento di $Q$ e sia

$$\mathcal{F}\,(\mathcal{U}\,;K) = \{J\,(i) : i \in Q \;\; o \;\; i = \infty\}\,.$$

(2) Con $\Sigma\,(V'/K)$ si indica lo spazio proiettivo formato dal reticolo dei sottospazi dello spazio vettoriale $V'$ sul corpo $K$. In seguito diremo anche che $\Sigma'$ è uno spazio proiettivo sul corpo $K$.

(3) Nel seguito per semplicità parleremo di piani associati ad una fibrazione $\mathcal{F}$ di uno spazio proiettivo $\Sigma$. Facendo ciò intenderemo sempre di riferirci al piano $\pi\,(\Sigma', \Sigma\,,\mathcal{F})$.

(4) La legge di composizione esterna è definita ponendo $\xi\,(a\,,b) = (\xi a\,,\xi b)$.

PROPOSIZIONE 1 ([9] Hilfssatz 1, a). *$\mathcal{F}(\mathcal{U}; K)$ è una fibrazione di $\Sigma(V/K)$.*

PROPOSIZIONE 2 ([9] Hilfssatz 1, b). *Se $\Sigma$ è uno spazio proiettivo sul corpo $K$, siano $A$, $B$, $C$ tre fibre fra loro distinte di una fibrazione $\mathcal{F}$ di $\Sigma$. Se $\pi$ è il piano di traslazione associato ad $\mathcal{F}$ esiste un quasicorpo $\mathcal{U}$ che coordinatizza $\pi$ ed è tale che:*

(a) *$K$ è contenuto nel nocciolo di $\mathcal{U}$;*

(b) *le fibrazioni $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}(\mathcal{U}; K)$ sono isomorfe mediante un isomorfismo $\tau$ di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}(\mathcal{U}; K)$.*

*Per l'isomorfismo $\tau$ valgono le relazioni $A\tau = J(\infty)$, $B\tau = J(0)$ e $C\tau = J(1)$.*

In seguito quando ci troveremo nelle condizioni di cui alla Proposizione 2 diremo che $\mathcal{F}$ è *$(A, B, C)$-coordinatizzata* da $\mathcal{U}$.

Un insieme non vuoto $\mathcal{R}$ di sottospazi di uno spazio proiettivo $\Sigma$ è un *regolo* se:

1) due elementi di $\mathcal{R}$ sono sghembi e generano $\Sigma$;

2) ogni retta, che interseca tre sottospazi di $\mathcal{R}$, ha un punto in comune con ogni elemento di $\mathcal{R}$ (una tale retta si dirà che è una *trasversale* di $\mathcal{R}$);

3) se $r$ è una trasversale di $\mathcal{R}$, ogni punto di $r$ appartiene a un elemento di $\mathcal{R}$.

Se $A$, $B$, $C$ sono sottospazi mutuamente sghembi che a due a due generano $\Sigma$, è noto che esiste un unico regolo contenente $A$, $B$, $C$; in seguito indicheremo con $\mathcal{R}(A, B, C)$ tale regolo.

Se $\mathcal{F}$ è una fibrazione dello spazio proiettivo $\Sigma$, diremo che $\mathcal{F}$ è *$(A, B, C)$-regolare* se ogni elemento di $\mathcal{R}(A, B, C)$ è una fibra di $\mathcal{F}$.

Se, fissati $A$ e $B$, $\mathcal{F}$ è $(A, B, C)$-regolare per ogni fibra $C$ diversa da $A$ e da $B$, allora $\mathcal{F}$ è *$(A, B)$-regolare.*

Fissato $A$, la fibrazione $\mathcal{F}$ è *$A$-regolare* se è $(A, B)$-regolare per ogni fibra $B$ diversa da $A$.

Diremo che $\mathcal{F}$ è *regolare* se il regolo $\mathcal{R}(A, B, C)$ è contenuto in $\mathcal{F}$ qualunque siano le fibre $A$, $B$, $C$.

Si osservi che se $K = GF(2)$, ogni fibrazione di $\Sigma$ è regolare.

PROPOSIZIONE 3. *Siano $\mathcal{F}$ una fibrazione dello spazio proiettivo sul corpo $K$ ed $\mathcal{U}$ un quasicorpo che $(A, B, C)$-coordinatizza $\mathcal{F}$. Si ha:*

1) ([13], Teorema 1). *$\mathcal{F}$ è $(A, B, C)$-regolare se e solo se $K$ è contenuto nel centro di $\mathcal{U}$;*

2) ([13], Teorema 2). *$\mathcal{F}$ è $(A, B)$-regolare se e solo se $K$ è contenuto nel centro e nel nucleo centrale di $\mathcal{U}$;*

3) ([13], Teorema 3). *Se $K \neq GF(2)$, la fibrazione $\mathscr{F}$ è $A$-regolare se e soltanto se $\mathscr{U}$ è un semicorpo e $K$ è contenuto nel nucleo centrale e nel centro di $\mathscr{U}$*;

4) ([9], Hilfssatz 2). *Se $K \neq GF(2)$, la fibrazione $\mathscr{F}$ è regolare se e soltanto se $\mathscr{U}$ è un corpo alternativo il cui centro contiene $K$.*

2. Una *congruenza* del gruppo $W = W(+)$ è una famiglia $\mathscr{S}$ di sottogruppi non banali di $W$ per cui valgono le seguenti proprietà:

(*a*) ogni elemento non nullo di $W$ appartiene a un unico sottogruppo di $\mathscr{S}$;

(b) se $A$ e $B$ $(A \neq B)$ appartengono a $\mathscr{S}$ si ha $A + B = W$.

Se $\mathscr{S}$ è una congruenza del gruppo $W$, è noto (si veda [1]) che si può definire un piano affine di traslazione $A(W; \mathscr{S})$ nel seguente modo: i punti sono gli elementi di $W$; le rette sono i laterali degli elementi di $\mathscr{S}$; l'incidenza è l'usuale relazione d'appartenenza.

Un *$\mathscr{S}$-endomorfismo* è un endomorfismo $\alpha$ di $W$ tale che $A\alpha \subseteq A$ per ogni sottogruppo $A$ appartenente a $\mathscr{S}$. L'insieme degli $\mathscr{S}$-endomorfismi, munito delle usuali operazioni di somma e di prodotto di endomorfismi, si chiamerà il *nucleo* di $\mathscr{S}$. Si dimostra (si veda [1], 167–168) che se $\mathscr{U}$ è un quasicorpo, che coodinatizza $A(W, \mathscr{S})$, il nucleo di $\mathscr{S}$ è un corpo isomorfo al nocciolo di $\mathscr{U}$.

Si osservi che $W$ si può considerare come uno spazio vettoriale sul nucleo di $\mathscr{S}$ e gli elementi di $\mathscr{S}$ sono sottospazi vettoriali di $W$. Pertanto vale il seguente teorema:

TEOREMA 1. *Sia $\mathscr{S}$ una congruenza del gruppo $W$. Per ogni sottocorpo $K$ del nucleo di $\mathscr{S}$ si ha che $W$ si può considerare come uno spazio vettoriale su $K$ e che $\mathscr{S}$ determina una fibrazione di $\Sigma(W/K)$.*

Quando saremo nelle condizioni del Teorema 1, indicheremo con $\mathscr{S}(K)$ la fibrazione di $\Sigma(W/K)$ determinata da $\mathscr{S}$.

Se $\mathscr{F}$ è una fibrazione dello spazio proiettivo $\Sigma = \Sigma(V/K)$, è immediato che $\mathscr{F}$ determina una congruenza $\mathscr{F}^*$ del gruppo additivo di $V$; inoltre i piani $A(V, \mathscr{F}^*)$ e $\pi(\Sigma', \Sigma, \mathscr{F})$ sono isomorfi (si veda [1], Cap. 8) e il nucleo di $\mathscr{F}^*$ contiene un sottocorpo isomorfo a $K$. Pertanto il nucleo di $\mathscr{F}^*$ e $K$ hanno la stessa caratteristica.

Se $K$ ha caratteristica 2, non si è riusciti a trovare una classificazione delle fibrazioni più sottile della seguente:

TEOREMA 2. *Se il nucleo $N$ della congruenza $\mathscr{F}^*$ ha caratteristica 2, per $\mathscr{F}$ vale una delle seguenti condizioni*:

***a***) *$\mathscr{F}^*(N)$ non ha regoli*;

***b***) *$\mathscr{F}^*(N)$ è $(A, B, C)$-regolare*;

***c***) *$\mathscr{F}^*(N)$ è $(A, B)$-regolare*;

***d***) *$\mathscr{F}^*(N)$ è $A$-regolare*;

***e***) *$\mathscr{F}^*(N)$ è regolare.*

OSSERVAZIONE. Nelle ipotesi del Teorema 2, sia $\mathscr{U}(A, B, C)$ un quasicorpo che $(A, B, C)$-coordinatizza $\mathscr{F}^*(N)$. Se $N \neq GF(2)$ si ha:

1) in $\mathscr{F}$ vale ***a*** se e solo se comunque si scelgano le fibre $A, B, C$ il centro di $\mathscr{U}(A, B, C)$ non contiene $N$;

2) in $\mathscr{F}$ vale ***b*** se e solo se esistono tre fibre $A, B, C$ per le quali il centro di $\mathscr{U}(A, B, C)$ contiene $N$;

3) esistono due fibre $A$ e $B$ per le quali $N$ è contenuto nel centro e nel nucleo centrale di $\mathscr{U}(A, B, C)$ se è solo se in $\mathscr{F}$ vale ***c***;

4) $\mathscr{F}^*(N)$ è $A$-regolare (cioè vale ***d***) se e solo se $\mathscr{U}(A, B, C)$ è un semicorpo tale che il nucleo centrale e il centro di $\mathscr{U}(A, B, C)$ contengono $N$;

5) $\mathscr{U}(A, B, C)$ è un corpo alternativo se e solo se $\mathscr{F}^*(N)$ è regolare (cioè vale ***e***).

## BIBLIOGRAFIA


[1] J. ANDRÉ (1954) – *Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationgruppe*, «Math. Z.», *60*, 156–180.

[2] A. BARLOTTI (1975) – *Representation and construction of projective planes and other geometric structures from projective spaces*, «Jber. Deutsch. Math. Verein», 77, 28–38.

[3] R. H. BRUCK e R. C. BOSE (1964) – *The construction of projective planes in projective spaces*, «J. Algebra», *1*, 85–102.

[4] R. H. BRUCK e R. C. BOSE (1966) – *Linear representation of projective planes in projective spaces*, «J. Algebra», *4*, 117–172.

[5] BRUEN A. (1972) – *Spreads and a conjecture of Bruck and Bose*, «J. Algebra», *23*, 519–532.

[6] R. P. BURN (1969) – *Bol quasifield and Pappus' theorem*, «Math. Z.», *105*, 351–364.

[7] J. COFMAN (1964) – *Configurational propositions in projective spaces*. Proc. Conference on foundation of Geometry. Toronto

[8] P. DEMBOWSKI (1968) – *Finite geometries*. Springer.

[9] A. HERZER (1974) – *Charakterisierung regulärer Faserungen durch Schliessungssätze*, «Arch. Math.», *25*, 662–672.

[10] A. HERZER e G. LUNARDON – *Charakterisierung* (A, B)*-regulärer Faserungen durch Schliessungssätze*. In corso di stampa.

[11] M. J. KALLAHER (1969) – *Projective planes over Bol quasifields*, «Math. Z.», *109*, 53–65.

[12] D. E. KNUTH (1965) – *Finite semifields and projective planes*, «J. Algebra», *2*, 182–217.

[13] G. LUNARDON (1976) – *Proposizioni configurazionali in una classe di fibrazioni*, «Boll. U.M.I.», *13*, 404–413.

[14] T. G. OSTROM (1973) – *Classification of finite translation planes*. In Proc. International Conference on projective spaces. Pullmann Wash., 195–214.

[15] G. PICKERT (1955) – *Projektive Ebenen*. Springer.

[16] B. SEGRE (1964) – *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane*, «Ann. Mat. Pura Appl.», *70*, 1–70.

[17] H. WÄHLING (1974) – *Bericht über Fastkörper*, «Jber. Deutsch. Math. Verein», *76*, 41–103.

[18] M. WALKER (1976) – *A class of translation planes*, «Geometriae Dedicata», *5*, 135–146.

[19] H. ZASSENHAUS (1935) – *Über endliche Fastkörper*, «Abh. Mat. Sem. Hamburg», *11*, 187–220.