Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Saad Adnan

On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classes of Maximal Subgroups. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.3, p. 179–179.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_3_179_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

Algebra. — *On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classes of Maximal Subgroups.* Nota II di SAAD ADNAN, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — Completando i risultati esposti nella nota I dello stesso titolo ([1]) l'autore prova che se il gruppo finito G ha esattamente due classi di coniugazione di sottogruppi massimali, è $G = PQ$ con P e Q rispettivamente p–sottogruppo di Sylow e q–sottogruppo di Sylow (p, q primi), P normale in G e Q ciclico. Inoltre Q opera irriducibilmente su $P/\phi(P)$.

In our note [1], we conjectured that a group which has exactly 2 conjugacy classes of maximal subgroups should have a very special structure—in particular, such a group should not be simple. Now, it has come to our attention that the proof of this conjecture. requires no more tools than those already used in [1]. Thus the aim of this short note is to prove the following theorem.

THEOREM. *If the finite group* G *has exactly 2 conjugacy classes of maximal subgroups then* $G = PQ$ *where* P *and* Q *are* S_p- *and* S_q-*subgroups of* G, $P \lhd G$ *and* Q *is cyclic. Further,* Q *acts irreducibly on* $P/\phi(P)$.

Proof. Let G be a minimal counterexample to the theorem. By the remark following lemma 4 [1], it suffices to show that G is not simple. Let M and N be non-conjugate maximal subgroups of G. For $g \in G - M$, let $p \in \pi(M \cap M^g)$ be a prime. By lemma 5 [1], $p \in \pi(M \cap N)$. Now choose $x \in G - M$ such that the S_p-subgroup H of $M \cap M^x$ has maximal order. By lemma 1 [1], the simplicity of G and the maximality of H, one has $N_G(H) \subseteq N^y$ for some $y \in G$. We conclude that $|M \cap M^g| \leq |M \cap N|$ for all $g \in G - M$. Similarly $|N \cap N^z| \leq |M \cap N|$ for all $z \in G - N$. It is clear now that either $|MM^g| > |G|$ or $|NN^z| > |G|$, which is impossible.

REFERENCES

[1] S. ADNAN (1979) - *On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classes of Maximal Subgroups*, « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei » (8), *66*, pp. 175-178.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1980.