Cataldo Agostinelli

Sulle formule generali della diffrazione delle onde elettromagnetiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.6, p. 492–500.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_6_492_0>

Meccanica. — *Sulle formule generali della diffrazione delle onde elettromagnetiche.* Nota I (*) del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this first paper, making use of the theory on the retarded potentials, we transform the Kirchhoff formula and therefore we apply she to determine the general formulas of the diffraction of whatever electromagnetic waves.

INTRODUZIONE

Sono ben note le difficoltà che sorgono dall'applicazione della formula di Kirchhoff, che esprime il principio di Huygens, al problema della diffrazione delle onde elettromagnetiche attraverso un'apertura praticata in uno schermo, difficoltà dovute alla discontinuità del campo che si manifesta sulla superficie dello schermo attraverso l'orlo dell'apertura, e al fatto che le formule risolutive non verificano più le equazioni di Maxwell [6], [7].

Diversi tentativi sono stati effettuati per superare questa difficoltà. Questo scopo fu per primo raggiunto da Friedrich Kottler [8], mediante opportuna trasformazione della formula di Kirchhoff, coll'introduzione di integrali lineari estesi al contorno dell'apertura dello schermo e con riferimento ad onde monocromatiche.

In questa nota quelle formule sono estese, per mezzo della teoria dei potenziali ritardati, al caso di onde elettromagnetiche qualsiasi.

TRASFORMAZIONE DELLA FORMULA DI KIRCHHOFF.

Se $\boldsymbol{u}(\mathrm{P}, t)$ è un vettore finito e continuo colle sue derivate prime e seconde in un corto dominio **D**, soddisfacente all'equazione delle onde

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

dove c è una velocità costante e Δ è l'operatore di Laplace, allora, come si sa, il valore del vettore $\boldsymbol{u}$ in un punto **P** interno al dominio **D**, limitato da una superficie chiusa σ, è dato dalla formula di Kirchhoff che esprime il principio di Huygens (1)

$$4\pi \boldsymbol{u}(\mathrm{P}, t) = \int_\sigma \left\{ \left[\boldsymbol{u}(\mathrm{Q}, t - r/c) + \frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{u}(\mathrm{Q}, t - r/c) \right] \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \operatorname{grad}_{\mathrm{Q}} \frac{1}{r} \times \boldsymbol{n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}(\mathrm{Q}, \tau)}{\partial \mathrm{Q}} \boldsymbol{n} \right]_{\tau = t - r/c} \right\} d\sigma, \tag{2}$$

(*) Presentata nella seduta del 26 giugno 1980.

(1) Per la dimostrazione di questa formula vedere i riferimenti [1] [2], [3], [4] e [5].

mentre nei punti esterni il secondo membro della (2) è nullo. In essa **Q** è il punto che descrive la superficie σ, $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale *interna* a σ nel punto Q ed $\boldsymbol{r}$ la distanza $\overline{PQ}$.

Questa formula si può scrivere anche:

$$(2') \qquad 4\pi\boldsymbol{u}(P,t) = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\,\boldsymbol{u}(Q, t - r/c)\right]\cdot \operatorname{grad}_Q r \times \boldsymbol{n} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}(Q,\tau)}{\partial Q}\,\boldsymbol{n}\right]_{\tau = t - r/c}\right\} d\sigma .$$

Per trasformare opportunamente l'integranda del secondo membro della (2'), osserviamo che essendo $d\boldsymbol{u}/dQ$ la derivata totale del vettore $\boldsymbol{u}$ rispetto al punto **Q**, contenuto in $\boldsymbol{u}$ sia esplicitamente e sia attraverso $\boldsymbol{r}$, possiamo scrivere identicamente:

$$(3) \qquad \frac{d\boldsymbol{u}}{dQ}\,\boldsymbol{n} = \left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} - K\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ}\right)\boldsymbol{n} + \left(K\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} - \operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{n} + \operatorname{div}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n},$$

dove $K\,d\boldsymbol{u}/dQ$ è la *coniugata* o *trasposta* dell'omografia vettoriale $d\boldsymbol{u}/dQ$.

Ora per note formule di calcolo vettoriale omografico si ha [9]:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} - K\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ}\right)\boldsymbol{n} = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{n},$$

e se $\boldsymbol{a}$ è un vettore costante arbitrario risulta

$$\left(K\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} - \operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a} = -\left(\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \frac{d\boldsymbol{u}}{dQ}\right)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n} =$$

$$= \operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{n} = \operatorname{Rot}(\boldsymbol{u}\wedge)\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n} = K\operatorname{Rot}(\boldsymbol{u}\wedge)\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}.$$

Ne segue, per l'arbitrarietà del vettore costante $\boldsymbol{a}$,

$$\left(K\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ} - \operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{n} = K\operatorname{Rot}(\boldsymbol{u}\wedge)\,\boldsymbol{n}.$$

dove $\operatorname{Rot}(\boldsymbol{u}\wedge)$ è l'omografia vettoriale tale che $\operatorname{Rot}(\boldsymbol{u}\wedge)\,\boldsymbol{a} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{a})$.

L'identità (3), dopo aver moltiplicato ambo i membri per $1/r$, diventa pertanto

$$(4) \qquad \frac{1}{r}\,\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ}\,\boldsymbol{n} = \frac{1}{r}\,K\operatorname{Rot}(\boldsymbol{u}\wedge)\,\boldsymbol{n} - \frac{1}{r}\,\boldsymbol{n}\wedge\operatorname{rot}\boldsymbol{u} + \frac{1}{r}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}.$$

Si trova facilmente che

$$\frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{u}}{dQ}\boldsymbol{n} = \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial Q}\boldsymbol{n} + \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r}\operatorname{grad}_Q r \times \boldsymbol{n},$$

$$\frac{1}{r}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,(\boldsymbol{u}\wedge)\,\boldsymbol{n} = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\wedge\right)\boldsymbol{n} + \left(\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r}\wedge\boldsymbol{n}\right)\wedge\boldsymbol{u},$$

$$\frac{1}{r}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{n} = \frac{1}{r}\operatorname{rot}_Q^*\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{n} + \left(\operatorname{grad}_Q r\wedge\frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\wedge\boldsymbol{n},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \operatorname{div}_Q^*\boldsymbol{u} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r}\times\operatorname{grad}_Q r,$$

dove $\operatorname{rot}_Q^*\boldsymbol{u}$ e $\operatorname{div}_Q^*\boldsymbol{u}$ sono calcolati mantenendo $\boldsymbol{r}$ invariato.

Sostituendo nella (4), dopo alcune semplificazioni si deduce:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial Q}\boldsymbol{n} = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\wedge\right)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\wedge\frac{1}{r}\operatorname{rot}_Q^*\boldsymbol{u} + \frac{1}{r}\operatorname{div}_Q^*\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\times\operatorname{grad}_Q r\cdot\boldsymbol{n} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\times\boldsymbol{n}\operatorname{grad}_Q r,$$

da cui, cambiando ambo i membri di segno, ed aggiungendo quindi ad ambo i membri l'espressione

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\cdot\operatorname{grad}_Q r\times\boldsymbol{n},$$

si ha infine:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\cdot\operatorname{grad}_Q r\times\boldsymbol{n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial Q}\boldsymbol{n} = -\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\wedge\right)\boldsymbol{n} + \tag{5}$$
$$+ \boldsymbol{n}\wedge\frac{1}{r}\operatorname{rot}_Q^*\boldsymbol{u} - \frac{1}{r}\operatorname{div}_Q^*\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} + \left[\boldsymbol{n}\wedge\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\right]\wedge\operatorname{grad}_Q r +$$
$$+ \frac{\partial}{5\,\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\times\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad}_Q r,$$

che è la trasformata dell'integranda della formula di Kirchhoff.

Osserviamo ora che integrando rispetto alla superficie σ, e indicando al solito con $\boldsymbol{a}$ un vettore costante arbitrario, si ha:

$$\int_\sigma \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\wedge\right)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}\cdot d\sigma = \int_\sigma \operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\wedge\boldsymbol{a}\right)\times\boldsymbol{n}\cdot d\sigma\,.$$

Questo integrale, se la superficie σ è chiusa, è ovviamente nullo; ma se in essa supponiamo praticata un'apertura di contorno $\boldsymbol{s}$, detto integrale per il teorema di Stokes si trasforma in un integrale lineare esteso al contorno $\boldsymbol{s}$ dell'apertura:

$$\int_\sigma \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\wedge\right)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}\cdot d\sigma = \oint_s \left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\wedge\boldsymbol{a}\right)\times d\mathrm{Q} = \oint_s d\mathrm{Q}\wedge\frac{\boldsymbol{u}}{r}\times\boldsymbol{a}\,,$$

e, per l'arbitrarietà del vettore costante $\boldsymbol{a}$, si ottiene

$$\int_\sigma \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\wedge\right)\boldsymbol{n}\cdot d\sigma = \oint_s d\mathrm{Q}\wedge\frac{\boldsymbol{u}}{r}\,\cdot$$

Dalla (5) si deduce allora la seguente trasformata del secondo membro della formula di Kirchhoff:

$$\text{(6)}\qquad \int_\sigma \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\cdot\mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\,r\times\boldsymbol{n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\boldsymbol{u}(\mathrm{Q}\,,\tau)}{\partial\mathrm{Q}}\,\boldsymbol{n}\right]_{\tau=t-r/c}\right\}d\sigma =$$

$$= -\oint_s d\mathrm{Q}\wedge\frac{1}{r}\,\boldsymbol{u}(\mathrm{Q}\,,t-r/c) + \int_\sigma\frac{1}{r}\,(\boldsymbol{n}\wedge\mathrm{rot}^*_{\mathrm{Q}}\,\boldsymbol{u} - \mathrm{div}^*_{\mathrm{Q}}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma\,+$$

$$+\int_\sigma\left[\boldsymbol{n}\wedge\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\right]\wedge\mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\,r\cdot d\sigma + \int_\sigma\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\times\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\,r\cdot d\sigma\,.$$

Osservando che $\mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\,r = -\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\,r$, che $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\mathrm{Q})$, che gli integrali sono calcolati considerando variabile il punto **Q** su σ, e tenendo fisso il punto **P**, risulta [2]

$$\int_\sigma\left[\boldsymbol{n}\wedge\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\right]\wedge\mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\,r\cdot d\sigma = \mathrm{rot}_{\mathrm{P}}\int_\sigma\boldsymbol{n}\wedge\frac{\boldsymbol{u}}{r}\,d\sigma\,,$$

$$\int_\sigma\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\times\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\,r\cdot d\sigma = -\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\int_\sigma\frac{\boldsymbol{u}}{r}\times\boldsymbol{n}\cdot d\sigma\,.$$

(2) Infatti si ha:

a) $$\left[\boldsymbol{n}\wedge\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\right]\wedge\mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\,r = \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\,r\wedge\left[\boldsymbol{n}\wedge\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\,r\times\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n} - \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\,r\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right) = \mathrm{div}_{\mathrm{P}}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n} - \frac{d}{d\mathrm{P}}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\boldsymbol{n} =$$

$$= \mathrm{rot}_{\mathrm{P}}\left(\boldsymbol{n}\wedge\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right);$$

b) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\times\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\,r = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\times\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\,r = -\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\times\boldsymbol{n}\right).$$

Pertanto la (6) diventa:

$$(7)\qquad \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r}\right)\cdot \mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\, r \times \boldsymbol{n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}(\mathrm{Q},\tau)}{\partial \mathrm{Q}}\,\boldsymbol{n}\right]_{\tau=t-r/c}\right\} \mathrm{d}\sigma =$$

$$= -\oint_s \mathrm{dQ} \wedge \frac{1}{r}\,\boldsymbol{u}(\mathrm{Q}, t-r/c) + \int_\sigma \frac{1}{r}\left(\boldsymbol{n}\wedge \mathrm{rot}^*_{\mathrm{Q}}\,\boldsymbol{u} - \mathrm{div}^*_{\mathrm{Q}}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \mathrm{rot}_{\mathrm{P}}\int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge \frac{\boldsymbol{u}}{r}\,\mathrm{d}\sigma - \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\int_\sigma \frac{\boldsymbol{u}}{r}\times\boldsymbol{n}\cdot \mathrm{d}\sigma\,.$$

che, a meno del fattore $1/4\,\pi$, rappresenta una soluzione della equazione (1) delle onde.

Applicazione al campo elettromagnetico

Consideriamo ora le equazioni di Maxwell relative al campo elettromagnetico nel vuoto

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mathrm{rot}\,\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \quad && \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad , \quad && \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0\,, \end{aligned}$$

dove i vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ del campo elettrico e del campo magnetico verificano entrambi l'equazione (1) delle onde.

Essendo allora $\mathbf{E}^0(\mathrm{P}, t)$, $\mathbf{H}^0(\mathrm{P}, t)$ una soluzione delle equazioni (8), porremo nella (7), in luogo del vettore $\boldsymbol{u}(\mathrm{Q}, t-r/c)$, una volta il vettore $\mathbf{E}^0(\mathrm{Q}, t-r/c)$ e una seconda volta il vettore $\mathbf{H}^0(\mathrm{Q}, t-r/c)$.

Poichè $\mathrm{div}^*_{\mathrm{Q}}\,\mathbf{E}^0 = 0$, si ottiene intanto:

$$(9)\qquad \int_\sigma \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{E}^0}{r}\right)\cdot \mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\, r\times\boldsymbol{n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial \mathrm{Q}}\,\boldsymbol{n}\right\}\mathrm{d}\sigma = -\oint_s \mathrm{dQ}\wedge\frac{1}{r}\,\mathbf{E}^0 +$$

$$+\int_\sigma \frac{1}{r}\,\boldsymbol{n}\wedge \mathrm{rot}^*_{\mathrm{Q}}\,\mathbf{E}^0\,\mathrm{d}\sigma + \mathrm{rot}_{\mathrm{P}}\int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\frac{1}{r}\,\mathbf{E}^0\,\mathrm{d}\sigma - \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\int_\sigma \boldsymbol{n}\times\frac{1}{r}\,\mathbf{E}^0,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Trasformeremo ancora l'ultimo integrale di questa relazione osservando che per le equazioni (8) di Maxwell si ha

$$\int_\sigma \boldsymbol{n}\times\frac{1}{r}\,\mathbf{E}^0\,\mathrm{d}\sigma = \int c\,\mathrm{d}t\int_\sigma \frac{1}{r}\,\boldsymbol{n}\times\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial t}\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \int c\,\mathrm{d}t\int_\sigma \frac{1}{r}\,\boldsymbol{n}\times \mathrm{rot}^*_{\mathrm{Q}}\,\mathbf{H}^0\cdot\mathrm{d}\sigma\,.$$

Ma

$$\frac{1}{r}\,\mathrm{rot}^*_{\mathrm{Q}}\,\mathbf{H}^0 = \mathrm{rot}^*_{\mathrm{Q}}\,\frac{\mathbf{H}^0}{r} = \mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{H}^0}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{H}^0}{r}\right)\wedge \mathrm{grad}_{\mathrm{Q}}\, r\,,$$

ne segue

$$\int_\sigma \boldsymbol{n}\times\frac{\mathbf{E}^0}{r}\,\mathrm{d}\sigma = \int c\,\mathrm{d}t\int_\sigma \mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{H}^0}{r}\times\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\sigma\,-$$

$$-\int c\,\mathrm{d}t\int_\sigma \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{H}^0}{r}\right)\wedge\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, r\times\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$=\int c\,\mathrm{d}t\oint_s \frac{\mathbf{H}^0}{r}\times\mathrm{dQ} - \int c\,\mathrm{d}t\int_\sigma \frac{\partial}{\partial r}\left(\boldsymbol{n}\wedge\frac{\mathbf{H}^0}{r}\right)\times\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\, r\cdot\mathrm{d}\sigma =$$

$$=\int c\,\mathrm{d}t\oint_s \frac{\mathbf{H}^0}{r}\times\mathrm{dQ} - \int c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{div}_{\mathrm{P}}\int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\frac{\mathbf{H}^0}{r}\,\mathrm{d}\sigma\,,$$

e quindi

$$\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\int_\sigma \boldsymbol{n}\times\frac{\mathbf{E}^0}{r}\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\int c\,\mathrm{d}t\oint_s\frac{\mathbf{H}^0}{r}\times\mathrm{dQ}\,-$$

$$-\,\mathrm{rot}_{\mathrm{P}}\,\mathrm{rot}_{\mathrm{P}}\int c\,\mathrm{d}t\int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\frac{\mathbf{H}^0}{r}\,\mathrm{d}\sigma - \int c\,\mathrm{d}t\,\Delta_{\mathrm{P}}\int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\frac{\mathbf{H}^0}{r}\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Si ha d'altra parte, avendo sempre riguardo alle equazioni di Maxwell (3),

$$\Delta_{\mathrm{P}}\int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\frac{\mathbf{H}^0}{r}\,\mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\Delta_{\mathrm{P}}\,\frac{\mathbf{H}^0}{r}\cdot\mathrm{d}\sigma = \int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{H}^0}{r}\right)\mathrm{d}\sigma =$$

$$= -\int_\sigma \boldsymbol{n}\wedge\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\,\mathrm{rot}^*_{\mathrm{Q}}\,\mathbf{E}^0\right)\mathrm{d}\sigma\,,$$

(3) Si osservi che supposti $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ della forma

$$\mathbf{E}^0 = \Sigma_s\,\mathbf{E}_s(\mathrm{Q})\,e^{ik_s c(t-r/c)}\quad,\quad \mathbf{H}^0 = \Sigma_s\,\mathbf{H}_s(\mathrm{Q})\,e^{ik_s c(t-r/c)}$$

si ha

$$\mathrm{rot}^*_{\mathrm{Q}}\,\mathrm{E}^0 = \Sigma_s\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_s(\mathrm{Q})\cdot e^{ik_s c(t-r/c)} = -\Sigma_s\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}_s(\mathrm{Q})\,e^{ik_s c(t-r/c)}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}^0}{\partial t}\,.$$

e pertanto

$$\operatorname{grad}_P \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathbf{E}^0}{r}\, d\sigma = \operatorname{grad}_P \int c\, dt \oint_s \frac{\mathbf{H}^0}{r} \times dQ \,-$$

$$-\operatorname{rot}_P \operatorname{rot}_P \int c\, dt \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathbf{H}^0}{r}\, d\sigma + \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\operatorname{rot}^*_Q \mathbf{E}^0\right) d\sigma .$$

Sostituendo nella (9) si ottiene infine

$$\int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{E}^0}{r}\right) \cdot \operatorname{grad}_Q r \times \boldsymbol{n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial Q}\boldsymbol{n} \right\} d\sigma = \tag{10}$$

$$= -\oint_s dQ \wedge \frac{\mathbf{E}^0}{r} - \operatorname{grad}_P \int c\, dt \oint_s \frac{\mathbf{H}^0}{r} \times dQ \,+$$

$$+ \operatorname{rot}_P \operatorname{rot}_P \int c\, dt \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathbf{H}^0}{r}\, d\sigma + \operatorname{rot}_P \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathbf{E}^0}{r} \cdot d\sigma ,$$

dove va inteso che è $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}^0(Q, t - r/c)$, $\mathbf{H}^0 = \mathbf{H}^0(Q, t - r/c)$.

In modo analogo si ha

$$\int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{H}^0}{r}\right) \cdot \operatorname{grad}_Q r \times \boldsymbol{n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{H}^0}{\partial Q}\boldsymbol{n} \right\} d\sigma = \tag{11}$$

$$= -\oint_s dQ \wedge \frac{\mathbf{H}^0}{r} + \operatorname{grad}_P \int c\, dt \oint_s \frac{\mathbf{E}^0}{r} \times dQ \,-$$

$$-\operatorname{rot}_P \operatorname{rot}_P \int c\, dt \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathbf{E}^0}{r}\, d\sigma + \operatorname{rot}_P \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathbf{H}^0}{r}\, d\sigma .$$

Le formule (10) e (11), che danno la trasformazione degli integrali di Kirchhoff nel caso di un campo elettrico e di un campo magnetico qualsiasi, sono la generalizzazione delle formule che Kottler aveva assegnate nel caso di campi monocromatici.

Se ora poniamo

$$\begin{aligned} 4\pi \boldsymbol{e} &= -\oint_s dQ \wedge \frac{\mathbf{E}^0}{r} - \operatorname{grad}_P \int c\, dt \oint_s \frac{\mathbf{H}^0}{r} \times dQ \\ 4\pi \boldsymbol{h} &= -\oint_s dQ \wedge \frac{\mathbf{H}^0}{r} + \operatorname{grad}_P \int c\, dt \oint_s \frac{\mathbf{E}^0}{r} \times dQ , \end{aligned} \tag{12}$$

si riconosce facilmente che i vettori $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{h}$ sono soluzioni dell'equazione (1) delle onde, ma non soddisfano le equazioni (8) di Maxwell, poichè risulta

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} \neq 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} \neq 0 .$$

Ciò dipende dal fatto che l'equazione (1) delle onde è più restrittiva rispetto alle equazioni di Maxwell.

Ponendo ancora

$$\mathbf{M}(\mathrm{P}, t) = -\int c\, \mathrm{d}t \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathbf{E}^0}{r} \mathrm{d}\sigma \quad , \quad \mathbf{N}(\mathrm{P}, t) = \int c\, \mathrm{d}t \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \frac{\mathbf{H}^0}{r} \mathrm{d}\sigma \tag{13}$$

e

$$4\pi \mathbf{E}(\mathrm{P}, t) = \operatorname{rot}_{\mathrm{P}} \operatorname{rot}_{\mathrm{P}} \mathbf{N} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}_{\mathrm{P}} \mathbf{M} \tag{14}$$

$$4\pi \mathbf{H}(\mathrm{P}, t) = \operatorname{rot}_{\mathrm{P}} \operatorname{rot}_{\mathrm{P}} \mathbf{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}_{\mathrm{P}} \mathbf{N} . \tag{15}$$

le formule (10) e (11) si possono scrivere

$$4\pi \mathbf{E}(\mathrm{P}, t) = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mathbf{E}^0}{r} \right) \cdot \operatorname{grad}_{\mathrm{Q}} r \times \boldsymbol{n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial \mathrm{Q}} \boldsymbol{n} \right\} \mathrm{d}\sigma + \\ + \oint_s \mathrm{dQ} \wedge \frac{\mathbf{E}^0}{r} + \operatorname{grad}_{\mathrm{P}} \int c\, \mathrm{d}t \oint_s \frac{\mathbf{H}^0}{r} \times \mathrm{dQ} \tag{16}$$

$$4\pi \mathbf{H}(\mathrm{P}, t) = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mathbf{H}^0}{r} \right) \cdot \operatorname{grad}_{\mathrm{Q}} r \times \boldsymbol{n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}^0}{\partial \mathrm{Q}} \boldsymbol{n} \right\} \mathrm{d}\sigma + \\ + \oint_s \mathrm{dQ} \wedge \frac{\mathbf{H}^0}{r} - \operatorname{grad}_{\mathrm{P}} \int c\, \mathrm{d}t \oint_s \frac{\mathbf{E}^0}{r} \times \mathrm{dQ} . \tag{17}$$

Sotto questa forma i vettori $\mathbf{E}(\mathrm{P}, t)$, $\mathbf{H}(\mathrm{P}, t)$ verificano non solo l'equazione (1) delle onde, ma anche, in virtù delle (14) e (15), le equazioni di Maxwell.

Infatti i vettori $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ soddisfano l'equazione delle onde e si ha quindi:

$$4\pi \left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{M} \right) = 0$$

$$4\pi \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{N} \right) = 0 .$$

Si ha inoltre ovviamente $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$.

Le formule (16) e (17) risolvono il problema della diffrazione delle onde elettromagnetiche e mettono inoltre in evidenza la relazione fra il campo elettromagnetico e la formula di Kirchhoff.

RIFERIMENTI

[1] G. A. MAGGI (1914) – *Sul teorema di Kirchhoff traducente il principio di Huygens*, « Annali di Matematica Pura ed Applicata », Vol. XXII.

[2] A. E. H. LOVE (1904) – *Wave motions with Discontinuities at wave front*, « Proc. of The London Math. Society », *1*, 2.

[3] GUTZMAR (1895) – *Ueber den Analytischen Ausdruck des Huygens'schen Princips*, Crelle T. 114.

[4] E. BELTRAMI (1895) – *Sull'espressione data da Kirchhoff al Principio di Huygens*, « Rend. Accad. Naz. Lincei ».

[5] C. AGOSTINELLI (1958) – *Sopra una estensione della formula di Kirchhoff*, « Boll. U.M.I. » *1*.

[6] L. DE BROGLIE (1951) – *Problèmes de Propagations Guidées des Ondes Électromagnétiques*, Chap. VI, Gauthier-Villars.

[7] J. A. STRATTON and L. J. CHU (1939) – *Diffraction Theory of Electromagnetic Waves* « Physical Reviev », *56*.

[8] F. KOTTLER (1923) – *Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen*, Annalen der Phisik, B. 71.

[9] C. BURALI FORTI e R. MARCOLONGO (1929) – *Analisi vettoriale generale*, Zanichelli, Bologna.