Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Michele Ciarletta, Mario Pasquino

Principio di minimo nella dinamica dei materiali viscoelastici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **69** (1980), n.3-4, p. 147–153.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_147_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

Meccanica dei solidi. — *Principio di minimo nella dinamica dei materiali viscoelastici* (*). Nota (**) di MICHELE CIARLETTA e MARIO PASQUINO (***), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We study a minimum principle for viscoelastic materials subjected to dynamic processes with dissipative boundary conditions.

1. INTRODUZIONE

In un precedente lavoro [1] ci siamo occupati di una formulazione variazionale per un problema elastodinamico relativo a materiali ereditari con una dipendenza spaziale nelle equazioni costitutive. Lo studio di questi problemi inizia con alcuni teoremi di reciprocità di Graffi [2], [3], [4]; in seguito Gurtin perviene, sempre per problemi dinamici ad un principio di stazionarietà [5] [6], solo recentemente Reiss [7] ha dato un ulteriore contributo stabilendo un principio di minimo per le equazioni della elastodinamica. In questo lavoro, sulla base delle suddette ricerche, abbiamo formulato per i materiali trattati in [1], in cui abbiamo trascurato, per brevità di calcolo, qualsiasi dipendenza spaziale, un teorema di minimo quale controparte dinamica del principio della energia potenziale elastostatica.

Si perviene a tale risultato seguendo, sostanzialmente, la idea di Reiss [7], formulando cioè un principio di minimo nel dominio trasformato secondo Laplace e, attraverso l'introduzione di una opportuna funzione $G : [0, \infty) \rightarrow R^+$, si ritorna nel dominio originario conservando il carattere di minimo del funzionale trasformato. Tale funzionale si ottiene introducendo nell'energia totale del sistema una funzione peso g che risulta la trasformata di Laplace di G.

Lo studio delle condizioni che garantiscono il principio di minimo per questi materiali con memoria non appare privo di interesse, in quanto si mette in evidenza la necessità di supporre la trasformata di Laplace del tensore che interviene nel nucleo del termine ereditario *definita positiva* rispetto alla funzione G.

Tale condizione, mai espressamente imposta nelle ricerche precedenti, presenta un significativo accordo con gran parte dei modelli costruiti sulla base di considerazioni fisiche.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1980.

(***) Istituto di Ingegneria - Facoltà di Scienze - Università di Salerno.

2. Sia Ω un dominio di R^3 con frontiera $\partial\Omega$ sufficientemente regolare e $\overline{\Omega}$ la sua chiusura. Indicando con $[0, \infty)$ il dominio della variabile temporale e ponendo $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0, \infty)$, la funzione $\boldsymbol{u} : \overline{Q} \to R^3$ rappresenterà il campo vettoriale degli spostamenti e la funzione $\mathbf{F} : \overline{Q} \to R^3$ individuerà il campo vettoriale delle forze di massa, inoltre le equazioni nel moto sono:

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \qquad \text{su} \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{1}$$

F_i è la componente i–esima delle forze di volume, $\rho : \overline{\Omega} \to R^{++}$ è una funzione continua che rappresenta la densità di massa nella configurazione di riferimento, mentre il tensore simmetrico degli sforzi σ_{ij} è dato da:

$$\sigma_{ij}(x, t) = C_{ijkl}(x)\, u_{k,l}(x, t) + \int_{-\infty}^{t} H_{ijkl}(x, t - \tau)\, u_{k,l}(x, \tau)\, d\tau \tag{2}$$

dove $C_{ijkl}(x)$ ed $H_{ijkl}(x, t)$ sono tensori del quarto ordine continui su $\overline{Q}$, che supporremo dotati, per ogni $(x, t) \in Q$, delle seguenti proprietà di simmetria:

$$C_{ijkl}(x) = C_{klij}(x) = C_{jikl}(x) \quad ; \quad H_{ijkl}(x, t) = H_{klij}(x, t) = H_{jikl}(x, t). \tag{3–a}$$

Inoltre $H_{ijkl}(x, t)$ è per ogni $x \in \Omega$ trasformabile secondo Laplace con trasformata $\hat{h}_{ijkl}(x, s)$. Infine, per tutti i tensori simmetrici del secondo ordine ε_{ij}, si ha per ogni $x \in \overline{\Omega}$:

$$C_{ijkl}(x)\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{kl} \geq 0 \tag{3–b}$$

Consideriamo il sistema (1)–(2) integrato dalle condizioni iniziali:

$$u_i(x, t) = u_i^0(x, t) \qquad \text{su} \quad \overline{\Omega} \times (-\infty, 0] \tag{4}$$

ove u_i^0 è una funzione assegnata su $\overline{\Omega} \times (-\infty, 0]$, e dalle condizioni al contorno:

$$\tilde{T}_i = \sigma_{ij}\, n_j = -\lambda_{ij}(x)\, \dot{u}_j(x, t) + \overline{T}_i(x, t) \qquad \text{su} \quad \partial\Omega \times [0, \infty) \tag{5}$$

$n = (n_1, n_2, n_3)$ è il versore della normale esterna a $\partial\Omega$, mentre λ_{ij} è una matrice semidefinita positiva, e $\overline{T}_i$ è una funzione assegnata su $\partial\Omega \times [0, \infty)$.

Indicheremo inoltre con $\mathcal{G}$ l'insieme delle funzioni $g(t)$ definite in $[0, \infty)$ e che si ottengono come trasformate di Laplace di una funzione continua non negativa $G(s)$ e con un numero finito di zeri in $[0, \infty)$, cioè:

$$g(t) = \int_0^{\infty} G(s)\, e^{-st}\, ds\,. \tag{6}$$

Infine supporremo:

a) ben definiti gli integrali

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+\tau+s)\, ds\, d\tau\, dt \quad , \quad \int_0^\infty \int_0^\infty g'(t+\tau)\, dt\, d\tau\,,$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty g''(t+\tau)\, dt\, d\tau$$

b) le funzioni $H_{ijkl}(x, t)$ sono tali che esiste almeno una $G(s)$, la cui trasformata di Laplace $g \in \mathcal{G}$, per cui per ogni $x \in \Omega$ si ha:

$$\int_0^\infty G(s)\, \hat{h}_{ijkl}(x, s)\, \hat{\varepsilon}_{ij}(s)\, \hat{\varepsilon}_{kl}(s)\, ds \geq 0$$

per tutti i tensori simmetrici $\hat{\varepsilon}_{ij}(s)$.

Per giustificare la costruzione del nostro funzionale procederemo formalmente, supponendo sempre possibile operare mediante la trasformata di Laplace. Si perviene pertanto al funzionale $\Phi(\boldsymbol{v}^*, s)$ relativo alle equazioni trasformate (1), (2), (4), (5), così definito:

$$\begin{aligned}(7)\qquad \Phi(\boldsymbol{v}^*, s) = 1/2 \int_\Omega & C_{ijkl}\, v^*_{i,j}\, v^*_{k,l} + \hat{h}_{ijkl}\, v^*_{i,j}\, v^*_{k,l} + 2\, \hat{\sigma}_{ij}\, v^*_{i,j}\, dV + \\ & + s^2/2 \int_\Omega \rho v^*_i v^*_i\, dV - \int_\Omega \rho\,(\hat{f}_i + s u^0_i(x, 0) + \dot{u}_i(x, 0))\, v^*_i\, dV + \\ & + 1/2 \int_{\partial\Omega} \lambda_{ij}\, v^*_i\, v^*_j\, dA - \int_{\partial\Omega} \lambda_{ij}\, u_i(x, 0)\, v^*_j\, dA - \int_{\partial\Omega} \hat{t}_j\, v^*_j\, dA\end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}^*$ rappresenta la trasformata di Laplace di uno spostamento cinematicamente ammissibile $\boldsymbol{u}^*(x, t)$ [1], mentre $\hat{\sigma}_{ij}, \hat{h}_{ijkl}, \hat{f}_i, \hat{t}_i$ rappresentano rispettivamente le trasformate di Laplace di

$$\overline{\sigma}_{ij}(x, t) = \int_{-\infty}^{0} H_{ijkl}(x, t-\tau)\, u_{k,l}(x, \tau)\, d\tau \quad ; \quad H_{ijkl}(x, t)\ ,\ F_i(x, t)\ ,\ \overline{T}_i(x, t)\,.$$

(1) $\boldsymbol{u}^*(x, t)$ rappresenta uno spostamento cinematicamente ammissibile se $\boldsymbol{u}^*(x, t) \in C^{1,1}(Q)$ e $u^*_i, u^*_{i,j}, \dot{u}^*_i$ sono limitate su $\overline{\Omega}\times[0, \infty)$.

È possibile, seguendo un procedimento analogo a quello utilizzato in [8], dimostrare per il funzionale (7) un principio di minimo nello spazio delle trasformate di Laplace delle funzioni $\boldsymbol{u}(x, t)$. Inoltre, operando sul funzionale (7) mediante l'antitrasformata di Laplace, si ottiene, come noto, un funzionale [5] i cui punti di stazionarietà non corrispondono alle soluzioni del problema dato. Per conservare il carattere di minimo del funzionale trasformato operiamo, al pari di Reiss [7], moltiplicando il funzionale (7) per una funzione non negativa $G(s)$ tale che esista una $g(t) \in \mathscr{G}$ per cui valga la (6). Otteniamo pertanto il funzionale:

$$\Phi(\boldsymbol{u}^*, g) = \int_0^\infty G(s)\, \Phi(\boldsymbol{v}^*(x, s))\, ds . \tag{8}$$

È cioè possibile pervenire ad una formulazione per $\Phi(\boldsymbol{u}^*, g)$ in cui compaia esplicitamente solo la dipendenza in $\boldsymbol{u}^*$ e g. Infatti se consideriamo il primo termine del funzionale (7) abbiamo:

$$\begin{aligned} 1/2 \int_0^\infty G(s) \int_\Omega C_{ijkl}\, v^*_{i,j}(s)\, v^*_{k,l}(s)\, dV\, ds &= \\ = 1/2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G(s)\, e^{-s(t+\tau)} \int_\Omega C_{ijkl}\, u^*_{i,j}(t)\, u^*_{k,l}(\tau)\, dV\, dt\, ds\, d\tau &= \\ = 1/2 \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+\tau) \int_\Omega C_{ijkl}\, u^*_{i,j}(t)\, u^*_{k,l}(\tau)\, dV\, dt\, d\tau . & \end{aligned} \tag{9}$$

Procedendo in modo analogo per gli altri termini, è possibile dare al funzionale (8) l'equazione esplicita:

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{u}^*, g) = 1/2 \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+\tau) \int_\Omega [\rho \dot{u}^*_i(x, t)\, \dot{u}^*_i(x, \tau) + \\ + C_{ijkl}(x)\, u^*_{i,j}(x, t)\, u^*_{k,l}(x, \tau)]\, dV\, dt\, d\tau + \\ + 1/2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+\tau+r) \int_\Omega H_{ijkl}(x, r)\, u^*_{i,j}(x, \tau)\, u^*_{k,l}(x, t)\, dr\, dt\, d\tau\, dV + \\ - \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+\tau) \left\{ \int_\Omega (\rho F_i(x, t)\, u^*_i(x, \tau) - \overline{\sigma}_{ij}(x, t)\, u^*_{i,j}(x, \tau))\, dV + \right. \end{aligned} \tag{10}$$

$$+\int_{\partial\Omega} \tilde{T}_i(x,t)\, u_i^*(x,\tau)\, dA\Bigg\}\, dt\, d\tau +$$

$$+\int_0^\infty g(t)\int_\Omega \rho\{\dot{u}_i^*(x,t)\,[u_i^*(x,0)-u_i^0(x,0)]-u_i^*(x,t)\,\dot{u}_i^0(x,0)\}\, dt\, dV+$$

$$+\,g(0)\int_\Omega \rho u_i^*(x,0)\,[1/2\, u_i^*(x,0)-u_i^0(x,0)]\, dV\,.$$

3. Il procedimento formale da noi seguito ci ha portati al funzionale $\Phi(\boldsymbol{u}^*, g)$ definito in (10). È il caso di osservare che questo funzionale si può interpretare come una energia totale pesata mediante la funzione g. In questo numero, prescindendo dalla correttezza o meno del procedimento fin qui seguito, presupporremo l'esistenza di $\Phi(\boldsymbol{u}^*, g)$ e dimostreremo che ogni soluzione del problema ai valori iniziali ed al contorno proposto nel numero 2, rende minimo tale funzionale:

TEOREMA. – *Se* $\{u_i\}$ *è una soluzione del problema* (1); (2), (4), (5), *nelle ipotesi di dati iniziali ed al contorno sufficientemente regolari, allora per ogni spostamento cinematicamente ammissibile* $\boldsymbol{u}^*(x,t)$ *si ha*:

$$\Delta\Phi = \Phi(\boldsymbol{u}^*, g) - \Phi(\boldsymbol{u}, g) \geq 0\,. \tag{11}$$

Dimostrazione. Posto $\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}$ si ha:

$$\Delta\Phi = \int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\int_\Omega \rho\dot{u}_i(x,t)\,\Delta\dot{u}_i(x,\tau)\, dt\, d\tau\, dV + \tag{12}$$

$$+\int_0^\infty g(t)\int_\Omega \rho\,[\dot{u}_i(x,t)\,\Delta u_i(x,0)-\Delta u_i(x,t)\,\dot{u}_i^0(x,0)]\, dt\, dV +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\Bigg\{\int_\Omega \sigma_{ij}(x,t)\,\Delta u_{i,j}(x,\tau)\, dV -$$

$$-\int_{\partial\Omega} \tilde{T}_i(x,t)\,\Delta u_i(x,\tau)\, dA\Bigg\}\, dt\, d\tau -$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty g(t+\tau)\int_\Omega \rho F_i(x,t)\,\Delta u_i(x,\tau)\, dt\, d\tau\, dV +$$

$$+ 1/2 \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+\tau) \int_\Omega [\rho \Delta \dot{u}_i(x,t) \Delta \dot{u}_i(x,\tau) +$$

$$+ C_{ijkl} \Delta u_{i,j}(x,t) \Delta u_{k,l}(x,\tau)] \, dV \, dt \, d\tau +$$

$$+ 1/2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+\tau+r) \int_\Omega H_{ijkl}(x,r) \Delta u_{i,j}(x,\tau) \cdot$$

$$\cdot \Delta u_{k,l}(x,t) \, dr \, dt \, d\tau \, dV +$$

$$+ \int_0^\infty g(t) \int_\Omega \rho \Delta \dot{u}_i(x,t) \Delta u_i(x,0) \, dt \, dV +$$

$$+ 1/2 \, g(0) \int_\Omega \rho \Delta u_i(x,0) \Delta u_i(x,0) \, dV .$$

Dalla (12) integrando per parti il primo integrale, applicando il teorema della divergenza al terzo integrale e tenendo conto del secondo e quarto integrale nonchè della (1), otteniamo:

$$\Delta\Phi = 1/2 \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+\tau) \int_\Omega [\rho \Delta \dot{u}_i(x,t) \Delta \dot{u}_i(x,\tau) + \tag{13}$$

$$+ C_{ijkl} \Delta u_{i,j}(x,t) \Delta u_{k,l}(x,\tau)] \, dt \, d\tau \, dV +$$

$$+ 1/2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(t+\tau+r) \int_\Omega H_{ijkl}(x,r) \Delta u_{i,j}(x,t) \cdot$$

$$\cdot \Delta u_{k,l}(x,\tau) \, dt \, d\tau \, dr \, dV +$$

$$+ \int_0^\infty g(t) \int_\Omega \rho \Delta \dot{u}_i(x,t) \Delta u_i(x,0) \, dt \, dV +$$

$$+ 1/2 \, g(0) \int_\Omega \rho \Delta u_i(x,0) \Delta u_i(x,0) \, dV .$$

Sostituendo la (6) nella (13) abbiamo:

$$\Delta\Phi = 1/2 \int_0^\infty G(s) \int_\Omega \{\rho s^2 \Delta v_i(x,s) \Delta v_i(x,s) + \tag{14}$$

$$+ C_{ijkl} \Delta v_{i,j}(x,s) \Delta v_{k,l}(x,s) + \hat{h}_{ijkl}(x,s) \Delta v_{i,j}(x,s) \Delta v_{k,l}(x,s)\} \, ds \, dV .$$

In base alle ipotesi fatte sulle funzioni $G(s)$ ed $H_{ijkl}(x, t)$ e tenendo conto della (3–b), dalla (14) si ha che $\Delta\Phi \geq 0$ per ogni spostamento $\boldsymbol{u}^*(x, t)$ cinematicamente ammissibile, inoltre $\Delta\Phi = 0$ se e solo se $\boldsymbol{u}^*(x, t) = \boldsymbol{u}(x, t)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CIARLETTA M. e PASQUINO M. (1980) – *Reciprocal and variational theorems for non-local theory of viscoelastic materials*, «Ann. Univ. Ferrara», Sez. VII – Sc. Mat., Vol. XXVI, 219–226.

[2] GRAFFI D. (1939) – *Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni dipendenti dal tempo*, «Ann. Matematica», s. 4, *18*, 173–200.

[3] GRAFFI D. (1946–47) – *Sul teorema di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici*, «Memorie Accad. Sci. Bologna», *18*, 203–209.

[4] GRAFFI D. (1963) – *Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni non stazionari*, «Atti Accad. Sci. Ist. Bol.», s. II, *10*, 33–40.

[5] GURTIN M. E. (1964) – *Variational principles for linear elastodynamics*, «Archive for Rational Mechanics and Analysis», *16*, 34–50.

[6] GURTIN M. E. (1964) – *Variational principles for linear initial value problems*, «Quarterly of Applied Mathematics», *22*, 252–256.

[7] REISS R. (1978) – *Minimum principles for linear elastodynamics*, «Journal of Elasticity», *8*, 35–45.

[8] BENTHIEN G. e GURTIN M. E. (1970) – *A principle of minimum transformed energy in linear elastodynamics*, «Journal of Applied Mechanics», *37*, 1147–1149.