Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Piero Bassanini, Lamberto Cesari

La duplicazione di frequenza nella radiazione laser

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **69** (1980), n.3-4, p. 166–173.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_166_0>

Fisica matematica. — *La duplicazione di frequenza nella radiazione laser.* Nota (*) di PIERO BASSANINI e LAMBERTO CESARI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — A survey of topical results is presented concerning BVPs for quasilinear hyperbolic systems in bicharacteristic form arising from the phenomenon of the duplication of frequency of laser radiation through a nonlinear medium. Cesari's existence proof is outlined together with ensuing iterative methods. Original numerical results for ruby red laser radiation through a quartz crystal are also included.

1. *Il modello matematico.* – Se un raggio laser monocromatico attraversa un cristallo, la luce emergente può mostrare una seconda armonica la cui intensità può essere misurata. Questo fenomeno [9] fu scoperto nel 1961 con un raggio di luce laser rossa di lunghezza d'onda 6940 Å e con una lamina di quarzo, dando luogo ad una componente di luce ultravioletta di lunghezza d'onda 3470 Å. Franken e Ward [10] nella loro memoria del 1963, e Bloembergen [4] nel suo libro del 1977 discutono estensivamente le basi sperimentali e teoretiche di questo fenomeno che è assai complesso. Il cristallo si comporta come un mezzo nonlineare nella trasmissione di un raggio laser di forte intensità. Graffi [11 *b*] nella sua memoria del 1967 suggerì che lo studio di questo fenomeno sia connesso con una forma nonlineare delle equazioni di Maxwell nella lamina, e nella situazione più semplice, propose la forma (1) sotto indicata per tali equazioni. Per queste equazioni Cesari, nel corso della sua corrispondenza con Graffi, ebbe a proporre condizioni alla frontiera, e dunque sulle due superficie della lamina di cristallo.

Nei termini di un'onda piana possiamo pensare che la radiazione proceda nella direzione positiva dell'asse x, prima nello spazio vuoto $x < 0$, poi attraverso al cristallo $0 < x < a$, e poi di nuovo nello spazio vuoto $x > a$. Per $x < 0$ e per $x > a$ la radiazione segue le equazioni di Maxwell lineari

$$-\partial H/\partial x = \varepsilon_0\, \partial E/\partial t \quad , \quad -\partial E/\partial x = \mu_0\, \partial H/\partial t ,$$

ove ε_0, μ_0 sono le solite permissività nel vuoto. Entro la lamina, Graffi propose, come modello iniziale, la seguente forma non lineare delle equazioni di Maxwell

$$(1) \qquad -\partial H/\partial x = \varepsilon_2\, \partial E/\partial t + \eta E\, \partial E/\partial t \quad , \quad -\partial E/\partial x = \mu_0\, \partial H/\partial t ,$$

$$0 < x < a \quad , \quad -\infty < t < +\infty ,$$

dove ε_2, $\eta = 8\pi\varepsilon_0\chi_2$ sono costanti fisiche del cristallo e $k = (\varepsilon_2/\varepsilon_0)^{1/2} > 1$ è l'indice di rifrazione del cristallo.

(*) Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1980.

Si assume che i campi elettrici e magnetici $E(x, t)$, $H(x, t)$ siano continui attraverso le superficie del cristallo $x = 0$ e $x = a$, si assume che l'onda progressiva per $x < 0$ sia conosciuta, una data funzione $\psi(t)$, l'onda in arrivo, e si assume altresì che per $x > a$ l'onda regressiva sia zero. Il lettore troverà nella recentissima esposizione del Graffi [11 *c*] una approfondita discussione del problema fisico, e dettagli circa la riduzione del problema alla presente forma piana e relative referenze. (Vedi anche n. 7 e lavori di Bassanini *et al.* ivi citati).

Il Cesari [5 d] fece vedere che il problema si riduce ad un problema nella sola striscia $0 < x < a$, $-\infty < t < +\infty$, con le equazioni differenziali (1) nella striscia e condizioni alla frontiera per $x = 0$ e per $x = a$, precisamente

$$(2) \qquad (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2} E(0, t) + H(0, t) = 2\tilde{w}(t) \quad , \quad (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2} E(a, t) - H(a, t) = 0,$$
$$-\infty < t < +\infty,$$

$\tilde{w}(t - x/c_0) = (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2} \psi(t - x/c_0)$, $c_0 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. Dunque (1), (2) è un problema iperbolico quasi lineare con dati alla frontiera, un problema essenzialmente nuovo. (Si veda [5 *c*] per referenze).

2. *Teoremi esistenziali*. – Con questo problema come punto di partenza Cesari [5 *abcd*] ha preso in considerazione sistemi iperbolici quasi lineari in una delle due seguenti forme canoniche, la forma canonica « diagonale »

$$(3) \qquad \partial z_i/\partial x + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y, z)\, \partial z_i/\partial y_k = f_i(x, y, z), \qquad i = 1, \cdots, m,$$
$$z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m), \quad 0 < x < a, \qquad y = (y_1, \cdots, y_r) \in \mathbf{R}^r,$$

oppure la forma canonica « bicaratteristica »

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x, y, z) \left[\partial z_j/\partial x + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y, z)\, \partial z_j/\partial y_k \right] = f_i(x, y, z),$$
$$i = 1, \cdots, m.$$

In ciascun caso, Cesari ha considerato condizioni « alla frontiera » della forma

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(y)\, z_j(a_i, y) = \psi_i(y), \qquad y \in \mathbf{R}^r \quad , \quad i = 1, \cdots, m.$$

In altre parole, sono date m combinazioni lineari delle funzioni incognite z_i su m iperpiani arbitrari $x = a_i$, $0 \leq a_i \leq a$, distinti o no. Dunque, per $b_{ij} = \delta_{ij}$ e tutti gli $a_i = 0$, allora il problema « alla frontiera » (5) si riduce al problema di Cauchy (per $x = 0$). Per $A_{ij} = \delta_{ij}$ la forma bicaratteristica (4) si riduce alla forma diagonale (3).

Le condizioni assunte dal Cesari sulle funzioni A_{ij}, ρ_{ij}, f_i, b_{ij}, ψ_i sono state presentate in [5*a*] e non le ripetiamo qui. La maggiore restrizione è che le matrici $[A_{ij}]$, $[b_{ij}]$ siano a diagonale principale dominante come precisato in [5 *abc*]. Sotto tali condizioni Cesari ha dimostrato che, per $a > 0$ sufficientemente piccolo, esiste una ed una sola soluzione per il problema (3,5) così come per il problema (4,5), e che tale soluzione dipende in modo continuo dai dati.

Sistemi iperbolici quasi lineari con $r = 1$ sempre ammettono una forma canonica (4) come è dimostrato in [7]. La forma canonica per il sistema (1), (2) è il seguente sistema simmetrico (cfr. [5*d*])

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&(\partial z_1/\partial x + \rho_1\,\partial z_1/\partial y) + \beta\,(\partial z_2/\partial x + \rho_1\,\partial z_2/\partial y) = 0\,,\\
&\beta\,(\partial z_1/\partial x + \rho_2\,\partial z_1/\partial y) + (\partial z_2/\partial x + \rho_2\,\partial z_2/\partial y) = 0\,,\\
&2^{-1}(h+1)\,z_1(0\,,y) + 2^{-1}(h-1)\,z_2(0\,,y) = \Psi_1(y)\,,\\
&2^{-1}(h-1)\,z_1(a\,,y) + 2^{-1}(h+1)\,z_2(a\,,y) = \Psi_2(y)\,,
\end{aligned}
$$

con $\rho_1 = -\rho_2 = (1 + 2\,\theta)^{1/2}$, $\beta = -\theta^{-1}(\rho_1 - 1 - \theta)$, $2\,\theta = \eta E\,(x\,,t)/\varepsilon_2$

$$\Psi_1(y) = \tilde{w}(ky/c_0)\,,\quad \Psi_2(y) = 0\,,\quad h = k^{-1}\,,\quad 0 < h < 1\,,\quad y = c_0\,t/k\,.$$

3. *La tecnica dimostrativa di Cesari.* - Le linee caratteristiche del sistema (4) possono essere pensate come un sistema di funzioni $g(\xi\,;x\,,y) = (g_{ik}\,,k = 1\,,\cdots,r\,,i = 1\,,\cdots,m) = g\,[z]$, dipendenti da una funzione $z(x\,,y) = (z_1\,,\cdots,z_m)$ di una opportuna classe K, e soddisfacenti le equazioni differenziali ordinarie e dati iniziali

$$\mathrm{d}g_{ik}(\xi\,;x\,,y)/\mathrm{d}\xi = \rho_{ik}(\xi\,,\check{g}_i(\xi\,;x\,,y)\,,z(\xi\,,\check{g}_i(\xi\,;x\,,y)))\,,$$

$$0 \le \xi \le a\,,\quad g_{ik}(x\,;x\,,y) = y_k\,,$$

ove $\check{g}_i = (g_{ik}\,,k = 1\,,\cdots,r)$. Dunque, se prendiamo $g_{ik}(\xi\,;x\,,y) = y_k + h_{ik}(\xi\,;x\,,y)$, allora le funzioni h_{ik} soddisfano le equazioni integrali

$$h_{ik}(\xi\,;x\,,y) = -\int_\xi^x \rho_{ik}(\alpha\,,\check{g}_i(\alpha\,;x\,,y)\,,z(\alpha\,,\check{g}_i(\alpha\,;x\,,y)))\,\mathrm{d}\alpha\,,$$

cioè, esse sono l'elemento unito della trasformazione $T_z : h_{ik} \to H_{ik}$ definita da $H_{ik} = -\int_\xi^x \rho_{ik}\,\mathrm{d}\alpha$.

Consideriamo ora il problema di Cauchy lineare

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x, y, z) \left[\partial u_j / \partial x + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y, z) \, \partial u_j / \partial y_k \right] = f_i(x, y, z),$$

$$u_i(0, y) = \varphi_i(y) \quad , \quad y \in \mathbf{R}^r, \qquad i = 1, \cdots, m,$$

ove $z \in K$ è un qualunque elemento della classe K, ove $\varphi(y) = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ è un qualunque elemento di una data classe $\mathscr{I}$ di possibili valori iniziali. La soluzione $u = u[z, \varphi]$ è il punto unito di una trasformazione $T_{z\varphi} : u \to U$, per la cui ben nota definizione rimandiamo a [1 c] (formula (2.48), p. 323, con $g = g[z]$). Allora, la soluzione $z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$, ossia $z = z[\varphi]$, del problema di Cauchy quasi lineare per il sistema (4) con dati $z_i(0, y) = \varphi_i(y)$, è il punto unito della trasformazione del tipo di Leray–Schauder $z \to u$ con $u = u[z, \varphi]$.

Finalmente, la soluzione $z(x, y)$ del problema ai limiti (4), (5) è ottenuta determinando i suoi dati iniziali φ e questa φ è il punto unito di una trasformazione $\varphi \to \Phi$ definita in [5c] (formula (3.23), p. 347, ove $g = g[z]$, $z = z[\varphi]$). Si dimostra in [1c] che sotto le ipotesi del teorema di esistenza e per $a > 0$ sufficientemente piccola, tutte queste trasformazioni sono contrazioni nella topologia uniforme. Pertanto, esiste una soluzione $z(x, y)$ del problema ai limiti (4, 5) per $a > 0$ sufficientemente piccola. Si dimostra poi che tale soluzione è unica nella classe K. La costante a, insieme alle altre costanti, deve solo soddisfare un sistema di disuguaglianze algebriche.

4. *Il metodo di successive approssimazioni di Bassanini*. – Anzitutto Bassanini in [1a] ha considerato il caso numerico di un'onda laser di 6940 Å e cristallo di quarzo, e ha determinato i valori numerici di a per cui vale il teorema esistenziale. Questo ha richiesto l'analisi delle esplicite disuguaglianze algebriche menzionate sopra, una operazione delicata in pratica che è stata eseguita con l'aiuto del calcolatore IBM 1130 all'Università di Perugia. Egli ha stabilito che il teorema esistenziale certamente vale per spessori a della lamina di quarzo per cui furono fatti esperimenti.

Il Bassanini in [1c] (vedi anche Cesari *et al.* in [6]) ha poi trovato modo di conglobare varie delle trasformazioni di cui al n. 3 in una sola trasformazione $T^* : (z, \varphi) \to (Z, \Phi)$ il cui punto unito è la soluzione $z(x, y)$ del problema (4,5) e i suoi valori iniziali $\varphi(y) = z(0, y)$:

$$\Phi_i(\eta) = [\Phi_i(\breve{g}_i(0; a_i, y))]_{y=\breve{g}_i(a_i; 0, \eta)}, \qquad \eta \in \mathbf{R}^r, \qquad i = 1, \cdots, m,$$

$$\Phi_i(\breve{g}_i(0; a_i, y)) = \Psi_i(y) - \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(y) \, z_j(a_i, y) - \eta_i(a_i, y),$$

$$Z_i(x, y) = \Phi_i(\breve{g}_i(0; x, y)) + \eta_i(x, y), \qquad 0 \le x \le a, \quad y \in \mathbf{R}^r,$$

$$i = 1, \cdots, m,$$

ove le η_i sono le funzioni definite in [5c] (formula (3.20), p. 346). Il Bassanini in [1c] ha poi mostrato che T^* è una contrazione nella topologia uniforme, essenzialmente nelle stesse ipotesi del teorema esistenziale, e pertanto il metodo di approssimazioni successive $(z_{n+1}, \varphi_{n+1}) = T^*(z_n, \varphi_n)$ converge verso la soluzione del problema (4,5).

Questo metodo è stato applicato al problema (1,2) (nella forma (6)) nello stesso caso numerico di cui sopra, dalla Filiaggi [8] all'Università di Perugia (IBM 370) e da Hou e Turner [6] alla Università del Michigan (Andhal 470/6). Il metodo di successive approssimazioni è risultato di rapidissima convergenza.

5. *La prima approssimazione.* – Il metodo di perturbazione usato in fisica per il problema (1,2), ove η è infatti assai piccolo, può essere descritto considerando le serie formali

$$
\begin{aligned}
\text{(7)} \qquad & E(x,t) = E_0(x,t) + \tilde{E}(x,t) + \cdots, \\
& H(x,t) = H_0(x,t) + \tilde{H}(x,t) + \cdots
\end{aligned}
$$

ove E_0, H_0 soddisfano il sistema linearizzato (cioè (1,2) con $\eta = 0$), e $\tilde{E}$, $\tilde{H}$ soddisfano il sistema lineare

$$
-\partial\tilde{H}/\partial x = \varepsilon_2\,\partial\tilde{E}/\partial t + \eta E_0\,\partial E_0/\partial t \quad , \quad -\partial\tilde{E}/\partial x = \mu_0\,\partial\tilde{H}/\partial t ,
$$

con le condizioni ai limiti omogenee corrispondenti alle (2). La prima approssimazione $E_0 + \tilde{E}$, $H_0 + \tilde{H}$ è correntemente usata in fisica ed è in buon accordo coi risultati sperimentali. D'altra parte, la convergenza delle serie (7) non è mai stata dimostrata.

Espressioni per $E_0 + \tilde{E}$, $H_0 + \tilde{H}$ sono state ottenute in [8] e [6], ed assumono forma particolarmente semplice se lo spessore a è un multiplo semi-intero della lunghezza d'onda nel cristallo: allora $\tilde{E}(a,t)$ e $\tilde{H}(a,t)$ risultano proporzionali ad a. Per calcoli analoghi rimandiamo alla Pettini [13] e a [2].

6. *I risultati numerici.* – Qui si danno esempi dei risultati numerici ottenuti col metodo di approssimazioni successive del n. 4 dalla Filiaggi in Perugia, e da Hou e Turner in Ann Arbor per il problema (1,2). In tutti i casi l'onda in arrivo è una radiazione laser, 10^7 volt/meter, « ruby red », 6940 Å nel vuoto. In tutti i casi diamo l'onda $E_0(t)$ all'uscita dal cristallo $(x = a)$ e la corrispondente onda $E_0(t) + F(t)$ nella teoria non lineare, così che $F(t)$ è la perturbazione dovuta alla non linearità.

La duplicazione di frequenza è evidente.

	$t = T \times$	$E_0(t) = 10^7 \times$	$F(t) = 10 \times$
1. cristallo di un'onda $a =$ mm 0.0004506. Si sono adoperati lattici 10×10, 20×20, 50×50. In tutti i casi la stabilità alla 10^{-4} è stata raggiunta alla quarta iterazione, con piena coincidenza con la prima approssimazione (n. 5).	0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0	1.0000 0.8090 0.3090 —0.3090 —0.8090 —1.0000 —0.8090 —0.3090 0.3090 0.8090 1.0000	0.0000 0.4556 0.2816 —0.2816 —0.4556 0.0000 0.4556 0.2816 —0.2816 —0.4556 0.0000
	$t = T \times$	$E_0(t) = 10^7 \times$	$F(t) = 10^2 \times$
2. cristallo di 10 onde, $a =$ mm 0.004506. Si sono adoperati lattici 100×10, 100×20. In tutti i casi la stabilità alla 10^{-4} è stata raggiunta alla quarta iterazione, con piena coincidenza con la prima approssimazione (n. 5).	0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0	1.0000 0.8090 0.3090 —0.3090 —0.8090 —1.0000 —0.8090 —0.3090 0.3090 0.8090 1.0000	0.0000 0.4556 0.2816 —0.2816 —0.4556 0.0000 0.4556 0.2816 —0.2816 —0.4556 0.0000
	$t = T \times$	$E_0(t) = 10^7 \times$	$F(t) = 10^3 \times$
3. cristallo di 100 onde, $a =$ mm 0.04506. Si sono adoperati lattici 1000×10, 1000×20. In tutti i casi la stabilità alla 10^{-4} è stata raggiunta alla quarta iterazione con piena coincidenza con la prima approssimazione (n. 5).	0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0	1.0000 0.8090 0.3090 —0.3090 —0.8090 —1.0000 —0.8090 —0.3090 0.3090 0.8090 1.0000	0.0000 0.4556 0.2816 —0.2816 —0.4556 0.0000 0.4556 0.2816 —0.2816 —0.4556 0.0000

In tutti i calcoli le costanti fisiche sono state scelte come in Bassanini [1*a*],

$$c = c_0 = 3 \cdot 10^8 \quad , \quad k = 1.54 \text{ (quarzo)} \quad , \quad \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$$

$$\mu_0 = 12.566371 \cdot 10^{-7} \quad , \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 k^2 = 20.998146 \cdot 10^{-12} ,$$

$$A_0 = 10^7 \text{ volt/meter} \quad , \quad A_0 \chi_2 = 3.3 \cdot 10^{-8} \text{ non dimensionale,}$$

$$\chi_2 = 0.33 \cdot 10^{-14} \quad , \quad \eta = 0.73433279 \cdot 10^{-24} .$$

Per spessori via via maggiori di quelle considerati sopra può cadere in difetto il teorema di esistenza (nn. 3, 4) e diviene sempre meno realistico trascurare la dispersione.

7. *Ulteriori sviluppi*. – Le equazioni (1, 2) come modello matematico del fenomeno sembrano rappresentare assai bene la realtà fisica in situazioni ove assorbimento e dispersione possono essere trascurati [1 *abcd*]. Per raggi laser attraverso ad un cristallo (di classe 32 D_3) Bassanini e Salvatori [2 *ab*] considerarono un sistema iperbolico 4×2 quasi lineare per cui il teorema esistenziale di Cesari ancora si applica. Se il fenomeno di dispersione è preso in considerazione allora gli stessi autori proposero un problema ai limiti analogo per un sistema quasi lineare di equazioni integro–differenziali per cui essi dimostrarono un teorema di esistenza del tipo di Cesari.

Un'ulteriore estensione del problema (4,5) fu preso in considerazione dalla Pucci [14] sostituendo alle condizioni (5) le seguenti

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} b_{ijk}(y)\, z_j(a_k, y) = \psi_i(y), \quad y \in \mathbf{R}^r, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{8}$$

ove $[a_k]$ è un qualunque sistema di punti in $[0, a]$, $0 \leq a_k \leq a$, $k = 1, \cdots, N$, $m \leq N$, ove $[b_{ijk}]$ è un qualunque sistema di coefficienti, e la condizione che la matrice $[b_{ij}]$ sia a diagonale principale dominante è sostituita dalla condizione che il sistema $[b_{ijk}]$ sia vicino al sistema $\delta_{ij}\ \delta_{ik}$. Di nuovo il teorema di Cesari si estende a questa situazione [14].

Recentemente, Bassanini ha studiato di nuovo il problema ai limiti [4, 8] e mediante ulteriori modificazioni e conglomerazioni delle trasformazioni funzionali del n. 3 ha preso in considerazione una unica trasformazione $T^{**} : (z, h) \rightarrow (Z, H)$ il cui punto fisso è la soluzione z del problema (4, 8) e le relative linee caratteristiche h. Bassanini ha mostrato che tale trasformazione è una contrazione nella topologia uniforme in condizioni leggermente più deboli di quelle del teorema esistenziale del Cesari che pertanto risulta esteso corrispondentemente. Di più il procedimento di approssimazioni successive $(z_{n+1}, h_{n+1}) = T^{**}(z_n, h_n)$ converge, sotto le stesse condizioni, verso la soluzione z del problema (4,8) e relative linee caratteristiche. Vari parametri sono connessi con la definizione della trasformazione T^{**}, e Bassanini ha mostrato che tali parametri possono essere determinati così da minimizzare il tempo necessario per il calcolatore, o il numero di approssimazioni successive (*).

I corrispondenti processi sono modificazioni del metodo del n. 4 la cui convergenza è già soddisfacente come si è detto nei numeri [4] e [6]. Per condizioni ai limiti del tipo di Leontovich–Schelkunov in altri problemi di elettromagnetismo si vedano i lavori di Schelkunov [16] e di Graffi (*loc. cit*). Per altri studi su equazioni di Maxwell non lineari cfr. Rivlin e Venkataraman [15].

(*) Comunicazione alla « International Conference on Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences », Arlington, Texas, 16–20 giugno 1980, sul « Problema di Graffi–Cesari ».

BIBLIOGRAFIA

[1] P. BASSANINI, – (*a*) *A nonlinear hyperbolic problem arising from a question of nonlinear optics*, « Journ. Appl. Math. Phys. (ZAMP) », Part. I, *27* (1976), 409–422; Part. II (with G. Polidori), 815–831. (*b*) *Su una recente dimostrazione circa il problema di Cauchy per sistemi quasi lineari iperbolici*, « Boll. UMI », (5), *13–B* (1976), 322–335. (*c*) *On a recent proof concerning a boundary value problem for quasi linear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*, « Boll. UMI », (5), *14–A* (1977), 325–332. (*d*) *On the existence of smooth solutions of quasi linear hyperbolic systems in the first canonic form*, « Boll. UMI », (5), *15–A* (1978), 214–224.

[2] P. BASSANINI e M. C. SALVATORI – (*a*) *Problemi ai limiti per sistemi iperbolici quasi lineari e generazione di armoniche ottiche*, « Riv. Mat. Univ. Parma », (4), *5* (1979), 55–76. (*b*) *A theorem of existence and uniqueness in nonlinear optics*, « Bollettino U.M.I. », *16–B*, (1979), 597–611.

[3] P. BASSANINI e E. Filiaggi (1979) – *Schemi iterativi e accelerazione della convergenza per operatori di contrazione nel prodotto di due spazi di Banach*, « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », *28*, 249–279.

[4] N. BLOEMBERGEN – *Nonlinear Optics*, Benjamin 1965; 2ª ed. 1977.

[5] L. CESARI – (*a*) *Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari alle derivate parziali*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », (8), *56* (1974), 1–4; (8), *57* (1974), 303–307. (*b*) *A boundary value problem for quasi linear hyperbolic systems*, « Rivista Mat. Univ. Parma », (3), *3* (1974) 107–131. (*c*) *A boundary value problem for quasi linear hyperbolic systems in the bicharacteristic canonic form*, « Annali Scuola Normale Sup. Pisa », (4) *1*, (1974), 311–358. (*d*) *Sistemi iperbolici ed oscillazioni nonlineari* « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », *44* (1974), 139–154. *Nonlinear oscillations under hyperbolic systems*. Dynamical Systems, An International Symposium, Academic Press 1976, *1*, 251–261.

[6] L. CESARI, S. H. HOU, e J. TURNER (1978) – *The duplication of frequency of laser radiation through nonlinear media*, « Report. Univ. of Michigan, Dept of Math ».

[7] M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*. Cremonese 1964.

[8] E. FILIAGGI (1979) – *Metodi numerici per sistemi iperbolici quasi lineari e applicazioni al problema del laser*, « Ph. D. Thesis », Univ. of Perugia.

[9] P. A. FRANKEN, A. E. HILL, C. W. PETERS e G. WEINREICH (1961) – *Generation of optical harmonics*, « Phys. Rev. Letters », 7, 118–119.

[10] P. A. FRANKEN e J. F. WARD (1963) – *Optical harmonics and nonlinear phenomena*, « Rev. Mod. Phys. », *35*, 23–39.

[11] D. GRAFFI – (*a*) *Sulle condizioni al contorno approssimate nell'elettromagnetismo*, « Rend. Accad. Sci. Bologna », *5* (1958), 88–94. (*b*) *Problemi non lineari nella teoria del campo elettromagnetico*, «Mem. Accad. Sci. Modena », *11* (1967), 172–196. (*c*) *Nonlinear partial Differential Equations in Physical Problems*, Pitman 1980.

[12] N. MATTIOLI e M. C. SALVATORI – *Un teorema di esistenza e unicità in ottica non lineare dispersiva*, « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena ». To appear.

[13] G. PETTINI (1968) – *Su una questione di ottica nonlineare*, « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », *17*, 351–364.

[14] P. PUCCI (1979) – *Problemi ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche*, « Bollettino U.M.I. », *16–B*, 119–128.

[15] R. S. RIVLIN e R. VENKATARAMAN (1973) – *Harmonic generations in an electromagnetic wave*, « J. Appl. Math. Phys. », *24*, 661–675.

[16] S. A. SCHELKUNOV – *Electromagnetic Waves*. Van Nostrand 1943.