Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Renato Troilo

Sulla non uniformità delle soluzioni delle equazioni dinamiche di un satellite in orbita circolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.3, p. 143–147.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_3_143_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1981.

Meccanica. — *Sulla non uniformità delle soluzioni delle equazioni dinamiche di un satellite in orbita circolare.* Nota di RENATO TROILO, presentata (*), dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — In the case of a satellite in a circular orbit the solutions of Euler's equations are not single-valued for arbitrary initial values.

L'applicazione delle serie di Lie alle equazioni di Eulero consente di determinare la soluzione formale per serie di potenze del problema del corpo rigido con punto fisso sia nel caso pesante che nel caso newtoniano (1). Segue naturalmente il problema della convergenza di tale soluzione formale e del suo prolungamento analitico e quindi dello studio della singolarità delle soluzioni. Nel caso del solido pesante un classico risultato di Liapunov stabilisce che le soluzioni delle equazioni di Eulero sono uniformi, per condizioni iniziali arbitrarie, se e solo se esiste un quarto integrale primo algebrico, ossia nei soli casi ben noti di Poinsot, Lagrange–Poisson e della Kowaleskaya. Oggetto di questa nota è la ricerca di soluzioni uniformi, per condizioni iniziali arbitrarie, del problema del satellite in orbita circolare. Si dimostra che, per condizioni inziali arbitrarie, non esistono soluzioni uniformi sia nel caso asimmetrico che in quello simmetrico. A tale risultato si perviene anche imponendo che i valori inziali siano reali e tali che $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$, $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 > 0$ e $\vartheta_1 c_1 + \vartheta_2 c_2 + \vartheta_3 c_3 = 0$.

1. SATELLITE IN ORBITA CIRCOLARE

Si consideri un satellite soggetto a una sollecitazione newtoniana di centro O e il cui baricentro G descriva un'orbita circolare. Indicando con $\boldsymbol{c}$ il versore di OG e con $\boldsymbol{\vartheta}$ la velocità angolare del moto circolare di G, le equazioni di Eulero sono

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \sigma\boldsymbol{\omega} = \eta\boldsymbol{c} \times \sigma\boldsymbol{c} , \\ \dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\vartheta}), \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{\omega} . \end{cases}$$

(*) Nella seduta del 14 marzo 1981.

(1) Almeno nel caso che la serie di Mac Cullagh del potenziale sia arrestata al secondo termine, il che fornisce una approssimazione sufficiente in meccanica celeste quando siano trascurabili i termini del secondo ordine nel rapporto tra il diametro del satellite e la sua distanza dal centro di attrazione. Cfr. [1].

in cui η è una costante dipendente dalla massa attraente, dalla costante gravitazionale e dal raggio dell'orbita. Proiettando su una terna centrale d'inerzia, si ottiene il sistema

$$
(2) \qquad \begin{cases}
A_i \dfrac{d\omega_i}{dt} - (A_{i+1} - A_{i+2})\, \omega_{i+1}\, \omega_{i+2} = \eta\, (A_{i+2} - A_{i+1})\, c_{i+1}\, c_{i+2}\,, \\[2ex]
\dfrac{dc_i}{dt} = (\omega_{i+2} - \vartheta_{i+2})\, c_{i+1} - (\omega_{i+1} - \vartheta_{i+1})\, c_{i+2}\,, \\[2ex]
\dfrac{d\vartheta_i}{dt} = \omega_{i+2}\, \vartheta_{i+1} - \omega_{i+1}\, \vartheta_{i+2}\,,
\end{cases}
$$

nel quale $i = 1, 2, 3$ e vale la convenzione per cui, se compare un indice $k > 3$, esso è da sostituirsi con l'indice $k' = k - 3$.

2. Caso del satellite asimmetrico

Si supponga il satellite asimmetrico e sia $A_1 > A_2 > A_3 > 0$. È facile verificare che una soluzione particolare del sistema (2) può scegliersi nella forma

$$
(3) \qquad \omega_i = \frac{\alpha_i}{t} \quad , \quad c_i = \frac{\beta_i}{t} \quad , \quad \vartheta_i = \frac{\gamma_i}{t} \qquad (i = 1, 2, 3)\,.
$$

Le costanti α_i, β_i e γ_i debbono quindi soddisfare alle seguenti equazioni ottenute sostituendo le soluzioni (3) nelle equazioni di Eulero

$$
(4) \qquad \begin{cases}
A_i\, \alpha_i = -(A_{i+1} - A_{i+2})\, \alpha_{i+1}\, \alpha_{i+2} + (A_{i+1} - A_{i+2})\, \eta \beta_{i+1}\, \beta_{i+2}\,, \\
\beta_i = -(\alpha_{i+2} - \gamma_{i+2})\, \beta_{i+1} + (\alpha_{i+1} - \gamma_{i+1})\, \beta_{i+2}\,, \\
\gamma_i = -\alpha_{i+2}\, \gamma_{i+1} + \alpha_{i+1}\, \alpha_{i+2} \qquad (i = 1, 2, 3)\,.
\end{cases}
$$

Una soluzione del sistema precedente è costituita da

$$
(5) \qquad \begin{cases}
\alpha_i = -\left[\dfrac{A_{i+1}\, A_{i+2}}{(A_{i+2} - A_i)(A_i - A_{i+1})}\right]^{1/2}, \qquad (i = 1, 2, 3) \\[2ex]
\gamma_i = \beta_i = 0\,.
\end{cases}
$$

Ne consegue che soluzioni particolari del sistema differenziale (2) sono le seguenti

$$
(6) \qquad \begin{cases}
\omega_i = -\dfrac{A_2'\, A_3'}{t} \quad , \quad \omega_2 = -\dfrac{A_1'\, A_3'}{t} \quad , \quad \omega_3 = -\dfrac{A_1'\, A_2'}{t}\,, \\[2ex]
c_i = \vartheta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)\,,
\end{cases}
$$

in cui si è posto

$$A_i' = \left[\frac{A_i}{A_{i+1} - A_{i+2}}\right]^{1/2}.$$

Il metodo di Liapunov per la ricerca di soluzioni uniformi prevede la considerazione di soluzioni della (2) del tipo $\omega_i + \delta\omega_i$, $c_i + \delta c_i$, $\vartheta_i + \delta\vartheta_i$. Sostituendo quest'ultime nel sistema (2), sottraendo dalle equazioni così ottenute quelle corrispondenti del sistema (2) e quindi sostituendo le soluzioni particolari (6), si ottiene il sistema

$$(7)\quad \begin{cases} A_i\, t \dfrac{d}{dt}\, \delta\omega_i = -\left[A_i\,(A_{i+1} - A_{i+2})\right]^{1/2} \cdot (A_{i+1}'\, \delta\omega_{i+1} + A_{i+2}'\, \delta\omega_{i+2}), \\ t \cdot \dfrac{d\delta c_i}{dt} = A_i'\, [A_{i+2}'\, \delta c_{i+2} - A_{i+1}'\, \delta c_{i+1}], \\ t\, \dfrac{d\delta\vartheta_i}{dt} = A_i'\, [A_{i+2}'\, \delta\vartheta_{i+2} - A_{i+1}'\, \delta\vartheta_{i+1}]. \end{cases}$$

Tale sistema ammette soluzioni del tipo

$$(8)\qquad \delta\omega_i = R_i\, t^k \quad , \quad \delta c_i = S_i\, t^k \quad , \quad \delta\vartheta_i = T_i\, t^k \qquad (i = 1, 2, 3)$$

dove k è una radice dell'equazione

$$(9)\qquad k^2\,(k-1)^4\,(k+1)^2\,(k+2) = 0$$

che si ottiene uguagliando a zero il determinante Δ (2) del sistema lineare nelle incognite R_i, S_i e T_i ottenuto sostituendo le soluzioni (8) nelle (7). È inoltre noto (3) che affinché le soluzioni $\delta\omega_i$ δc_i e $\delta\vartheta_i$ del sistema (7) siano a un sol valore è necessario e sufficiente che le radici dell'equazione (9) siano tutte reali intere e che ogni radice di molteplicità m annulli tutti i minori di ordine $9 - m + 1$ estraibili dal determinante Δ. Si verifica che ciò non avviene per le radici della (9) se non nel caso non significativo $A_i = A_2 = A_3$. Ne consegue che $\delta\omega_i$, δc_i e $\delta\vartheta_i$ non sono uniformi e quindi non lo sono neppure $\omega_i + \delta\omega_i$, $c_i + \delta c_i$ e $\vartheta_i + \delta\vartheta_i$. Tale non uniformità dimostrata nel caso particolare delle accennate soluzioni, prova il seguente

TEOREMA 1. *Nel caso del satellite asimmetrico in orbita circolare non sussiste l'uniformità delle soluzioni delle equazioni di Eulero per condizioni iniziali arbitrarie.*

(2) Il primo membro dell'equazione (9) rappresenta Δ a meno di una costante moltiplicativa dipendente da A_1, A_2, A_3 non nulla nel caso asimmetrico.

(3) Cfr. [2] pag. 59.

3. Caso del satellite simmetrico

Considerando un satellite simmetrico sia $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = C > A$. In tal caso nel sistema (2) occorre sostituire alle prime tre equazioni le seguenti

$$\left\{\begin{aligned} & A\frac{d\omega_1}{dt} - (A - C)\,\omega_2\,\omega_3 = \eta\,(C - A)\,c_2\,c_3\,, \\ & A\frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\,\omega_1\,\omega_3 = \eta\,(A - C)\,c_1\,c_3\,, \\ & C\frac{d\omega_3}{dt} = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Si verifica che vi sono soluzioni particolari del tipo

$$\left\{\begin{aligned} & \omega_2 = \frac{i}{t}\quad,\quad c_1 = \frac{i}{t}\sqrt{\frac{A}{(C-A)\,\eta}}\quad,\quad c_3 = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{A}{(C-A)\,\eta}} \\ & \omega_1 = \omega_3 = c_2 = \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Con un procedimento del tutto analogo a quello usato nel paragrafo precedente si ottiene, posto $\alpha = \sqrt{\frac{C-A}{A}}$, il sistema

$$\left\{\begin{aligned} & t\frac{d\delta\omega_1}{dt} = \alpha^2\,i\delta\omega_3 - \alpha\sqrt{\eta}\;\delta c_2\,, \\ & t\frac{d\delta\omega_2}{dt} = \alpha\delta c_1 + i\alpha\delta c_3\,, \\ & \frac{d\delta\omega_3}{dt} = 0\,, \\ & t\frac{d\delta c_1}{dt} = i\delta c_3 - \frac{1}{\alpha}\,[\delta\omega_2 - \delta\vartheta_2]\,, \\ & t\frac{d\delta c_2}{dt} = \frac{1}{\alpha}\,[\delta\omega_1 - i\delta\omega_2 - \delta\vartheta_1 + i\delta\vartheta_3]\,, \\ & t\frac{d\delta c_3}{dt} = \frac{i}{\alpha}\,[\delta\omega_2 - i\delta\vartheta_3] + i\delta c_1\,, \\ & t\frac{d\delta\vartheta_1}{dt} = -\,i\delta\vartheta_3\,, \\ & \frac{d\delta\vartheta_2}{dt} = 0\,, \\ & t\frac{d\delta\vartheta_3}{dt} = i\delta\vartheta_1\,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Questo sistema ammette ancora soluzioni del tipo (8), essendo k radice dell'equazione

$$k^2(k+1)(k-1)^2(k^2+1)(k^2+k+2)=0\,.$$

Poichè quest'ultima non ha solo radici reali intere, non esistono soluzioni uniformi $\delta\omega_i$, δc_i e $\delta\vartheta_i$. In modo analogo a quanto dimostrato per il satellite asimmetrico si può concludere col seguente

TEOREMA 2. *Anche nel caso del satellite simmetrico in orbita circolare non sussiste l'uniformità delle soluzioni delle equazioni di Eulero per condizioni iniziali arbitrarie.*

Osservazione I.

Quanto prima dimostrato prova la non uniformità delle soluzioni delle equazioni di Eulero del satellite per condizioni iniziali arbitrarie. Ciò non esclude, naturalmente, che si possano avere casi di uniformità se i valori iniziali soddisfano a certe condizioni. Può porsi il problema di vedere se la condizione che essi siano reali (e per il resto arbitrari) e che risulti inizialmente $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$, $\vartheta_1^2+\vartheta_2^2+\vartheta_3^2>0$ e $\vartheta_1 c_1+\vartheta_2 c_2+\vartheta_3 c_3=0$ comporti l'uniformità delle soluzioni. Si può verificare con un metodo del tutto simile a quello di Liapunov [4], che ciò non sussiste neppure sotto tali condizioni.

Osservazione II.

Si nota che si può generalizzare il risultato del Teorema 1 al caso di un satellite in orbita qualsiasi, almeno finché continui a valere la terza delle (1). È il caso di moti del baricentro, non Kepleriani, dovuti a forze diverse da quelle newtoniane agenti su di esso. La generalizzazione deriva dal fatto che nella dimostrazione del Teorema 1 non interviene la costanza di η. Si può concludere quindi col seguente

TEOREMA 3. *Nel caso del satellite asimmetrico, qualsivoglia sia l'orbita, valendo la terza delle* (1), *non sussiste l'uniformità delle soluzioni per condizioni iniziali arbitrarie.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BALLI R. (1975) – *Rotazioni non uniformi di un satellite in orbita circolare*, « Atti Acc. dei Lincei », serie VIII, Vol. LVII.

[2] LEIMANIS E. (1965) – *The general problem of the motion of coupled rigid body*, Springer Tracts in « Nat. Ph. », Berlin–Heidelberg.

(4) Cfr. [2] pag. 62–65.