Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Angela De Sanctis, Giuliano Sorani

Coomologia di un campo vettoriale mai nullo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **71** (1981), n.6, p. 162–165.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_71_6_162_0>

Equazioni a derivate parziali. — *Coomologia di un campo vettoriale mai nullo.* Nota di ANGELA DE SANCTIS e GIULIANO SORANI, presentata (*) dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — We write a cohomological resolution of the sheaf $\mathscr{S}$ of solutions of the differential operator $\partial/\partial x_n$ on a manifold M and study the cohomology groups $H^0(M, \mathscr{S})$ and $H^1(M, \mathscr{S})$.

Sia M una varietà differenziabile reale di dimensione finita n, dotata di campi vettoriali reali di classe $\mathscr{C}^\infty$ mai nulli. Indichiamo con $\mathscr{C}^\infty$ M lo spazio delle funzioni differenziabili su M, con $\mathscr{A}^0$ il fascio dei germi delle funzioni differenziabili su M e con $\mathscr{A}^p$, $1 \leq p \leq n$, quello delle p-forme differenziali su M.

Scopo di questo studio è quello di scrivere la coomologia di un campo vettoriale mai nullo, inteso come un operatore differenziale lineare del primo ordine $X : \mathscr{C}^\infty M \to \mathscr{C}^\infty M$, che, come è noto, per una opportuna scelta di coordinate locali $x_1, \cdots, x_n$, può essere rappresentato localmente come $\partial/\partial x_n$.

Il metodo usato è quello che permette di scrivere la coomologia di un qualunque operatore differenziale lineare a partire da una risoluzione coomologica del nucleo, come illustrato in [2].

Per ogni $g \in \mathscr{A}^0$ l'equazione $(\partial f/\partial x_n) = g$ ammette sempre soluzioni locali, che si ottengono integrando g rispetto ad x_n e aggiungendo un germe di funzione nelle sole variabili $x_1, \cdots, x_{n-1}$. In generale non vi sono però soluzioni globali: infatti, p. es., su $\Omega = \{z \in \mathbf{R}^2 : 0 < \|z\| < 1\}$, con coordinate ρ, θ, l'equazione $(\partial f/\partial \theta) = 1$ non ha soluzioni globali continue.

STUDIO LOCALE

Indicato ancora con X l'operatore differenziale indotto su $\mathscr{A}^0$, sia $\mathscr{S}$ il nucleo di quest'ultimo, cioè il fascio dei germi di funzioni f per i quali, scelto opportunamente il sistema di coordinate attorno al centro, risulta $(\partial f/\partial x_n) = 0$. Occorre scrivere una risoluzione coomologica del fascio $\mathscr{S}$.

Indichiamo con $D : \mathscr{A}^0 \to \mathscr{A}^1$ l'operatore differenziale lineare del primo ordine definito, per ogni $f \in \mathscr{A}^0_m$ con $m \in M$, da $D(f) = (\partial f/\partial x_n)\, dx_n$.

Questo operatore differenziale ammette una naturale estensione $D : \mathscr{A}^p \to \mathscr{A}^{p+1}$, $p = 1, \cdots, n-1$, definita in coordinate locali da

$$D\left(\sum_{i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \cdots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right) = \sum_{i_1 \cdots i_p} \frac{\partial a_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x_n}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_n$$

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1981.

per ogni
$$\sum_{i_1\cdots i_p} a_{i_1\cdots i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p}\in \mathscr{A}^p_m$$

con $m\in \mathrm{M}$, dove, ora e nel seguito, le successioni di indici $(i_1,\cdots,i_p)$ sono in ordine strettamente crescente, $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n$.

Nella definizione si sottointende che $x_1,\cdots,x_n$ è il sistema di coordinate locali attorno ad m che permette di rappresentare X come $\partial/\partial x_n$.

Ovviamente l'operatore differenziale introdotto è di quadrato nullo.

Lemma 1. *Sia* $\check{\mathscr{A}}^p$, $p=1,\cdots,n-1$, *l'insieme dei germi delle p-forme differenziali su* M *tale che ogni elemento di* $\check{\mathscr{A}}^p_m$ *con* $m\in\mathrm{M}$, *rispetto al sistema di coordinate scelto attorno ad m, è del tipo*
$$\sum_{i_1\cdots i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x_1,\cdots,x_{n-1})\, \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

con $i_j\neq n$ *per ogni* $j=1,\cdots,p$.

$\check{\mathscr{A}}^p$ *è un sottofascio del fascio* $\mathscr{A}^p$.

Dimostrazione. Basta osservare che tale insieme è il nucleo dell'operatore differenziale lineare del primo ordine $\mathrm{P}:\mathscr{A}^p\to\mathscr{A}^p$ definito da
$$\mathrm{P}\left(\sum_{i_1\cdots i_p} a_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)=\sum_{j_1\cdots j_p\neq n}\frac{\partial a_{j_1\cdots j_p}}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_p}+$$
$$+\sum_{k_1\cdots k_{p-1}n} a_{k_1\cdots k_{p-1}n}\,\mathrm{d}x_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k_{p-1}}\wedge\mathrm{d}x_n$$

per ogni $\sum_{i_1\cdots i_p} a_{i_1\cdots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\in\mathscr{A}^p$. q.e.d.

Il lemma precedente permette di prendere in esame i fasci quozienti $\mathscr{A}^p/\check{\mathscr{A}}^p=\mathscr{C}^p$.

Indichiamo ancora con $\mathrm{D}:\mathscr{A}^0\to\mathscr{C}^1$ l'operatore differenziale quoziente in arrivo di $\mathrm{D}:\mathscr{A}^0\to\mathscr{A}^1$.

Di dimostrazione immediata è il seguente:

Lemma 2. *L'operatore differenziale* $\mathrm{D}:\mathscr{A}^p\to\mathscr{A}^{p+1}$, $p=1,\cdots,n-2$, *può essere quozientato a* $\mathrm{D}:\mathscr{C}^p\to\mathscr{C}^{p+1}$; *inoltre è ben definito* $\mathrm{D}:\mathscr{C}^{n-1}\to\mathscr{A}^n$ *quoziente in partenza di* $\mathrm{D}:\mathscr{A}^{n-1}\to\mathscr{A}^n$. q.e.d.

Dai lemmi 1 e 2 segue quindi:

Teorema. *Sia* ε *l'inclusione canonica di* $\mathscr{S}$ *in* $\mathscr{A}^0$.

La successione:
$$0\to\mathscr{S}\xrightarrow{\varepsilon}\mathscr{A}^0\xrightarrow{\mathrm{D}}\mathscr{C}^1\xrightarrow{\mathrm{D}}\mathscr{C}^2\xrightarrow{\mathrm{D}}\cdots\xrightarrow{\mathrm{D}}\mathscr{C}^{n-1}\xrightarrow{\mathrm{D}}\mathscr{A}^n\to 0$$

è esatta.

Dimostrazione. – È chiaro che anche l'operatore differenziale quoziente è di quadrato nullo.

La coppia $\mathscr{A}^0 \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathscr{C}^1 \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathscr{C}^2$ è esatta. Infatti, se $\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{d}x_i\right] \in \mathscr{C}^1$ cioè $\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{d}x_i\right]$ è una classe di equivalenza rappresentata da $\sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{d}x_i \in \mathscr{A}^1$ e inoltre

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_n} \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_n\right] = 0$$

allora

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathrm{d}x_i\right] = [a_n \, \mathrm{d}x_n] .$$

Quindi, scelta $f \in \mathscr{A}^0$ in modo da soddisfare l'equazione $(\partial f/\partial x_n) = a_n$, si ha

$$[a_n \, \mathrm{d}x_n] = \left[\frac{\partial f}{\partial x_n} \, \mathrm{d}x_n\right] = \mathrm{D}(f) .$$

Sia $p = 1, \cdots, n-3$, la coppia $\mathscr{C}^p \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathscr{C}^{p+1} \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathscr{C}^{p+2}$ è esatta. Infatti, se

$$\left[\sum_{i_1 \cdots i_{p+1}} a_{i_1 \cdots i_{p+1}} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{p+1}}\right] \in \mathscr{C}^{p+1}$$

e

$$\left[\sum_{i_1 \cdots i_{p+1}} \frac{\partial a_{i_1 \cdots i_{p+1}}}{\partial x_n} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{p+1}} \wedge \mathrm{d}x_n\right] = 0 ,$$

allora

$$\left[\sum_{i_1 \cdots i_{p+1}} a_{i_1 \cdots i_{p+1}} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{p+1}}\right] = \left[\sum_{j_1 \cdots j_p n} a_{j_1 \cdots j_p n} \, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p} \wedge \mathrm{d}x_n\right] .$$

Per $j_1, \cdots, j_p \neq n$, scelta $b_{j_1 \cdots j_p} \in \mathscr{A}^0$ in modo da soddisfare $(\partial b_{j_1 \cdots j_p}/\partial x_n) = a_{j_1 \cdots j_p n}$, risulta

$$\left[\sum_{j_1 \cdots j_p n} a_{j_1 \cdots j_p n} \, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p} \wedge \mathrm{d}x_n\right] = \mathrm{D}\left(\left[\sum_{j_1 \cdots j_p} b_{j_1 \cdots j_p} \, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p}\right]\right).$$

$\mathrm{D} : \mathscr{C}^{n-1} \to \mathscr{A}^n$ è surgettiva. Infatti, per ogni $f \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \in \mathscr{A}^n$, scelta $a \in \mathscr{A}^0$ con $(\partial a/\partial x_n) = f$, si ha

$$f \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \mathrm{D}([a \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}]) .$$

q.e.d.

Studio dell' $H^0(M, \mathscr{S})$ e dell' $H^1(M, \mathscr{S})$

La risoluzione ottenuta per il fascio $\mathscr{S}$ permette il calcolo della coomologia di M a valori in $\mathscr{S}$ collegata con l'equazione $Xf = g$. In particolare risulta subito quanto segue.

Lo spazio $H^0(M, \mathscr{S})$ è quello degli integrali primi differenziabili del campo vettoriale X. Interessante è il caso in cui $H^0(M, \mathscr{S}) = R^k$, dove k è il numero delle componenti connesse di M. Questo caso si presenta in particolare se esiste un insieme attrattore per X contenuto in una sola 1–varietà integrale del campo vettoriale mai nullo.

Lo spazio $H^1(M, \mathscr{S})$ è nullo se e solo se per ogni $g \in \mathscr{C}^\infty M$ l'equazione $Xf = g$ ha soluzioni $f \in \mathscr{C}^\infty M$, cioè $X\mathscr{C}^\infty M = \mathscr{C}^\infty M$. In [1] J. J. Duistermaat e L. Hörmander danno altre condizioni topologiche necessarie e sufficienti a tal fine.

Bibliografia

[1] Duistermaat J. J. e Hörmander L. (1972) – *Fourier integral operators*. II, « Acta mathematica », *128*, 183–269.

[2] Sorani G. (1974) – *Operatori differenziali sulle varietà*, « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano », *44*, 173–209.