Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alma D'Aniello

Sull'esistenza di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in alcuni gruppi semplici, II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **74** (1983), n.1, p. 1–6.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_74_1_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1983.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 gennaio 1983

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Sull'esistenza di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in alcuni gruppi semplici*, II. Nota di ALMA D'ANIELLO, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We prove that in the Mathieu groups there is a unique conjugacy class of nilpotent self-normalizing subgroups, the class of the 2-Sylow subgroups. In the Janko group J_1 there are no nilpotent self-normalizing subgroups.

1. Questa nota è il proseguimento della Nota I dallo stesso titolo [9]. Si studia l'esistenza di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti (sottogruppi di Carter) nei gruppi di Mathieu e nel gruppo di Janko J_1. Si prova che:

a) nei gruppi di Mathieu esiste una ed una sola classe di coniugio di sottogruppi di Carter e coincide con la classe dei 2–sottogruppi di Sylow;

b) nel gruppo di Janko J_1 non esistono sottogruppi di Carter.

2. Le proprietà dei gruppi di Mathieu che saranno usate nel seguito sono tutte contenute, a meno di avviso contrario, in [6].

PROPOSIZIONE 4. *I gruppi di Mathieu* M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24} *hanno un'unica classe di coniugio di sottogruppi di Carter, che coincide con la classe dei 2–sottogruppi di Sylow.*

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1983.

Dimostrazione. Da [6] segue che i 2–sottogruppi di Sylow nei gruppi di Mathieu sono autonormalizzanti. Quindi basta verificare che ogni altro sottogruppo nilpotente non è autonormalizzante. Distinguiamo i vari casi:

a) M_{11}.

Da [6] segue che:

i) i p-sottogruppi di Sylow ($p \neq 2$) sono autocentralizzanti ma non autonormalizzanti;

ii) se x ha periodo 3, $|C(x)| = 18 = 2 \cdot 3^2$.

Per (*i*) M_{11} non possiede sottogruppi nilpotenti, che non siano p–gruppi, il cui ordine sia divisivile per 9, 5 o 11. Per (*ii*) M_{11} non contiene sottogruppi nilpotenti, che non siano p–gruppi, il cui ordine sia divisibile per 4. Pertanto un eventuale sottogruppo nilpotente massimale C, che non sia un p–gruppo, deve essere contenuto nel centralizzante di un gruppo d'ordine 3, cioé in un gruppo isomorfo a $S_3 \times Z_3$, e quindi è del tipo $Z_3 \times Z_3$, o del tipo $Z_2 \times Z_3$. Un gruppo del tipo $Z_3 \times Z_3$ è normale in $S_3 \times Z_3$, quindi non è autonormalizzante. Sia C del tipo $Z_2 \times Z_3$, cioé

$$C = \langle y \rangle \times \langle z \rangle \quad , \quad \text{con } y^2 = z^3 = 1 .$$

Allora $C \leq C_{M_{11}}(y) \simeq GL(2,3)$. Ma i soli sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in $GL(2,3)$ sono i normalizzanti dei 2–sottogruppi di Sylow [2] che sono distinti da C. Segue

$$C < N_{C(y)}(C) \leq N_{M_{11}}(C) .$$

b) M_{12}.

I p–sottogruppi di Sylow ($p \neq 2$) non sono autonormalizzanti. Sia H un sottogruppo nilpotente, tale che $p, q \mid |H|$ (p, q primi distinti). Allora $|Z(H)|$ è divisibile per p, q, onde H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di ordine pq.

Supponiamo $p < q$. Per M_{12} potrebbe aversi:

(*i*) $q = 11$. Impossibile, perché M_{12} non ha elementi di ordine 22, 33, 55.

(*ii*) $p = 3, q = 5$. Impossibile, perché M_{12} non ha elementi di ordine 15.

(*iii*) $p = 2, q = 5$. Allora H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di ordine 10. Dalla tabella ([6] p. 227) segue $|H| = 10$.

(*iv*) $p = 2, q = 3$. Allora H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di ordine 6. Dalla tabella segue $|H| = 6$ o $|H| = 12$.

Esaminiamo il caso (*iii*). Allora H è contenuto nel normalizzante N di un 5–Sylow, cioé [6] in un gruppo di Frobenius d'ordine 20. Ne segue $[N : H] = 2$, cioé $H \triangleleft N$, e H non é autonormalizzante.

Esaminiamo il caso (*iv*). Sia $|H| = 6$. Se H è generato da un elemento della forma (6) (3) (2), H è contenuto in un M_{11} (che fissa l'oggetto lasciato fermo da H) e quindi non è autonormalizzante. Se H è generato da un elemento della forma $(6)^2$, H è contenuto propriamente nel centralizzante C di tale elemento, con C di ordine 12, onde $H \lhd C$ e H non è autonormalizzante.

Sia $|H| = 12$. Allora H è il centralizzante di un elemento v di tipo $(6)^2$. Ne segue che v^2 è di tipo $(3)^4$ e v^3 è di tipo $(2)^6$. Di conseguenza $H < C_{M_{12}}(v^3) \simeq \langle v^3 \rangle \times S_5$ e H non è autonormalizzante [1].

c) M_{22}.

Da [6] segue che i p-sottogruppi di Sylow ($p \neq 2$) di M_{22} non sono autonormalizzanti.

Sia H un sottogruppo nilpotente tale che $p, q \mid |H|$ (p, q primi distinti). Allora $|Z(H)|$ è divisibile per p, q, onde H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di ordine pq. Sia $p < q$. Poiché l'ordine del centralizzante di un q-elemento, $q \in \{5, 7, 11\}$, è q, deve essere $p = 2, q = 3$. Pertanto H è contenuto nel centralizzante di un elemento v di periodo 6. Poiché $|C(v)| = 12$, $C(v)$ è nilpotente anzi addirittura abeliano, per cui, se $H < C(v)$, H non è autonormalizzante. Sia $H = C(v)$. Allora $H < C(v^2) \simeq Z_3 \times A_4$. Segue $C(v^2) \leq N_{M_{22}}(H)$, e quindi H non è autonormalizzante.

d) M_{23}.

Da [6] segue che i p-sottogruppi di Sylow ($p \neq 2$) di M_{23} non sono autonormalizzanti.

Sia H un sottogruppo nilpotente tale che $p, q \mid |H|$ (p, q primi distinti). Allora H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di ordine pq. Sia $p < q$. Potrebbe aversi:

(*i*) $q = 23$. Impossibile perché M_{23} non ha elementi di ordine $23\,p$.

(*ii*) $q = 11$. Impossibile perché M_{23} non ha elementi di ordine $11\,p$.

(*iii*) $q = 7$. Poiché l'ordine del centralizzante di un 7-elemento è 14, deve essere $p = 2$. Se v è un elemento di ordine 14 in M_{23} allora $|C(v)| = 14$, onde $H = C(v)$. Inoltre H è contenuto in $N(\langle v^2 \rangle)$ che è isomorfo a $[Z_{14}]\,Z_3$. Pertanto H non è autonormalizzante.

(*iv*) $q = 5$. Poiché l'ordine del centralizzante di un 5-elemento è 15, deve essere $p = 3$. Se v è un elemento di ordine 15 in M_{23} $|C(v)| = 15$, pertanto $H = C(v)$. Inoltre H è contenuto in $N(\langle v^3 \rangle)$, che è isomorfo a $[Z_{15}]\,Z_4$, ed è normale in esso, onde H non è autonormalizzante.

(*v*) $p = 2, q = 3$. H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento v di tipo $(6)^2\,(3)^2\,(2)^2$. Poiché $|C(v)| = 12$, H è contenuto in un coniugato di $\mathrm{Stab}_{M_{23}}(23) \simeq M_{22}$, quindi, per quanto osservato precedentemente, non è autonormalizzante.

e) M_{24}.

Da [6] segue che i p–sottogruppi di Sylow ($p \neq 2$) di M_{24} non sono autonormalizzanti.

Sia H un sottogruppo nilpotente di M_{24}, tale che $p, q \mid |H|$ (p, q primi distinti). Allora H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di ordine pq. Sia $p < q$. Potrebbe aversi:

(*i*) $q = 23$ oppure $q = 11$. Impossibile perché M_{24} non ha elementi di ordine $23\,p$ oppure $11\,p$.

(*ii*) $q = 7$. Poichè il centralizzante di un 7–elemento ha ordine 42, deve essere $p = 2$ oppure $p = 3$. Se $p = 2$, H è il centralizzante di un elemento di tipo (14) (7) (2), quindi è contenuto in un coniugato di M_{23} e non è autonormalizzante. Se $p = 3$, allora H è contenuto, anzi coincide col centralizzante di un elemento v di ordine 21. H è contenuto in $N_{M_{24}}(\langle v^3 \rangle)$ che è isomorfo a $S_3 \times F$, con F gruppo di Frobenius di ordine 21.

Sia $F = [Q]\,T$, con Q ciclico di ordine 7 e T di ordine 3. Allora $N_{M_{24}}(H)$ contiene un sottogruppo di ordine 3, controimmagine di T in $N(\langle v^3 \rangle)$, che non è contenuto in H, onde H non è autonormalizzante.

(*iii*) $q = 5$. Poiché il centralizzante di un 5–elemento ha ordine 60, deve essere $p = 2$ oppure $p = 3$. Sia $p = 2$. Allora $H \leq C(v)$ con v elemento di ordine 10. Poiché $|C(v)| = 20$ e $C(v) \leq C(v^2) \simeq Z_5 \times A_4$, $C(v)$ è nilpotente. Pertanto se $H < C(v)$, H non è autonormalizzante. Sia $H = C(v)$. Allora $H = C(v) \leq C(v^2)$. Ma un sottogruppo di ordine 20 in $Z_5 \times A_4$ è normale, onde H non è autonormalizzante. Se $p = 3$, H è il centralizzante di un elemento di tipo (15) (5) (3), quindi è contenuto in un coniugato di M_{23} e non è autonormalizzante.

(*iv*) $q = 3$, $p = 2$. H è contenuto nel centralizzante di un elemento v di periodo 6 di M_{24}. Ci sono due classi di coniugio di elementi di periodo 6 in M_{24}, l'una costitutita dagli elementi di tipo $(6)^4$, l'altra costituita dagli elementi di tipo $(6)^2 (3)^2 (2)^2$. Distinguiamo i due casi. Sia v di tipo $(6)^4$. Allora $|C(v)| = 24$. Essendo $C(v) \leq C(v^2) \simeq Z_5 \times A_4$, $C(v)$ è nilpotente. Pertanto se $H < C(v)$, H non è autonormalizzante. Sia $H = C(v)$. Allora $C(v) \leq C(v^3) = N$, dove $N/0_2(N) \simeq S_5$. Poiché v^2 ha periodo 3 anche $v^2\, 0_2(N)$ ha periodo 3 in $N/0_2(N)$. Esiste quindi $x \in N$ tale che $x 0_2(N)$ ha periodo 2 e trasforma $v^2\, 0_2(N)$ nel suo inverso. Consideriamo $0_2(N) \langle v^2 \rangle$. In esso $\langle v^2 \rangle$ è un 3–sottogruppo di Sylow insieme con $\langle x^{-1} v^2 x \rangle$, onde esiste $t \in 0_2(N)$ tale che $t^{-1} \langle x^{-1} v^2 x \rangle t = \langle v^2 \rangle$, cioé $(xt)^{-1} \langle v^2 \rangle (xt) = \langle v^2 \rangle$, con $xt 0_2(N)$ di periodo 2. Si avrà $(xt)^{-1} v^2 (xt) = v^4$ e quindi $xt \in N_{C(v^3)}(\langle v^2 \rangle)$. Essendo $xt \in C(v^3)$ si ha: $(xt)^{-1} v (xt) = (xt)^{-1} v^3 v^2 v^2 (xt) = (xt)^{-1} v^3 (xt) ((xt)^{-1} v^2 (xt))^2 = v^3 (v^4)^2 = v^3 v^2 = v^{-1}$, onde $(xt)^{-1} \langle v \rangle (xt) = \langle v \rangle$. Ne segue $(xt)^{-1} C(\langle v \rangle)(xt) = C(\langle v \rangle)$; ma $C(\langle v \rangle) = C(v)$ onde $(xt)^{-1} C(v)(xt) = C(v)$, cioè xt normalizza $C(v)$, pur essendo $xt \notin C(v^2)$ e quindi $xt \notin C(v)$. Perciò $C(v)$ non è autonormalizzante.

Sia v di tipo $(6)^2\,(3)^2\,(2)^2$. Allora $|\,C(v)\,| = 24$. Essendo $C(v) \leq C(v^2)$, $C(v)$ è nilpotente. Pertanto se $H < C(v)$, H non è autonormalizzante. Sia $H = C(v)$. v fissa due elementi, possiamo supporre, a meno di coniugio, che v fissi 23 e 24. Allora $C_{M_{22}}(v) \leq C_{M_{24}}(v)$ e inoltre $C_{M_{22}}(v) \leq C_{M_{22}}(v^3) \leq M_{24}$ con $C_{M_{22}}(v^3) \simeq [E_{16}]\,S_4$, dove E_{16} denota il gruppo abeliano elementare di ordine 16. Sia K la controimmagine di E_{16} in $C_{M_{22}}(v^3)$. Poiché v^2 ha periodo 3, anche $v^2 K$ ha periodo 3 in $C_{M_{22}}(v^3)/K$. Pertanto esiste $x \in C_{M_{22}}(v^3)$ tale che xK trasforma $v^2 K$ nel suo inverso. Analogamente al caso precedente si trova un elemento $t \notin K$ tale che $xt \in N_{M_{24}}(C(v))$ e $xt \notin C(v)$, onde $C(v)$ non è autonormalizzante.

3. Le proprietà del gruppo di Janko J_1 che saranno usate nel seguito son tutte contenute in [6].

PROPOSIZIONE 5. *Il gruppo di Janko* J_1 *non contiene sottogruppi di Carter.*

Dimostrazione. I p–gruppi contenuti in J_1 non sono autonormalizzanti, Sia H un sottogruppo nilpotente tale che $p\,,q \mid |H|$; allora H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di ordine pq. Se è $p < q$, per J_1 potrebbe aversi:

(*i*) $q \in \{7\,,11\,,19\}$. Impossibile perché il centralizzante di un q–elemento ha ordine q.

(*ii*) $p = 2\,, q = 3$. Allora H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di periodo 6. Dalla tabella (p. 228) segue $|\,H\,| = 6$.

(*iii*) $p = 2\,, q = 5$. Allora H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di periodo 10. Dalla tabella segue $|\,H\,| = 10$.

(*iv*) $p = 3\,, q = 5$. Allora H deve essere contenuto nel centralizzante di un elemento di ordine 15. Dalla tabella segue $|\,H\,| = 15$.

In ciascuno dei casi (*ii*), (*iii*), (*iv*) risulta $H \leq N(G_3)$ oppure $H \leq N(G_5)$, con $G_k\,(k = 3\,,5)$ opportuno k–sottogruppo di Sylow di J_1. Da [6] segue che $N(G_3) \simeq N(G_5) \simeq D_1 \times D_2$. con D_1 e D_2 gruppi diedrali di ordine 6 e 10 rispettivamente. Sia

$$D_1 = \langle a\,, b \,/\, a^3 = b^2 = 1\,, b^{-1}\,ab = a^{-1}\rangle$$

$$D_2 = \langle \bar{a}\,, \bar{b} \,/\, \bar{a}^5 = \bar{b}^2 = 1\,, \bar{b}^{-1}\,\bar{a}\bar{b} = \bar{a}^{-1}\rangle\,.$$

Nel caso (*ii*) H è isomorfo ad un coniugato di $A = \langle a\,, \bar{b}\rangle$.
Nel caso (*iii*) H è isomorfo ad un coniugato di $B = \langle \bar{a}\,, b\rangle$.
Nel caso (*iv*) H è isomorfo ad un coniugato di $C = \langle a\,, \bar{a}\rangle$.
In ogni caso H non è autonormalizzante.

Bibliografia

[1] M. C. Bellani Tamburini e L. Di Martino (1976) – *I sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti di* S_n *e di* A_n, « Rend. Sc. Ist. Lomb. », *A 110*, 235–241.

[2] M. C. Bellani Tamburini e L. Di Martino (1975) – *Sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in* $GL_2(q)$ e $GL_3(q)$, « Rend. Sc. Ist. Lomb. », *A 109*, 213–227.

[3] R. Carter (1961) – *Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups*, « Math. Z. », *75*, 136–139.

[4] W. Gaschütz (1963) – *Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen*, « Math. Z. », *80*, 300–305.

[5] B. Huppert (1967) – *Endliche Gruppen I*, Berlin–Heidelberg, New York.

[6] S. A. Syskin (1980) – *Abstract properties of the simple sporadic groups*, « Uspekhi Mat. Nauk », 35: *5*, 181–212. (Trad. ingl.: Russian Math. Surv., 35: *5*, 209–246 (1980)).

[7] M. Suzuki (1962) – *On a class of doubly transitive groups*, « Ann. of Math. », *75*, *1*, 105–145.

[8] J. Tits (1962) – *Ovoïdes et Groupes de Suzuki*, « Arch. Math. », XIII, 187–198.

[9] A. D'Aniello (1982) – *Sull'esistenza di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in alcuni gruppi semplici I*, « Rend. Sc. Acc. Naz. Lincei », LXIII, 6.