Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sergio Bressan

Sulla propagazione e sull'evoluzione di onde nei solidi termoelastici. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **76** (1984), n.6, p. 367–375.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_76_6_367_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

Fisica matematica. — *Sulla propagazione e sull'evoluzione di onde nei solidi termoelastici* (*). Nota I di SERGIO BRESSAN (**), presentata (***) dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — According to a thermodynamic theory proposed by G. Grioli, we consider the problem of determining the solutions for the growth of acceleration waves in an elastic body. At first we determine a property of the velocities of waves propagation and we determine some limitations for the free energy; then we resolve the above mentioned problem for the «small» waves working on the iperacceleration waves.

È ben nota la modifica dell'equazione di Fourier (che lega il flusso di calore alla temperatura) presentata da Cattaneo in [1], riferendosi al caso puramente termico, per eliminare il paradosso della velocità infinita della propagazione del calore.

Ritenendo inscindibili gli aspetti meccanico e termico dei fenomeni fisici, G. Grioli ha proposto in [2] una modifica della classica legge di Fourier per la termoelasticità, con lo scopo di estendere a questo caso l'eliminazione del detto paradosso. Egli ha inoltre applicato in [3] la teoria che ne deriva al caso dei fluidi non viscosi e ai corpi elastici poco deformabili.

Altri autori (vedi ad esempio [4]) hanno studiato le possibili velocità di propagazione di onde termomeccaniche nel caso di corpi iperelastici con deformazioni finite nell'ambito della suddetta teoria.

Entro questa visuale, in precedenti Note [5], [6], ho studiato l'evoluzione di una generica onda termomeccanica propagantesi in un fluido non viscoso, in quiete e sede di un flusso di calore $\boldsymbol{q}$ stazionario. In quel lavoro ho ricavato le equazioni differenziali che reggono l'evolversi dell'ampiezza di tali onde, ricavandone in alcuni casi le soluzioni.

Nel presente lavoro mi occupo dell'evoluzione di piccole onde termomeccaniche, nei solidi termoelastici, attorno ad uno stato di equilibrio dal punto di vista meccanico che, però, non è necessariamente stato di equilibrio termico ($\boldsymbol{q} \neq 0$). Preliminarmente scrivo il sistema lagrangiano costituito dalle equazioni dinamiche e da un'equazione del calore equivalente a quella (euleriana) pro-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M.

(**) Indirizzo dell'autore: Istituto di Matematica Applicata dell'Università di Padova, via Belzoni 7.

(***) Nella seduta del 15 giugno 1984.

posta da G. Grioli. Questo sistema risulta costituito da sette equazioni differenziali nelle sette funzioni incognite $x^r(y, t)$, $q^r(y, t)$ $(r = 1, 2, 3)$ e $T(y, t)$. Considero la temperatura e il flusso di calore come derivate prime rispetto al tempo di due nuove funzioni (incognite) del posto e del tempo in modo che le derivate di ordine massimo per tutte le incognite che compaiono nel suddetto sistema lagrangiano siano le derivate seconde; poi operando in modo opportuno, sostituisco ad esso il sistema derivato in cui compaiono le derivate terze di tutte le incognite. Faccio ciò perchè questo sistema ne implica uno ridotto di quattro equazioni in quattro incognite. Ogni sua soluzione appartiene a una soluzione del sistema completo. Per noti teoremi [7], una superficie d'onda Σ (di equazione $\phi(y, t) = 0$), connessa con un'onda di iperaccelerazione relativa a questo secondo sistema, è connessa pure con onde di accelerazione relative al sistema differenziale di partenza.

Dopo aver rilevato alcune proprietà per le velocità di propagazione delle onde e delle limitazioni per il potenziale termodinamico, mi pongo il problema dell'evoluzione dell'ampiezza di tali onde. Indi scrivo il sistema differenziale a cui soddisfano le ampiezze di «piccole» onde di accelerazione e ne dò le soluzioni in alcuni casi, anche on $\boldsymbol{q} \neq 0$.

È noto [8] che l'evoluzione dell'ampiezza delle onde di ordine due e tre avviene nello stesso modo se i coefficienti principali del sistema quasi-lineare di partenza sono funzioni soltanto del posto. L'indipendenza dei coefficienti principali dal tempo esplicito si verifica certamente se si studiano le «piccole» onde attorno ad una soluzione stazionaria mediante il sistema differenziale linearizzato. Quindi i risultati ottenuti per le onde di discontinuità di ordine tre valgono anche per le «piccole» onde di accelerazione.

§ 2. Equazioni della termoelasticità. Condizioni sulle velocità di propagazione e sul potenziale termodinamico nel caso di isotropia termica.

Sia $\mathscr{C}$ un continuo in movimento rispetto ad uno spazio inerziale S_3. Chiamo C la sua configurazione attuale e C* quella di riferimento, e le intendo riferite ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Siano x^r $(r = 1, 2, 3)$ le coordinate del punto generico di C e y^L $(L = 1, 2, 3)$ quelle del punto generico di C*.

Detti K^{rL} il primo tensore di stress di Piola-Kirchoff, F^{*r} la forza specifica (di massa) a distanza e la ρ^* la densità nella configurazione di riferimento, valgono le ben note equazioni dinamiche che, in forma lagrangiana, si possono scrivere:

$$\rho^* \ddot{x}^r = \rho^* F^{*r} - K^{rL}{}_{/L} \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

Chiamo, inoltre, $T = T(x, t) = T^*(y, t)$ la temperatura assoluta, $\eta = \eta(x, t) = \eta^*(y, t)$ l'entropia specifica (di massa), e analogamente intendo per l'energia libera specifica $\mathscr{F} = w - T\eta$, ove con w si intende l'energia interna specifica.

Suppongo che **C** sia un continuo iperelastico a trasformazioni reversibili e chiamo α^r_L il gradiente di spostamento.

È noto che, in base all'uguaglianza di Clausius-Duhem, al principio di bilancio dell'energia e a quello di Helmholtz, sussiste (almeno in un certo intervallo di variabilità) una corrispondenza biunivoca tra T ed η che permette di invertire, il noto legame tra T e F^*, e quindi si può scrivere:

$$\eta = \eta^*(y, \alpha, T) = -\frac{\partial \mathscr{F}^*(y, \alpha, T)}{\partial T}. \tag{2.2}$$

Inoltre si ha:

$$K^L_r = -\rho^* \frac{\partial \mathscr{F}^*(y, \alpha, T)}{\partial \alpha^r{}_L}, \tag{2.3}$$

Denotando con $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(x, t) = \boldsymbol{q}^*(y, t)$ il vettore che caratterizza il flusso di calore e ricordando che si è fatta l'ipotesi di trasformazioni reversibili, è noto che il secondo principio della Termodinamica vale come uguaglianza anche in Termodinamiche non stazionarie. Si ha quindi:

$$T\rho\dot{\eta} + \operatorname{div}_p \boldsymbol{q} = 0. \tag{2.4}$$

Al posto della classica relazione di Fourier tra flusso di calore e temperatura associo alle precedenti equazioni quella costitutiva più generale proposta da G. Grioli (vedi [2]):

$$z\ddot{q} + (1 - z\dot{L}L^{-1})\boldsymbol{q} + L \operatorname{grad} T = 0 \tag{2.5}$$

ove $L = L(\alpha, T)$ è un operatore ($L_{rs} = L_{sr}$, $L_{rs}\,\xi^r\,\xi^s > 0$ per $\xi_s\,\xi^s > 0$) e z una costante opportuna. Se si vuole, si può ritenere $z = z(\alpha, T, \boldsymbol{q})$ come vogliono teorie più generali, perchè ciò non complica sostanzialmente le cose per lo scopo che mi prefiggo.

Ricavando $\dot{\eta}$ dalla (2.2) e sostituendola in (2.4) si ottiene la ben nota:

$$c\dot{T} - \rho\, T\mathscr{F}_{T\alpha^r_L}\,\dot{\alpha}^r_L + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = 0. \tag{2.4'}$$

Per dare forma lagrangiana alle (2.5) e (2.4') basta ricordare che, detto D lo jacobiano delle x^r rispetto alle y^m e A_{im} il complemento algebrico in esso dell'elemento $x^i{}_{,m}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y^m}\right)$, risulta:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_{i,m}\frac{A_{im}}{D}; \qquad T_{,i} = T_{/m}\frac{A_{im}}{D}. \tag{2.6}$$

Tenendo conto di (2.3) e di (2.6), da (2.1), (2.4′) e (2.5) si ricava che il comportamento termomeccanico del continuo risulta caratterizzato mediante il sistema:

$$
(2.7)\quad \begin{cases}
\rho^* \ddot{x}^r = \rho^* F^{*r} + \rho^* (\mathscr{F}_{\alpha_L^r\, y L} + \mathscr{F}_{\alpha_L^r\, \alpha_M^s}\, \alpha_{ML}^s + \mathscr{F}_{\alpha_L^r T}\, T_{,L}) & (r = 1\,,2\,,3) \\[2ex]
z\dot{q}_r^* + q_r^* - z\left[\dfrac{\partial L_{rm}}{\partial \alpha_s^p}\, \dot{\alpha}_s^p + \dfrac{\partial L_{rm}}{\partial T}\, \dot{T}^*\right] L_{mt}^{-1}\, q_t^* + L_{ri}\, T^*_{,m}\, \dfrac{A_{im}}{D} = 0 & (r = 1\,,2\,,3) \\[2ex]
c\dot{T}^* - \rho^*\, T^* \mathscr{F}_{T\alpha_L^r}\, \dot{\alpha}_L^r + q_{i,m}^*\, \dfrac{A_{im}}{D} = 0
\end{cases}
$$

ove si è posto $c = -\rho^*\, T^* \mathscr{F}_{TT}$, calore specifico sotto configurazione costante.

Considero la divergenza della $(2,7)_2$, derivo la $(2,7)_3$ rispetto al tempo e la moltiplico per z. Si ha:

$$
(2.8)\quad \begin{cases}
\operatorname{grad} z \cdot \dot{\boldsymbol{q}}^* + z \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{q}}^* + \operatorname{div} \boldsymbol{q}^* - \left\{ z\left[\dfrac{\partial L_{ij}}{\partial \alpha_L^r}\, \dot{\alpha}_L^r + \dfrac{\partial L_{ij}}{\partial T}\, \dot{T}\right] L_{jm}^{-1}\, q_m \right\}_{,p} \dfrac{A_{ip}}{D} + \\[1ex]
\qquad\qquad + \left(L_{ri}\, T_{,i}\right)_{,p} \dfrac{A_{rp}}{D} = 0 \\[2ex]
z\,(\dot{c}\, \dot{T}^* + c\, \ddot{T}^*) - z\, \left(\overline{\rho^*\, T^* \mathscr{F}_{T\alpha_L^r}}^{\,\cdot}\right) \dot{\alpha}_L^r - z\, \rho^*\, T^* \mathscr{F}_{T\alpha_L^r}\, \ddot{\alpha}^r{}_L + \\[1ex]
\qquad\qquad + z \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{q}}^* + q_{i,m}^* \overline{\left(\dfrac{A_{im}}{D}\right)}^{\,\cdot} = 0\,,
\end{cases}
$$

Combinando le (2,8) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
& - zc\, \ddot{T}^* - z\dot{c}\, \dot{T}^* + z\left(\overline{\rho^*\, T^* \mathscr{F}_{T\alpha}\, r_L}^{\,\cdot}\right) \dot{\alpha}_L^r + z\rho^*\, T^* \mathscr{F}_{T\alpha_L^r}\, \ddot{\alpha}^r{}_L - \\
(2.9)\quad & - q_{i,m}^* \overline{\left(\frac{A_{im}}{D}\right)}^{\,\cdot} + \operatorname{grad} z \cdot \dot{\boldsymbol{q}}^* + q_{i,m} \frac{A_{im}}{D} - \left\{ z\left[\frac{\partial L_{ij}}{\partial \alpha_L^r}\, \dot{\alpha}_L^r + \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{\partial L_{ij}}{\partial T}\, \dot{T}\right] L_{jm}^{-1}\, q_m \right\}_{,p} \frac{A_{ip}}{D} + \left(L_{ri}\, T_{,i}\right)_{,p} \frac{A_{rp}}{D} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Anzichè il sistema (2 7) tratterò il sistema costituito dalla (2.9) e da quella ottenuta derivando rispetto al tempo la $(2.7)_1$. Si vedrà infatti che ogni soluzione del sistema esprimente le condizioni di compatibilità della propagazione ondosa, dedotto dal sistema così ridotto, soddisfa le condizioni di compatibilità conseguenti al sistema completo.

Il sistema ridotto è dunque dato dalla (2.9) e dalla:

$$
\begin{aligned}
(2.10)\qquad \rho^* \dddot{x}^r = \rho^* \dot{\mathrm{F}}^{*r} + \rho^* \Big(& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{F}_{\alpha^r_{\mathrm{L}} \alpha^y_{\mathrm{L}}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{F}_{\alpha^r_{\mathrm{L}} \alpha^s_{\mathrm{M}}} \alpha^s_{\mathrm{ML}} + \\
& + \mathscr{F}_{\alpha^r_{\mathrm{L}} \alpha^s_{\mathrm{M}}} \dot{\alpha}^s_{\mathrm{ML}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{F}_{\alpha^r_{\mathrm{L}} \mathrm{T}} \mathrm{T}_{/\mathrm{L}} + \mathscr{F}_{\alpha^r_{\mathrm{L}} \mathrm{T}} \dot{\mathrm{T}}_{/\mathrm{L}} \Big) \quad (r = 1\,, 2\,, 3)\,.
\end{aligned}
$$

Per brevità, d'ora in avanti, ometterò gli asterischi nelle espressioni lagrangiane $\boldsymbol{q}^*$, T^*, ecc.

Definisco le funzioni $\vartheta(y\,, t)$ e $\mathbf{Q}(y\,, t)$ mediante le:

$$
(2.11)\qquad \begin{cases} \vartheta(y\,, t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{T}\,\mathrm{d}t\,, & \text{onde:}\ \ \vartheta(y\,, 0) = 0\,, \\[2ex] \mathrm{Q}(y\,, t) = \displaystyle\int_0^t \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}t\,, & \text{onde:}\ \ \mathbf{Q}(y\,, 0) = 0\,. \end{cases}
$$

Suppongo le funzioni $x^r(y\,, t)$, $\vartheta(y\,, t)$ e $\mathrm{Q}^r(y\,, t)$ $(r = 1\,, 2\,, 3)$ e le loro derivate prime e seconde continue ovunque sono definite: le loro derivate terze le ritengo continue ovunque, eccetto sulla superficie mobile Σ: $\phi(y\,, t) = 0$, attraverso la quale esse abbiano una discontinuità di prima specie.

Come ho accennato nell'introduzione, è noto (vedi [7]) che le soluzioni x^r, ϑ, Q^r del classico problema (2.7), se « partecipano » ad un'onda di discontinuità, attraverso la superficie Σ, di ordine due (ossia di accelerazione) non stazionaria, allora, pensate come soluzioni del problema differenziale ottenuto derivando l'operatore differenziale (2.7), possono « partecipare » anche ad un'onda di discontinuità di ordine tre (ossia di iperaccelerazione) sempre attraverso Σ. Basta infatti ricordare che, in tali ipotesi, le matrici delle parti principali del sistema (2.7) e del sistema derivato ammettono gli stessi vettori nullificanti destri e sinistri.

Chiamo λ^r, α, τ^r $(r = 1\,, 2\,, 3)$ i parametri delle discontinuità delle derivate terze di x^r, ϑ, Q^r rispettivamente.

Le (2.9) e (2.10) comportano le note condizioni di compatibilità sulla superficie:

$$
(2.12)\qquad \begin{cases} z\rho\mathrm{T}\mathscr{F}_{\mathrm{T}\alpha^r_{\mathrm{L}}} \lambda^r \mathrm{N_L} \mathrm{V}^{*2} + zc\alpha\,\mathrm{V}^{*3} + z\dfrac{\partial \mathrm{L}_{ij}}{\partial \alpha^r_{\mathrm{L}}} \lambda^r \mathrm{N_L}\,\mathrm{N_P} \dfrac{\mathrm{A}_{i\mathrm{P}}}{\mathrm{D}} \mathrm{V}^* \mathrm{L}^{-1}_{j\mathrm{M}}\, q_{\mathrm{M}} - \\[2ex] - z\,\dfrac{\partial \mathrm{L}_{ij}}{\partial \mathrm{T}}\, \alpha\,\mathrm{N_L} \dfrac{\mathrm{A}_{i\mathrm{L}}}{\mathrm{D}} \mathrm{V}^{*2} \mathrm{L}^{-1}_{jt} q_t - \mathrm{L}_{ij}\,\alpha \mathrm{N}_j\,\mathrm{N_L} \dfrac{\mathrm{A}_{i\mathrm{L}}}{\mathrm{D}} \mathrm{V}^* = 0\,; \\[2ex] \rho\,(\lambda^r \mathrm{V}^{*3} - \mathscr{F}_{\alpha^r_{\mathrm{L}} \alpha^s_{\mathrm{M}}} \lambda^s \mathrm{N_M}\,\mathrm{N_L}\,\mathrm{V}^* + \mathscr{F}_{\alpha^r_{\mathrm{L}}\mathrm{T}}\ \alpha \mathrm{V}^{*2}\,\mathrm{N_L}) = 0 \\ \hfill (r = 1\,, 2\,, 3)\,. \end{cases}
$$

Come avevo accennato in precedenza, ogni soluzione non nulla V^* delle (2.12) (per valori non nulli di α e λ) soddisfa certamente le condizioni di compatibilità sulla superficie conseguenti alle (2.8). Infatti mediante esse si determina il parametro τ.

In base a quanto detto più sopra, tali valori sono certamente anche soluzioni per le condizioni di compatibilità, analoghe alle (2.12), relative alla propagazione di onde di discontinuità di ordine 2 collegate al sistema differenziale (2.7).

Per la determinazione di alcuni valori non nulli di V^* che soddisfano il sistema esprimente le condizioni di compatibilità per la propagazione ondosa relativa al problema (2.9), (2.10) è dunque sufficiente considerare l'equazione in V^* ottenuta annullando il determinante A della matrice dei coefficienti dei parametri λ_r e α in (2.12).

In ognuna delle quattro equazioni del sistema (2.12) è possibile raccogliere V^*, per cui l'equazione: $\det\mathcal{A} = 0$, presenta la radice $V^* = 0$ con molteplicità 4. Ammettendo che anche le altre radici siano reali e inoltre distinte, il sistema risulta iperbolico, ma non in senso stretto. È:

$$\det\mathcal{A} = \|\mathcal{A}_{rs}\| = 0 \tag{2.13}$$

ove:

$$\mathcal{A}_{1r} = z\left(\rho\,T\mathcal{F}_{T\alpha^r_L}\,N_L V^* + \frac{\partial L_{ij}}{\partial\alpha^r_L} N_L\,N_P\,\frac{A_{iP}}{D}\,L^{-1}_{jt}\,q_t\right)$$

$$\mathcal{A}_{1,4} = zcV^{*2} - z\,\frac{\partial L_{ij}}{\partial_T}\,N_P\,\frac{A_{iP}}{D}\,L_{jt}\,q_t\,V^* - L_{ij}\,N_i\,N_P\,\frac{A_{iP}}{D}$$

$$\mathcal{A}_{r+1,s} = V^{*2}\,\delta_{rs} - \mathcal{F}_{\alpha^r_L\,\alpha^s_M}\,N_L\,N_M$$

$$\mathcal{A}_{r+1,4} = \mathcal{F}_{\alpha^r_L T}\,\Gamma\,N_L\,V^* \qquad (r\,,s = 1\,,2\,,3)$$

Per facilitare i calcoli suppongo di aver scelto il riferimento in modo che risulti nel punto P^* all'istante t: $N_1 = 1$; $N_2 = N_3 = 0$; $P^*(y_1\,,0\,,0)$. Inoltre, se il continuo è termicamente isotropo (ossia se si pone $L_{ij} = L\,\delta_{ij}$ con δ_{ij} simbolo di Kronecker) l'equazione (2.13) si semplifica ulteriormente ed assume, nel punto e nell'istante considerato, la forma:

$$\|\mathcal{A}^*_{rs}\| = 0 \tag{2.14}$$

ove:

$$\mathcal{A}_{1,r} = z\left(\rho T\,\mathcal{F}_{T\alpha^r_1}\,V^* + \frac{\partial L}{\partial\alpha^r_1}\,\frac{A_{11}}{DL}\,q_1\right)$$

$$\mathcal{A}_{1,4} = zc\,V^{*2} - z\,\frac{A_{11}}{DT}\,\frac{\partial L}{\partial T}\,q_1\,V^* - L\,\frac{A_{11}}{D}$$

$$\mathcal{A}_{r+1,s} = V^{*2}\delta_{rs} - \mathcal{F}_{\alpha^r_1\,\alpha^s_1} \qquad \mathcal{A}_{r+1,4} = \mathcal{F}_{\alpha^r_1 T}\,V^* \qquad (r\,,s = 1\,,2\,,3)$$

OSSERVAZIONE I. Il primo membro della (2.14) è un polinomio di ottavo grado in V^*. Detti $a_8, a_7, \ldots, a_0$ rispettivamente il coefficiente del monomio di grado massimo, quello di settimo grado . . . fino al termine noto, risulta, ad esempio:

$$
(2.15)\quad \begin{cases}
a_8 = -zc\,; & a_7 = z\,\dfrac{A_{11}}{DT}\,\dfrac{\partial L}{\partial T}\,q_1\,; \\[2ex]
a_6 = z\rho T\,\mathcal{F}_{T\alpha_1^i}\mathcal{F}_{\alpha_1^i T} + L\,\dfrac{A_{11}}{D}\,; & \\[2ex]
a_0 = L\left\|\mathcal{F}_{\alpha_1^r\,\alpha_1^s}\right\|, & (r\,,s = 1\,,2\,,3)\,.
\end{cases}
$$

In base alle relazioni che sussistono fra i coefficienti e le radici di un'equazione algebrica, si può scrivere:

$$
(2.16)\quad \begin{cases}
\displaystyle\sum_{i=1}^{8} V_i^* = -\frac{a_7}{a_8} = \frac{A_{11}\,\dfrac{\partial L}{\partial T}\,q_1}{DLc}\,; & \\[3ex]
\displaystyle\sum_{i_1 < i_2}^{8}{}_{1} V_{i_1}^*\,V_{i_2}^* = \frac{a_6}{a_8} = -\,\frac{\rho T\mathcal{F}_{T\alpha_1^i}\,\mathcal{F}_{\alpha_1^i T}}{c} - \frac{A_{11}\,L}{Dzc}\,; & \\[3ex]
\displaystyle\prod V_i^* = \frac{a_0}{a_8} = \frac{L\left\|\mathcal{F}_{\alpha_1^r\,\alpha_1^s}\right\|}{zc}\,, & (r\,,s = 1\,,2\,,3)
\end{cases}
$$

La $(2{,}16)_1$ permette di affermare che la somma delle velocità di propagazione possibili è zero se: o è nullo il flusso di calore che attraversa la superficie Σ; o L non dipende esplicitamente da T.

OSSERVAZIONE II. È noto (vedi [9]) che attualmente, alla luce delle moderne teorie sulla struttura della materia sembra ragionevole ammettere che la velocità di propagazione del calore in un solido non possa superare la velocità del suono. Perchè ciò accada è stato dimostrato (vedi [10]) che il parametro z non può essere inferiore a z^* tempo di rilassamento della teoria di Fourier, che rappresenta l'intervallo di tempo che deve trascorrere, a partire dall'istante iniziale, affinchè la velocità di penetrazione (fornita dalla teoria di Fourier) di un fronte di calore nella materia non superi quella del suono.

Detta allora u la velocità limite, dalla $(2.16)_3$ si ha $u^8 \geq | a_0/a_8 |$, da cui, in base a (2.15), si ottiene la seguente condizione *sufficiente* per $\mathscr{F}$:

$$\left\| \mathscr{F}^{\ r\ \ s}_{\alpha 1\, \alpha 1} \right\| \leq \frac{z^* c u^8}{L} . \tag{2.17}$$

Tenendo conto del fatto (vedi [9]) che il tempo di rilassamento $z^* = 0{,}79\ L/\rho\, c\, u^2$, la (2,15) diventa (vedi anche [10]):

$$\left\| \mathscr{F}^{\ r\ \ s}_{\alpha 1\, \alpha 1} \right\| \leq \frac{u^6}{\rho} . \tag{2.18}$$

Ad esempio, nel caso di un solido elastico, isotropo, incomprimibile e poco deformabile, prendendo per u la ben nota espressione della velocità di propagazione delle onde acustiche longitudinali: $u = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, dove λ e μ sono i coefficienti di Lamè, risulta:

$$\left\| \mathscr{F}^{\ r\ \ s}_{\alpha 1\, \alpha 1} \right\| \leq \frac{(\lambda + 2\mu)^3}{\rho^4} . \tag{2.19}$$

Una seconda limitazione per il potenziale termodinamico si ricava dalla $(2,16)_2$. Infatti la suddetta limitazione per la velocità di propagazione comporta la: $\sum\limits_{i_1 < i_2} V^*_{i_1} V^*_{i_1} \leq 36\, u^2$; che, per (2.15), diventa:

$$\mathscr{F}_{T\alpha^i_1} \mathscr{F}_{\alpha^i_1 T} \leq \frac{36 z^* c D u^2 - L A_{11}}{z^* \rho\, D\, T} . \tag{2.20}$$

Osservazione III. Se le soluzioni $V^*_1, \ldots, V^*_8$ della (2,14) sono reali, è possibile dare una condizione sufficiente perchè $| V^*_1 |, \ldots, | V^*_8 |$ siano non maggiori della velocità limite u. Detta infatti $\bar{V}^*$ una qualunque delle radici non nulle della (2.14), si divida l'equazione stessa per $a_8 \bar{V}^*$. Risulta:

$$1 = - \sum_{i=1}^{7} \frac{a_i}{a_8 \bar{V}^{*\, 8-i}}$$

L'ipotesi $| \bar{V}^* | < u$ permette allora di scrivere la cercata condizione per i coefficienti della (2.14):

$$1 > \sum_{i=0}^{7} \left| \frac{a_i}{a_8} \right| u^{i-8} . \tag{2.19}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CATTANEO (1948) – *Sulla conduzione del calore.* « Atti Sen. Mat. Fis. Univ. Modena », *3*, 3.

[2] G. GRIOLI (1979) – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui.* Nota I, « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », vol. LXVII.

[3] G. GRIOLI (1979) – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui.* Nota II, « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », vol. LXVII.

[4] M. TORRISI (1980) – *Sulla velocità di propagazione di onde di discontinuità in termoelasticità finita,* « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », vol. LXIX.

[5] S. BRESSAN (1982) – *Sul decadimento delle onde di accelerazione in un fluido ...* Nota I, « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », vol. LXXII.

[6] S. BRESSAN (1982) – *Sul decadimento delle onde di accelerazione in un fluido ...* Nota II, « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », vol. LXXIII.

[7] C. TRUESDEL and R. TOUPIN – *The Classical Field Theories,* Handbuch der Physik, 492 e seg.

[8] A. BRESSAN – *On the solutions of the discontinuities ...* in attesa di pubblicazione su « A.I.M.E.T.A. »

[9] J.L. NOWINSKI (1978) – *Theory of thermoelasticity with applications,* 110 e segg.

[10] G. GRIOLI – *Sulla propagazione del calore nei continui incomprimibili,* in corso di stampa nel Supplemento « B.U.M.I. ».