Sergio Bressan

Sulla propagazione e sull'evoluzione di onde nei solidi termoelastici. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **77** (1984), n.1-2, p. 48–51.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_77_1-2_48_0>

Fisica matematica. — *Sulla propagazione e sull'evoluzione di onde nei solidi termoelastici* (*). Nota II di SERGIO BRESSAN (**), presentata (***) dal Socio G. GRIOLI.

§ 3. IL PROBLEMA DEL TRASPORTO DELLE ONDE DI DISCONTINUITÀ. SOLUZIONI NEL CASO DI « PICCOLE » ONDE

SUMMARY. — According to a thermodynamic theory proposed by G. Grioli, we consider the problem of determining the solutions for the growth of acceleration waves in an elastic body. At first we determine a property of the velocities of waves propagation and we determine some limitations for the free energy; then we resolve the above mentioned problem for the « small » waves working on the iperacceleration waves.

Consideriamo il classico problema (I 2.7) della Nota I [11] caratterizzante il comportamento termomeccanico di un continuo termoelastico a trasformazioni reversibili. Per brevità indico tale sistema lagrangiano con $L[u] = 0$, essendo L l'operatore differenziale opportuno.

Sia $U = (U_1, \ldots, U_7)$ una soluzione in $C^{(3)}$ di (I 2.7), che « partecipi » (vedi Nota I [8]) ad un'onda di discontinuità di ordine due, non stazionaria, attraverso la superficie $\Sigma\,(\phi(y, t) = 0)$; cioè nella regione $\phi(y, t) < 0$ (o nella $\phi(y, t) > 0$) essa coincida con una soluzione $u^{(2)}$ di $L[u] = 0$ che presenti attraverso Σ una discontinuità di ordine due (onda di accelerazione).

Si consideri anche il sistema derivato $\dfrac{d}{dt} L[u] = 0$ (corrispondente al sistema (I 2.8), (I 2.10)). Adesso può associarsi ad U un'onda di discontinuità $u^{(3)}$ cioè corrispondente ad una discontinuità di ordine tre (non più di ordine due) sempre attraverso Σ.

Però il trasporto, lungo le bicaratteristiche comuni ai sistemi (I 2.7) e (I 2.8), (I 2.10), delle discontinuità di $u^{(2)}$ e $u^{(3)}$ non avviene in generale allo stesso modo.

È noto che (vedi Nota I [8]) ciò accade se l'operatore differenziale a primo membro delle (I 2.7) è lineare nelle derivate di ordine massimo con coefficienti

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del C.N.F.M.

(**) Indirizzo dell'autore: Istituto di Matematica Applicata dell'Università di Padova, via Belzoni, 7.

(***) Nella seduta del 15 giugno 1984.

principali indipendenti dalla soluzione (ossia si tratta di un operatore semilineare) ed inoltre i coefficienti principali sono funzioni soltanto del posto.

Considero il problema del trasporto delle discontinuità relative alla linearizzazione del sistema (I 2.7) attorno ad una soluzione regolare qualsiasi $U = (U_1, \dots, U_7)$ di (I 2.7) stesso; ossia considero una soluzione $v = (v_1, \dots, v_7)$ di (I 2.7) che coincida con U nella regione $\phi(y, t) < 0$ e che ammetta una piccola discontinuità di ordine due attraverso Σ; più precisamente, nella regione $\phi(y, t) > 0$, siano trascurabili i quadrati delle differenze $v - U$ e delle sue derivate almeno fino al terzo ordine.

È noto (vedi Nota I [8]) che il sistema alle variazioni relativo alla (I, 2,7) che si ottiene nell'incognita funzione v, è lineare in quanto i coefficienti sono calcolati in U.

Se i coefficienti principali del sistema (I, 2,7) sono indipendenti dal tempo ed inoltre la soluzione U (attorno a cui si considera il problema linearizzato) è stazionaria $\left(\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0\right)$, allora il sistema alle variazioni, oltre che essere lineare, ha i coefficienti principali indipendenti dal tempo esplicito. In base al teorema più sopra ricordato, per tale sistema linearizzato la discontinuità delle onde di ordine due evolve come quella relativa alle onde di ordine tre (anche non piccole).

La matrice dei coefficienti dei parametri relativi a x^r e ϑ nella (I 2.12) è data da:

$$A = \| A_{ij} \| \qquad (i, j = 1, \dots, 4) \tag{3.1}$$

ove è:

$$A_{1,r} = z\left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial \alpha^r_L} \xi_L\, \xi_M \frac{A_{iM}}{D}\, L^{-1}_{jN}\, q_N - \rho\, T\, F_T\, \alpha^r_L\, \xi_L\, \xi_0\right)$$

$$A_{1,4} = z\, c\, \xi_0^2 + z_0 \frac{\partial L_{ij}}{\partial T} \xi_P \frac{A_{iP}}{D} \xi_0\, L^{-1}_{jN}\, q_N - L_{Ij}\, \xi_I\, \xi_M \frac{A_{jM}}{D}$$

$$A_{r+1,s} = \mathscr{F}_{\alpha^r_L \alpha^s_M}\, \xi_M\, \xi_L + \xi_0^2\, \delta_{rs}$$

$$A_{r+1,4} = \mathscr{F}_{\alpha^r_L T}\, \xi_L\, \xi_0$$

$$(r, s = 1, 2, 3)$$

ove si è posto $\xi_L = \dfrac{\partial \phi}{\partial y^L}$ $(L = 0, 1, 2, 3;\ y^0 = t)$.

Detti allora $\boldsymbol{m}\,(m_1, \dots, m_4)$ ed $\boldsymbol{l}\,(l_1, \dots, l_4)$ un vettore destro e uno sinistro, rispettivamente, nullificanti la matrice A, chiamo σ $(\sigma_1, \dots, \sigma_4)$ l'insieme delle grandezze delle discontinuità relative alle derivate terze di x^r e ϑ $(r = 1, 2, 3)$ rispettivamente (ossia pongo $[\dddot{x}^1] = \sigma_1 m_1, \dots, [\dddot{\vartheta}] = \sigma_4 m_4$.

Le equazioni di trasporto lungo le bicaratteristiche per le grandezze delle discontinuità sono lineari nelle incognite σ e possono scriversi:

$$\frac{d\sigma}{d} + R\sigma = 0 \tag{3.2}$$

ove s prende il significato di parametro opportuno lungo le bicaratteristiche. Quanto al significato di R conviene prima osservare che il sistema differenziale quasi–lineare (I. 2,9), (I. 2,10), di ordine $k = 3$, viene detto anche $(k - 1)$ — semilineare in quanto i coefficienti della parte principale sono indipendenti dalle derivate q–esime delle funzioni incognite (x^r e ϑ) per $q > 1$. Ciò, (vedi Nota 1 [8[1]] permette di scrivere:

$$R = \boldsymbol{l} \left[A_{\xi\rho} \boldsymbol{m}_{,\rho} + \frac{\partial b\,[u]}{\partial D^2 u} \boldsymbol{m} \right]$$

ove: $\boldsymbol{l}$ ed $\boldsymbol{m}$ sono due autovettori (sinistro e destro rispettivamente) per una radice semplice e non nulla, V*, di $\det A = 0$; $A_{\xi\rho}$ è la matrice ottenuta da A derivando i suoi elementi rispetto a ξ_ρ ; la virgola indica derivazione parziale e $\rho = 0\,,1\,,2\,,3$; $D^2 u$ indica, com'è naturale, le derivate seconde delle funzioni incognite x^r e ϑ; con il termine $b\,[u]$ si è indicato ciò che diventa l'operatore differenziale $L\,[u]$ una volta che si siano tolti i termini contenenti le derivate di ordine massimo nelle funzioni incognite.

Consideriamo un'onda infinitesima, associata alla soluzione stazionaria U del problema (I 2.7), che invade un continuo termo–elastico in equilibrio meccanico con proprietà fisiche (stazionarie) funzioni soltanto del posto. Si dovrà ammettere che in generale sussiste per tale sistema un gradiente di temperatura anche non nullo (indipendente dal tempo) e quindi ρ , L , $\mathscr{F}$, $\boldsymbol{q}$ ecc. dipenderanno dal posto.

Consideriamo allora una radice semplice e non nulla dell'equazione (I. 2,13) in V*: $\det A = 0$. Per tale radice la caratteristiche di A si abbassa di una unità e la matrice è annullata da una famiglia di vettori sinistri $\boldsymbol{l}$ e una di vettori destri $\boldsymbol{m}$. Questi vettori possono essere ricavati mediante opportune combinazioni di minori della matrice A stessa. In sostanza, un vettore sinistro $\boldsymbol{l}$ e uno destro $\boldsymbol{m}$ nullificanti A vengono, nelle nostre ipotesi, a dipendere oltre che dal posto anche dal tempo, in quanto le loro espressioni contengono i coseni direttori della normale alla superficie d'onda Σ che si propaga nel continuo.

Le equazioni di trasporto sono dunque del tipo:

$$\frac{d\sigma_i}{ds} + G_i\,(y\,,t)\,\sigma_i = 0 \qquad (i = 1\,,\ldots,4)\,. \tag{3.4}$$

È noto che risulta:

$$\frac{dt}{ds} = \boldsymbol{l}\,A_{\xi_0}\,\boldsymbol{m} \quad ; \quad \frac{dx_j}{ds} = \boldsymbol{l}\,A_{\xi_j}\,\boldsymbol{m} \qquad (j = 1\,,2\,,3) \tag{3.5}$$

ove è ormai noto il significato dei simboli.

Se si riesce a risolvere le (3.5) la (3.4) può scriversi nella forma:

$$\frac{d\sigma_i}{ds} + G_i^*\,(s)\,\sigma_i = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,3\,,4) \tag{3.6}$$

L'integrale generale delle (3.4) è dato allora dalle:

$$
\sigma_i = e^{-\int_{s_0}^{s} G_i^*(s')\, ds'} \qquad (i = 1, \dots, 4) . \tag{3.7}
$$

Ricavate le espressioni per le σ_i, essendo quindi noto il modo di evolversi delle grandezze delle discontinuità relative alle derivate di x^r e ϑ $(r = 1, 2, 3)$, si può determinare l'evolversi delle discontinuità relative al flusso di calore. A tal fine conviene derivare la $(\mathrm{I}\ 2.7)_2$ rispetto al tempo. Si ha:

$$
\begin{aligned}
& z \ddot{q}_r + (\dot{z} - 1)\, \dot{q}_r - \left(\frac{\partial L_{rj}}{\partial \alpha_L^s} \dot{\alpha}_L^s + \frac{\partial L_{rj}}{\partial T} \dot{T} \right) L_{ij}^{-1}\, \overline{(z q_i)}^{\,\boldsymbol{\cdot}} - \\
& - z \left\{ \left[\frac{\partial^2 L_{rj}}{\partial \alpha_L^p\, \partial \alpha_M^q} \dot{\alpha}_L^p\, \dot{\alpha}_M^q + 2 \frac{\partial^2 L_{rj}}{\partial \alpha_L^p\, \partial T} \dot{\alpha}_L^p \dot{T} + \frac{\partial L_{rj}}{\partial \alpha_L^p} \ddot{\alpha}_L^p + \right.\right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 L_{rj}}{\partial T^2} \dot{T}^2 + \frac{\partial L_{rj}}{\partial T} \ddot{T} \right] L_{ij}^{-1} + \left(\frac{\partial L_{rj}}{\partial \alpha_L^p} \alpha_L^p + \frac{\partial L_{rj}}{\partial T} \dot{T} \right) \cdot \\
& \left. \cdot \left(\frac{\partial L_{ji}^{-1}}{\partial \alpha_L^p} \dot{\alpha}_L^p + \frac{\partial L_{ji}^{-1}}{\partial T} \dot{T} \right) \right\} q_i + \overline{\left(L_{ri}\, T_{,m} \frac{A_{im}}{D} \right)}^{\,\boldsymbol{\cdot}} = 0 . \qquad (r = 1, 2, 3) .
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Per le ipotesi fatte, la condizione di compatibilità attraverso la superficie Σ per la (3.8) si scrive:

$$
\left[\ddot{q}_r \right] - \frac{\partial L_{rj}}{\partial \alpha_L^p} \left[\alpha_L^p \right] L_{ji}^{-1} q_i + \frac{1}{z} L_{rj} \left[\dot{T}_{,m} \right] \frac{A_{jm}}{D} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{3.9}
$$

ove si è diviso tutto per z. In definitiva si può scrivere:

$$
\left[\ddot{q}_s \right] = \sum_{p=1}^{3} \frac{L_{sj}}{\partial \alpha_L^p} N_L\, \sigma_p\, m_p\, L_{ji}^{-1} q_i + \frac{l}{z} L_{sj}\, N_L \frac{A_{jL}}{D} \sigma_4\, m_4 \qquad (s = 1, 2, 3) , \tag{3.10}
$$

la quale lega la grandezza della discontinuità relativa alle derivate del flusso di calore alle grandezze delle discontinuità relative alle derivate di x^r $(r = 1, 2, 3)$ e ϑ.

BIBLIOGRAFIA

[11] S. BRESSAN – *Nota I dallo stesso titolo della presente*, in corso di stampa su questi « Rendiconti ».