Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Barbara Lazzari, Antonio Scalia

## Sulla unicità della entropia nella termoelasticità di Cattaneo-Maxwell

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **77** (1984), n.3-4, p. 125–134.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_77_3-4_125_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

**Fisica matematica.** — *Sulla unicità della entropia nella termoelasticità di Cattaneo–Maxwell* (*). Nota (**) di BARBARA LAZZARI e ANTONIO SCALIA (***), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — In this paper we prove that for elastic, isotropic, omogeneus materials for which the heat flux vector obey the relation of Cattaneo there is a unique continuously differentiable entropy function.

In questo lavoro vogliamo affrontare lo studio dei potenziali termodinamici per materiali elastici, isotropi e omogenei per i quali il tensore degli sforzi $\mathbf{T}$ e la temperatura assoluta $\theta$ si possono esprimere come funzioni del gradiente di deformazione $\mathbf{F}$, dell'energia $e$, del flusso di calore $\boldsymbol{q}$, mentre la legge che regola la conduzione del calore sia quella proposta da Cattaneo [1]:

$$\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}/\beta = -\boldsymbol{g}/(\alpha\,\beta) \tag{0.1}$$

essendo $\boldsymbol{g}$ il gradiente della temperatura e $\alpha$ e $\beta$ due costanti positive.

Questa relazione che, a differenza della legge di Fourier, porta a velocità di propagazione finita per il flusso di calore, risulta essere non invariante per cambiamenti di osservatore, in quanto $\dot{\boldsymbol{q}}$ non è un vettore oggettivo, essa perciò deve essere sostituita dalla seguente relazione [2]:

$$\dot{\boldsymbol{q}} - \mathbf{W}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}/\beta = -\boldsymbol{g}/(\alpha\,\beta) \tag{0.2}$$

dove $\mathbf{W}$ è la parte emisimmetrica del gradiente velocità di deformazione.

Se associamo all'equazione (0.2) l'equazione di evoluzione per il gradiente di deformazione e il Primo Principio della Termodinamica espresso in forma locale:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{L}\,\mathbf{F} \\ \dot{e} &= h + \mathbf{T}.\mathbf{L} \end{aligned} \tag{0.3}$$

dove $\mathbf{L}$ è il gradiente velocità di deformazione, $h$ la potenza calorica assorbita e $\mathbf{T}$ il tensore di Cauchy diviso per la densità di massa $\mu$, le equazioni (0.2),

(*) Lavoro svolto nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1984.

(***) Indirizzo degli autori: Istituto Matematico, via Machiavelli 35, Ferrara.
Istituto di Analisi, Geometria e Meccanica Razionale della Facoltà di Ingegneria via del Rotolo 46, Catania.

(0.3) rappresentano un sistema materiale in forma differenziale che rientra nella classe dei sistemi descritti da Coleman e Owen [3]. Enunciando infine il Secondo Principio della Termodinamica, così come proposto in [3], dimostriamo l'esistenza di un'unica funzione entropia differenziabile con continuità rispetto alle variabili che caratterizzano lo stato.

Recentemente [4], [5], sono state studiate per il corpo rigido le restrizioni imposte dalla Seconda Legge della Termodinamica da relazioni costitutive che generalizzano (0.2) sostituendo alle costanti $\alpha$ e $\beta$ due tensori $\mathbf{H}$ e $\mathbf{K}$ funzioni della temperatura assoluta:

$$\mathbf{H}(\theta)(\dot{\boldsymbol{q}} - \mathbf{W}\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q} = \mathbf{K}(\theta)\boldsymbol{g}\,. \tag{0.4}$$

Nell'ultima parte del lavoro accenniamo allo studio dei potenziali termodinamici per materiali elastici nei quali l'evoluzione del flusso di calore è espressa da (0.4) e alla possibilità di estendere i risultati da noi ottenuti, dimostrando per questi materiali l'esistenza, l'unicità e la regolarità della funzione entropia.

Osserviamo infine che una ulteriore generalizzazione si ottiene considerando materiali di tipo ereditario per cui l'equazione costitutiva per il flusso di calore è espressa dalla relazione

$$\boldsymbol{q}(t) = \int_0^\infty \mathbf{A}(s\,,\mathbf{F}^t(s))\,\boldsymbol{g}^t(s)\,\mathrm{d}s \text{ (1) (2)} \tag{0.5}$$

dove $\mathbf{A}$ è un tensore che dipende dalla storia del gradiente di deformazione, soddisfa al Principio di Oggettività Materiale e inoltre $\lim\limits_{s\to\infty} \| s^2\,\mathbf{A}(s\,,\mathbf{F}^t)\|_{\mathrm{Lin}(\mathscr{V})} = 0$.

Si dimostra che il sistema materiale che si viene a costruire rientra nella classe dei sistemi descritti da Coleman e Owen e si prova [7] l'esistenza di una famiglia di funzioni entropia di cui si riescono a caratterizzare alcune proprietà di regolarità.

1. Preso un corpo continuo $\mathscr{B}$ lo identifichiamo con la regione B dello spazio euclideo tridimensionale $\mathscr{E}$ che esso occupa in una assegnata configurazione di riferimento, $\phi_0(\mathscr{B}) = \mathrm{B}$ e identifichiamo inoltre i suoi punti materiali X con la loro posizione $x = \phi_0(\mathrm{X})$ nella configurazione di riferimento. Suppo-

(1) L'equazione (0.5) modifica quella proposta da Gurtin e Pipkin [6] per lo studio della termodinamica dei corpi rigidi:

$$q(t) = \int_0^\infty a(s)\,g^t(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

(2) Dalla equazione (0.5) si ottiene (0.3) ponendo:

$$\mathbf{A}(s\,,\mathbf{F}^t(s)) = (\exp(-s/\beta)/(\alpha\beta))\exp\Big(\int_{t-s}^{t}\mathbf{W}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,.$$

niamo che lo *stato* $\sigma$ del materiale costituente $\mathscr{B}$, in un punto X, sia descritto dal valore del gradiente di deformazione $\mathbf{F}$, dall'energia interna $e$ e dal flusso di calore $\boldsymbol{q}$

$$\sigma(\mathrm{X}) = (\mathbf{F}(\mathrm{X}), e(\mathrm{X}), \boldsymbol{q}(\mathrm{X})) \tag{1.1}$$

L'insieme $\Sigma$ di tutti gli stati termodinamici per $\mathscr{B}$ in X risulta quindi essere un sottoinsieme di $\mathrm{Lin}^+(\mathscr{V}) \times \mathrm{R} \times \mathscr{V}$(3) che richiederemo essere aperto e connesso. Introdotte su $\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$, R, $\mathscr{V}$ le norme usuali, considereremo su $\Sigma$ la norma prodotto, cioè:

$$\|\sigma\| = \|\mathbf{F}\|_{\mathrm{Lin}\mathscr{V}} + |e| + \|\boldsymbol{q}\|_{\mathscr{V}}. \tag{1.2}$$

Al materiale associamo le equazioni costitutive che lo caratterizzano:

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{T}} : \Sigma \to \mathrm{Sim}(\mathscr{V}) \\ &\hat{\theta} : \Sigma \to \mathrm{R}^+ \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\hat{\mathbf{T}}$ e $\hat{\theta}$ sono funzioni continue e differenziabili con continuità, esse, noto lo stato $\sigma$ in X, forniscono il valore del tensore di Cauchy diviso per la densità di massa $\mu$ e della temperatura assoluta in X.

Chiamiamo *processo* di durata $d_p$ una applicazione $\mathrm{P} : [0, d_p) \to \mathrm{Lin}(\mathscr{V}) \times \mathrm{R} \times \mathscr{V}$ continua a tratti, così definita:

$$\mathrm{P}(t) = (\mathbf{L}(t), h(t), \boldsymbol{g}(t)) \tag{1.4}$$

dove $\mathbf{L}$, $h$ e $\boldsymbol{g}$ sono rispettivamente il gradiente velocità di deformazione, la potenza calorica assorbita e il gradiente della temperatura.

Preso un processo $\mathrm{P} : [0, d_p) \to \mathrm{Lin}(\mathscr{V}) \times \mathrm{R} \times \mathscr{V}$, indichiamo con $\mathscr{D}(\mathrm{P})$ il sottoinsieme di $\Sigma$ costituito dagli stati $\sigma_0 = (\mathbf{F}_0, e_0, \boldsymbol{q}_0)$ per cui il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \\ \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + h \\ \dot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{W}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}/\alpha - \boldsymbol{g}/(\alpha\beta) \end{cases} \tag{1.5}$$

con le condizioni iniziali

$$\mathbf{F}(0) = \mathbf{F}_0\,; \quad e(0) = e_0\,; \quad \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0$$

(3) Indichiamo con $\mathscr{V}$ lo spazio vettoriale tridimensionale traslato dello spazio $\mathscr{E}$, con $\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$ l'insieme delle applicazioni lineari (tensori) di $\mathscr{V}$ in $\mathscr{V}$, con $\mathrm{Lin}^+(\mathscr{V})$ il sottoinsieme di $\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$ dei tensori a determinante positivo e infine $\mathrm{Sim}(\mathscr{V})$ il sottoinsieme di $\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$ costituito dai tensori simmetrici.

ammette una e una sola soluzione

$$t \rightarrow (\mathbf{F}(t), e(t), \boldsymbol{q}(t))$$

i cui valori sono in $\Sigma$ per ogni $t \in [0, \mathrm{d}_p)$.

Chiamiamo *processo termodinamico ammissibile* ogni processo P per cui $\mathscr{D}$ (P) non è vuoto e indichiamo con $\Pi$ l'insieme dei processi termodinamici ammissibili, mentre con $\Sigma \Delta \Pi$ il sottoinsieme di $\Sigma \times \Pi$ così definito:

$$\Sigma \Delta \Pi = \{(\sigma, \mathrm{P}) \in \Sigma \times \Pi \; ; \quad \sigma \in \mathscr{D}(\mathrm{P})\} \tag{1.6}$$

inoltre con $\rho : \Sigma \Delta \Pi \rightarrow \Sigma$ la *funzione di transizione degli stati* che associa allo stato iniziale $\sigma_0$ e al processo P lo stato finale $\sigma_f$, cioè:

$$\rho(\sigma_0, \mathrm{P}) = \sigma_f = (\mathbf{F}(\mathrm{d}_p), e(\mathrm{d}_p), \boldsymbol{q}(\mathrm{d}_p)).$$

Osserviamo che l'insieme $\Pi$ dei processi termodinamici ammissibili soddisfa le seguenti proprietà:

**$\mathrm{P}_1$**: *Se* $\mathrm{P} \in \Pi$, *allora per ogni* $t_1, t_2 \in [0, d_r]$ *con* $t_1 < t_2$, *il processo di durata* $t_2 - t_1$, $\mathrm{P}_{[t_1, t_2)}$ *così definito*:

$$\mathrm{P}_{[t_1, t_2)}(t) = \mathrm{P}(t_1 + t), \qquad t \in [0, t_2 - t_1)$$

chiamato segmento di P, appartiene a $\pi$.

Se indichiamo con $\mathrm{P}_t$ il segmento $\mathrm{P}_{[0, t)}$, allora la soluzione del sistema (1.5) con dato iniziale $\sigma_0$ si scriverà nel seguente modo:

$$\sigma_t = (\mathbf{F}(t), e(t), \boldsymbol{q}(t)) = \hat{\rho}(\sigma_0, \mathrm{P}_t). \tag{1.7}$$

**$\mathrm{P}_2$**: *Se* $\mathrm{P}_1$ *e* $\mathrm{P}_2 \in \Pi$ *ed esiste* $\sigma_0 \in \Sigma$ *tale che* $\sigma_0 \in \mathscr{D}(\mathrm{P}_1)$ *e* $\hat{\rho}(\sigma_0, \mathrm{P}) \in \mathscr{D}(\mathrm{P}_2)$, *allora il processo* $\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$ *di durata* $d_{p1} + \mathrm{d}_{p2}$ *così definito*:

$$(\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2)(t) = \begin{cases} \mathrm{P}_1(t) & \text{se} \quad t \in [0, \mathrm{d}_{p1}) \\ \mathrm{P}_2(t - \mathrm{d}_{p1}) & \text{se} \quad t \in [\mathrm{d}_{p1}, \mathrm{d}_{p1} + \mathrm{d}_{p2}) \end{cases} \tag{1.8}$$

*chiamato continuazione di* $\mathrm{P}_1$ *con* $\mathrm{P}_2$, *appartiene a* $\Pi$.

Possiamo osservare che, per come abbiamo definito $\hat{\rho}$, per ogni $\sigma \in \mathscr{D}(\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2)$ si ha:

$$\hat{\rho}(\sigma, \mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2) = \hat{\rho}(\hat{\rho}(\sigma, \mathrm{P}_1), \mathrm{P}_2) \tag{1.9}$$

**$\mathrm{P}_3$**: *I processi nulli appartengono a* $\Pi$.

**P**$_4$: *Scelti* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, *esiste un processo* $\mathrm{P} \in \Pi$ *tale che* $\sigma_1 \in \mathscr{D}(\mathrm{P})$ *e* $\hat{\rho}(\sigma_1, \mathrm{P}) = \sigma_2$ (4).

**P**$_5$: *La funzione* $\hat{\rho}(\cdot, \mathrm{P}) : \mathscr{D}(\mathrm{P}) \to \Sigma$ *è continua per ogni* $\mathrm{P} \in \pi$ (5).

Siamo ora in grado di dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.1. *Chiamiamo elemento materiale termoelastico di tipo Cattaneo-Maxwell l'insieme* $(\Sigma, \hat{\rho}\,\Pi, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{T}}, \hat{\boldsymbol{q}})$ *dove*:

a) $\Sigma, \Pi, \hat{\rho}$, *sono rispettivamente lo spazio degli stati, l'insieme dei processi termodinamici ammissibili e il funzionale di evoluzione degli stati, precedentemente definiti.*

b) $\hat{\theta} : \Sigma \to \mathrm{R}^+$, $\hat{\mathbf{T}} : \Sigma \to \mathrm{Sim}(\mathscr{V})$, $\hat{\boldsymbol{q}} : \Sigma \to \mathscr{V}$ *sono le funzioni che a ogni stato associano rispettivamente la temperatura assoluta il tensore degli sforzi e il flusso di calore.*

2. Per introdurre la Seconda Legge della Termodinamica ci atterremo allo schema proposto da Coleman e Owen [3], a tale scopo è necessario definire la seguente funzione $s : \Sigma \,\Delta\, \Pi \to \mathrm{R}$:

$$s(\sigma, \mathrm{P}) = \int_0^{d_p} \left(h(t)/\hat{\theta}(\sigma_t) + \hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t) \cdot \boldsymbol{g}(t)/(\mu(\hat{\theta}(\sigma_t))^2\right) \mathrm{d}t \tag{2.1}$$

e, attraverso $s$, enunciare il Secondo Principio della Termodinamica.

SECONDA LEGGE *Per ogni* $(\sigma, \mathrm{P}) \in \Sigma \,\Delta\, \Pi$ *con* $\hat{\rho}(\sigma, \mathrm{P}) = \sigma$

$$s(\sigma, \mathrm{P}) \leqq 0\,. \tag{2.2}$$

Richiedere che $s$ verifichi la Seconda Legge della Termodinamica, espressa attraverso (2.2), porta ad affermare (6) che $s$ ammette una famiglia di *sovrapotenziali* $\mathrm{S} : \Sigma \to \mathrm{R}$ superiormente semicontinui, legati ad $s$ dalla seguente relazione:

DEFINIZIONE 2.1. *Una funzione* $\mathrm{S} : \Sigma \to \mathrm{R}$, *superiormente semicontinua, è un sovrapotenziale per* $s$ *se per ogni* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ *e per ogni* $\mathrm{P} \in \Pi$ *con* $\sigma_1 \in \mathscr{D}(\mathrm{P})$ *e* $\hat{\rho}(\sigma_1, \mathrm{P}) = \sigma_2$ *si ha*:

$$\mathrm{S}(\sigma_2) - \mathrm{S}(\sigma_1) \geqq s(\sigma_1, \mathrm{P}) \tag{2.3}$$

(4) Assegnati $\sigma_1$ e $\sigma_2$ esiste almeno una curva regolare in $\Sigma$ che li congiunge in quanto $\Sigma$ è connesso, attraverso una opportuna parametrizzazione differenziabile e tratti con continuità di tale curva, è possibile definire il processo P cercato.

(5) Questo equivale a richiedere che valga un teorema di dipendenza continua dai dati per il sistema (1.5).

(6) Vedi [3], teorema.

Scopo del nostro lavoro è caratterizzare la famiglia dei sovrapotenziali per $s$ dimostrando che, a meno di una costante additiva, esiste un'unica funzione S che verifica (2.3) e inoltre provando che S è una funzione continua e differenziabile con continuità.

Per far questo fissiamo uno stato $\sigma$ e consideriamo una curva orientata chiusa $\gamma^+$ in $\Sigma$ passante per $\sigma$. Fissata una parametrizzazione di $\gamma^+$ differenziabile a tratti con continuità, esiste un processo $P^+$ tale che $\sigma \in \mathscr{D}(P^+)$ e inoltre $\sigma_t = \hat{\rho}(\sigma, P^+_t)$, $t \in [0, d_p)$ è la traiettoria parametrizzata che abbiamo considerato.

Ricordando le equazioni (1.5), $s(\sigma, P^+)$ si può scrivere:

$$
\begin{aligned}
s(\sigma, P^+) &= \int_0^{d_{p+}} \{e(t)/\hat{\theta}(\sigma_t) - (\hat{\mathbf{T}}(\sigma_t) \cdot \mathbf{L}(t))/\hat{\theta}(\sigma_t) - \\
&\quad - (\alpha\beta\, \hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}(t))/(\mu(\hat{\theta}(\sigma_t))^2) - \beta(\boldsymbol{q}(\sigma_t))^2/\mu(\hat{\theta}(\sigma_t))^2\}\, dt \overset{(7)}{=} \\
&= \int_0^{d_{p+}} \{e(t)/\hat{\theta}(\sigma_t) - (\hat{\mathbf{T}}(\sigma_t) \cdot \mathbf{F}(t)\,\mathbf{F}^{-1}(t))/\hat{\theta}(\sigma_t) - \\
&\quad - (\alpha\,\beta\,\boldsymbol{q}(\sigma_t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}(t))/(\mu(\hat{\theta}(\sigma_t))^2) - \beta(\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t))^2/(\mu(\hat{\theta}(\sigma_t))^2)\}\, dt = \\
&= \int_{\gamma^+} \{de/\hat{\theta}(\sigma) - (\hat{\mathbf{T}}(\sigma)\,\mathbf{F}^{T-1}/\hat{\theta}(\sigma)) \cdot d\mathbf{F} - (\alpha\beta\,\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma)/(\mu(\hat{\theta}(\sigma))^2)) \cdot d\boldsymbol{q}\} - \\
&\quad - \int_0^{d_{p+}} (\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t))^2/(\mu(\hat{\theta}(\sigma_t))^2)\, dt
\end{aligned}
$$

Poiché $\gamma^+$ è un sottoinsieme compatto di $\Sigma$ e $\hat{\theta}$ e $\hat{\boldsymbol{q}}$ sono funzioni continue in $\Sigma$, possiamo affermare che:

$$\sup_{\gamma^+} \beta(\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma)/\hat{\theta}(\sigma))^2 = M < +\infty$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
s(\sigma, P^+) \geqq \int_{\gamma^+} &\{de/\hat{\theta}(\sigma) - (\hat{\mathbf{T}}(\sigma)\,\mathbf{F}^{T+1}/\hat{\theta}(\sigma)) \cdot d\mathbf{F} - \\
&- (\alpha\beta\,\boldsymbol{q}(\sigma)/(\mu(\hat{\theta}(\sigma))^2)) \cdot d\hat{\boldsymbol{q}}\} - Md_{p+} = I(\gamma^+) - Md_{p+}.
\end{aligned}
$$

Poiché deve valere (2.2) possiamo concludere

$$I(\gamma^+) \geqq Md_{p+}. \tag{2.4}$$

(7) Ricordiamo che $\mathbf{W}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q} = 0$ perché $\mathbf{W}$ è un tensore emisimmetrico.

Osserviamo che M dipende dalla curva $\gamma^+$, ma non dalla velocità con cui viene percorsa, quindi la relazione (2.4) deve valere per ogni processo P tale che $\hat{\rho}(\sigma, P_t)$ descrive la curva $\gamma^+$, possiamo allora concludere che:

$$I(\gamma^+) \leqq 0 .$$

Se ora consideriamo la curva $\gamma^-$ che differisce da $\gamma^+$ solo per l'orientamento, con considerazioni analoghe possiamo affermare che

$$I(\gamma^-) = \int_{\gamma_-} \{de/\hat{\theta}(\sigma) - (\hat{\mathbf{T}}(\sigma)\,\mathbf{F}^{T-1}/\hat{\theta}(\sigma)) \cdot d\mathbf{F} - \mu(\alpha\,\beta\,\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma)/(\mu(\hat{\theta}(\sigma))^2)) \cdot d\boldsymbol{q}\} \leqq 0 .$$

D'altra parte, poiché $I(\gamma^+) = -I(\gamma^-)$, possiamo concludere che

$$I(\gamma^+) = I(\gamma^-) = 0 .$$

Utilizzando la teoria dei potenziali per i campi vettoriali, possiamo allora affermare che esiste una funzione $S_0 : \Sigma \to R$ tale che:

$$\partial_e S_0(\sigma) = 1/\hat{\theta}(\sigma) \;;\quad \partial_{\mathbf{F}} S_0(\sigma) = -\hat{\mathbf{T}}(\sigma)\,\mathbf{F}^{T-1}/\hat{\theta}(\sigma) \;;$$
$$\partial_{\boldsymbol{q}} S_0(\sigma) = -\alpha\,\beta\,\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma)/(\mu(\hat{\theta}(\sigma))^2) .$$

La funzione $S_0$ così trovata risulta essere un sovrapotenziale per $s$, presi infatti $(\sigma, P) \in \Sigma\,\Delta\,\Pi$, la funzione $s$ si può scrivere come segue:

$$s(\sigma, P) = \int_0^{d_p} (d_t S_0(\sigma_t) - \mu\beta(\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t)/(\mu\hat{\theta}(\sigma))^2)\,dt$$

e quindi

$$s(\sigma, P) = S_0(\hat{\rho}(\sigma, P)) - S_0(\sigma) - \mu \int_0^{d_p} (\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t)/(\mu(\hat{\theta}(\sigma_t))^2)\,dt$$

osservando che $\int_0^{d_p} (\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t)/(\mu(\hat{\theta}(\sigma_t))^2\,dt$ è positivo, possiamo concludere che:

$$s(\sigma, P) \leqq S_0(\hat{\rho}(\sigma, P)) - S_0(\sigma) .$$

Chiamiamo il sovrapotenziale $S_0$ trovato *funzione entropia*.

Per dimostrare l'unicità della funzione entropia ora trovata, consideriamo un altro sovrapotenziale S per $s$. Esso deve verificare la Definizione 2.1, quindi, per ogni $\sigma_1$ *e* $\sigma_2 \in \Sigma$ e per ogni processo P con $\sigma_1 \in \mathscr{D}(\mathrm{P})$ e $\hat{\rho}(\sigma_1, \mathrm{P}) = \sigma_2$, deve essere:

$$\mathrm{S}(\sigma_2) - \mathrm{S}(\sigma_1) \geqq s(\sigma_1, \mathrm{P}) . \tag{2.5}$$

Indicata con $\gamma$ una curva orientata che congiunge $\sigma_1$ a $\sigma_2$ abbiamo:

$$\begin{aligned} s(\sigma_1, \mathrm{P}) &= \mathrm{I}(\gamma) - \mu \int_0^{d_p} (\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t)/(\mu \hat{\theta}(\sigma_t))^2)\, \mathrm{d}t = \\ &= \mathrm{S}_0(\sigma_2) - \mathrm{S}_0(\sigma_1) - \mu \int_0^{d_p} (\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t)/(\mu \hat{\theta}(\sigma_t))^2)\, \mathrm{d}t . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dal confronto di (2.5) e (2.6) si ha:

$$\mathrm{S}(\sigma_2) - \mathrm{S}(\sigma_1) \geqq \mathrm{S}_0(\sigma_2) - \mathrm{S}_0(\sigma_1) - \mathrm{M}d_p \tag{2.7}$$

essendo $\mathrm{M} = \sup\limits_{\gamma} \beta(\hat{\boldsymbol{q}}(\sigma)/\hat{\theta}(\sigma))^2$.

In virtù delle stesse considerazioni fatte precedentemente, possiamo affermare che (2.7) deve valere per ogni processo P che congiunge $\sigma_1$ a $\sigma_2$ e quindi concludere che

$$\mathrm{S}(\sigma_2) - \mathrm{S}_0(\sigma_2) \geqq \mathrm{S}(\sigma_1) - \mathrm{S}_0(\sigma_1) . \tag{2.8}$$

Scambiando ora il ruolo di $\sigma_1$ e $\sigma_2$ abbiamo

$$\mathrm{S}(\sigma_1) - \mathrm{S}_0(\sigma_1) \geqq \mathrm{S}(\sigma_2) - \mathrm{S}_0(\sigma_2) . \tag{2.9}$$

Quindi dal confronto di (2.8) e (2.9) e dall'arbitrarietà di $\sigma_1$ e $\sigma_2$ discende che

$$\mathrm{S}(\sigma) - \mathrm{S}_0(\sigma) = \text{costante} \qquad \text{per ogni } \sigma \in \Sigma .$$

I risultati così ottenuti li possiamo riassumere nel seguente teorema:

TEOREMA 2.1 *Per un materiale termoelastico di tipo Cattaneo-Maxwell esiste, a meno di una costante additiva, un'unica funzione di stato entropia* $\mathrm{S}_0 : \Sigma \to \mathrm{R}$, *differenziabile con continuità su* $\Sigma$ *e tale che valgono le seguenti relazioni*:

$$\partial_e \mathrm{S}_0(\sigma) = 1/\hat{\theta}(\sigma) \quad ; \quad \partial_{\mathbf{F}} \mathrm{S}_0(\sigma) = \hat{\mathbf{T}}(\sigma)\, \mathbf{F}^{\mathrm{T}-1}/\hat{\theta}(\sigma) \quad ;$$
$$\partial_{\boldsymbol{q}} \mathrm{S}_0(\sigma) = \alpha\beta\, \hat{\boldsymbol{q}}(\sigma)/(\mu(\hat{\theta}(\sigma))^2) .$$

3. I risultati che abbiamo ottenuto si possono estendere a materiali per cui l'equazione costitutiva per il flusso di calore, come presentata in [4] e [5] (e

referenze lì citate), generalizza l'equazione di Cattaneo-Maxwell nel seguente modo:

$$\mathbf{H}(\theta)(\dot{\boldsymbol{q}} - \mathbf{W}\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q} = -\mathbf{K}(\theta)\boldsymbol{g} \tag{3.1}$$

dove **H** e **K** sono due tensori del secondo ordine definiti positivi chiamati rispettivamente tensore tempo di rilassamento e tensore di conducibilità termica all'equilibrio tali che il tensore $\mathbf{K}(\theta)^{-1}\,\mathbf{H}(\theta)$ è simmetrico.

Per affrontare lo studio di materiali governati da questa equazione costitutiva occorre apportare alcune modifiche alla definizione di elemento materiale, risulta infatti più opportuno definire lo stato e conseguentemente il processo nel seguente modo:

$$\sigma^* = (\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{q}) \tag{3.2}$$

$$\mathrm{P}^* = (\mathbf{L}, \dot{\theta}, \boldsymbol{g}) . \tag{3.3}$$

Assegnando le equazioni costitutive per il tensore degli sforzi e per la potenza calorica assorbita:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* &= \hat{\mathbf{T}}^*(\sigma^*) \\ h^* &= \hat{h}^*(\sigma^*, \mathrm{P}^*) = \mathrm{A}^*(\sigma^*)\,\dot{\theta} + \mathbf{B}^*(\sigma^*) \cdot \boldsymbol{g} . \end{aligned} \tag{3.4}$$

si dimostra che esiste una funzione di stato $e^*$ chiamata *energia* tale che:

$$\mathrm{d}_t e^*(\hat{\rho}^*(\sigma^*, \mathrm{P}_t^*)) = h^*(\sigma^*, \mathrm{P}_t^*) + \hat{\mathbf{T}}^*(\sigma_t^*) \cdot \mathbf{L}(t)$$

e quindi che valgono le seguenti relazioni:

$$\partial_\theta\, e^*(\sigma^*) = \mathrm{A}^*(\sigma^*) \quad ; \quad \partial_{\boldsymbol{q}} e^*(\sigma^*) = \mathbf{B}^*(\sigma^*) \tag{3.5}$$

Introducendo la funzione

$$s^*(\sigma^*, \mathrm{P}^*) = \int_0^{d_p} (\hat{h}^*(\sigma^*, \mathrm{P}_t^*)/\hat{\theta}^*(\sigma_t^*) + \hat{\boldsymbol{q}}(\sigma_t^*) \cdot \mathbf{g}(t)/(\mu(\hat{\theta}^*(\sigma_t^*))^2)\, \mathrm{d}t$$

ripetendo le considerazioni fatte nel paragrafo precedente, si dimostra che esiste un'unica funzione di stato entropia $\mathrm{S}^*$ differenziabile con continuità su tutto lo spazio degli stati $\Sigma^*$ e che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \partial_\theta\, \mathrm{S}_0^*(\sigma^*) &= \mathrm{A}^*(\sigma^*)/\hat{\theta}^*(\sigma^*) \\ \partial_{\mathbf{F}} \mathrm{S}_0^*(\sigma^*) &= \hat{\mathbf{T}}^*(\sigma^*)\,\mathbf{F}^{-1}/\hat{\theta}^*(\sigma^*) \\ \partial_{\boldsymbol{q}} \mathrm{S}_0^*(\sigma^*) &= \mathbf{B}^*(\sigma^*)/\hat{\theta}^*(\sigma^*) - (\mathbf{K}^{-1}(\theta)\,\mathbf{H}(\theta))^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{q}}^*(\sigma^*)/(\mu\,(\hat{\theta}^*(\sigma^*))^2) \end{aligned} \tag{3.6}$$

## Bibliografia

[1] Cattaneo C. (1948) – *Sulla conduzione del calore.* « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », *3*, 83-101.

[2] Marinov P. e Lebon G. (1975) – *A Generalized Fourier's Law in Thermodynamically Simple Material of the Differential Type.* « Acta Mechanica », *22*, 257-265.

[3] Coleman B.D., Owen D.R. (1974) – *A Mathematical Foundation for Thermodynamics.* « Arch. Rational Mech. Anal. », *54*, 1-104.

[4] Coleman B.D. e Fabrizio M. e Owen D.R. (1982) – *On the Thermodynamics of Second Sound in Dielectric Cristals.* « Arch. Rational Mech. Anal. », *80*, 135-158.

[5] Coleman B.D., Fabrizio M. e Owen D.R. (1982) – *Il Secondo Suono nei Cristalli. Termodinamica ed Equazioni Costitutive.* « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *68*, 207-227.

[6] Gurtin M.E. e Pipkin A.C. (1969) – *A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds.* « Arch. Rational Mech. Anal. », *31*, 113-126.

[7] Lazzari B. – *Sulla regolarità dei processi termodinamici per alcuni materiali con memoria* (in corso di stampa).