Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Manuel D.P. Monteiro Marques

Sur la frontière d'un convexe mobile

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **77** (1984), n.3-4, p. 71–75.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1984_8_77_3-4_71_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

Analisi funzionale. — *Sur la frontière d'un convexe mobile.* Nota (*) di MANUEL D. P. MONTEIRO MARQUES (**), presentata dal Corrisp. R. CONTI.

RIASSUNTO. — Siano A, B sottoinsiemi convessi, chiusi e limitati di uno spazio normato X, con le frontiere fr A, fr B. Dimostriamo che $h(A, B) = h(\mathrm{fr}\, A, \mathrm{fr}\, B)$, dove h è la metrica di Hausdorff tra sottoinsiemi chiusi di X. Studiamo inoltre la continuità e la semicontinuità superiore ed inferiore di una multifunzione di tipo « frontiera ».

Soit X un espace normé réel. On notera $\mathscr{B}(X)$ l'ensemble des parties convexes de X, fermées, bornées, non vides. De récents travaux [1], [2] ont mis en évidence certaines propriétés des ensembles de solutions des inclusions différentielles

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{I}$$

et

$$\dot{x} \in \mathrm{fr}\, F(t, x), \tag{II}$$

où F est une multifonction à valeurs dans $\mathscr{B}(X)$ et où $\mathrm{fr}\, F(t, x)$ désigne la frontière de $F(t, x)$. Nous nous proposons ici de relier la variation de $t \to F(t, x)$ et celle de $t \to \mathrm{fr}\, F(t, x)$, mesurées en termes de distances de Hausdorff, ainsi que les semi-continuités éventuelles de ces deux multiapplications. Le théorème suivant est à cet égard essentiel:

THÉORÈME 1. *Si h désigne la distance de Hausdorff, on a:*

$$\forall A, B \in \mathscr{B}(X) \quad h(A, B) = h(\mathrm{fr}\, A, \mathrm{fr}\, B). \tag{1}$$

Les deux lemmes suivants sont assez usuels:

LEMME 1. *Tout* $A \in \mathscr{B}(X)$ *est égal à l'enveloppe convexe de sa frontière* (*notée* co fr A) *et si* $f : A \to \mathbf{R}$ *est une fonction convexe, on a*:

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1984.
(**) C.M.A.F. Avenida Prof. Gama Pinto, 2, 1699 Lisboa Codex, Portugal.

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in \mathrm{fr}\, A} f(x) . \tag{2}$$

Démonstration. Comme A est convexe et fermé, il contient co fr A. Réciproquement, tout point $a \in A$ appartient à cette enveloppe convexe: en effet, toute droite D passant par a intersecte A selon un segment fermé borné $[b , c]$; les points b et c sont nécessairement dans fr A et a est une combinaison convexe de ces deux points.

L'égalité (2) résulte du fait que l'ensemble

$$\{y \in A : f(y) \leq \sup_{x \in \mathrm{fr}\, A} f(x)\}$$

contient fr A et est convexe, donc égal à A. ∎

Les normes de X et de son dual topologique X* sont notées $| . |$ et le produit de dualité $\langle . , . \rangle$. On note d (x , B) la distance d'un point x à un ensemble non nécessairement convexe B.

LEMME 2. *Si* $x \notin \mathrm{int}\, B$ (*l'intérieur de* B) *alors*

$$\mathrm{d}(x , B) = \mathrm{d}(x , \mathrm{fr}\, B) . \tag{3}$$

Démonstration. Comme tout point de fr B est adhérent à B, il vient $\mathrm{d}(x , B) \leq \mathrm{d}(x , \mathrm{fr}\, B)$. Pour prouver l'inégalité inverse (triviale si $x \in \mathrm{fr}\, B$) il suffit de montrer que $| x - y | \geq \mathrm{d}(x , \mathrm{fr}\, B)$ pour tout $y \in \mathrm{int}\, B$. Le segment de droite $[x , y]$, ensemble connexe, ne peut pas être la réunion de ses deux parties ouvertes non vides $[x , y] \cap \mathrm{int}\, B$ et $[x , y] \cap \mathrm{ext}\, B$; il contient donc au moins un point $z \in \mathrm{fr}\, B$, d'où $| x - y | \geq | x - z | \geq \mathrm{d}(x , \mathrm{fr}\, B)$. ∎

Démonstration du Théorème 1. La distance de Hausdorff entre deux ensembles (non vides) A et B est par définition

$$h(A , B) = \max \{e(A , B) , e(B , A)\} ,$$

avec

$$e(A , B) = \sup_{x \in A} \mathrm{d}(x , B) .$$

Soient $A , B \in \mathscr{B}(X)$. Comme alors $x \to \mathrm{d}(x , B)$ est une fonction convexe, le Lemme 1 implique

$$e(A , B) = e(\mathrm{fr}\, A , B) \leq e(\mathrm{fr}\, A , \mathrm{fr}\, B);$$

d'où, en échangeant A et B et passant aux « max »:

$$h(A , B) \leq h(\mathrm{fr}\, A , \mathrm{fr}\, B) . \tag{4}$$

Pour achever la preuve de (1) il suffit d'établir

$$e(\operatorname{fr} A, \operatorname{fr} B) \leq h(A, B). \tag{5}$$

Soit $\varepsilon > 0$; comme $e(\operatorname{fr} A, \operatorname{fr} B) < +\infty$, il existe $a \in \operatorname{fr} A$ tel que

$$e(\operatorname{fr} A, \operatorname{fr} B) \leq d(a, \operatorname{fr} B) + \varepsilon.$$

Deux cas peuvent se présenter:

1) *Le point a n'est pas intérieur à* B.

Alors, par le Lemme 2, $d(a, \operatorname{fr} B) = d(a, B)$ et donc

$$e(\operatorname{fr} A, \operatorname{fr} B) \leq d(a, B) + \varepsilon \leq e(A, B) + \varepsilon \leq h(A, B) + \varepsilon. \tag{6}$$

2) *Le point a est intérieur à* B.

Soit $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, d(a, \operatorname{fr} B)\}$ et $\bar{a}$ un point de la boule de centre a et rayon ε' n'appartenant pas à A. L'ensemble $A' = \{x \in X : d(x, A) \leq \frac{1}{2} d(\bar{a}, A)\}$ est un corps convexe, c'est-à-dire un convexe fermé borné d'intérieur non vide. Comme $a \notin A'$ et $\bar{a} \notin A'$, le segment $[a, \bar{a}]$ contient un point $a' \in \operatorname{fr} A'$. Visiblement $|a' - a| \leq |\bar{a} - a| \leq \varepsilon'$ et donc $a' \in B$. Par a', point de la frontière du corps convexe A', il passe au moins un hyperplan d'appui fermé [3]; autrement dit, il existe $x^* \in X^*$ tel que $|x^*| = 1$ et

$$\forall y \in A' \qquad \langle y, x^* \rangle \geq \langle a', x^* \rangle. \tag{7}$$

Soit $\delta = \sup\{|y - z| : y \in A', z \in B|$ et $x \in X$ tel que $|x| = 1$ et $\langle x, x^* \rangle \geq 1 - \varepsilon/\delta$. La demi-droite $\{a' - tx : t > 0\}$ issue de $a' \in B$ contient nécessairement un point $b \in \operatorname{fr} B$ (car B est borné) et on peut écrire $b = a' - |a' - b|\, x$. Pour tout $y \in A \subset A'$ on a, vu (7):

$$|y - b| \geq \langle y - b, x^* \rangle \geq \langle a' - b, x^* \rangle = |a' - b| \langle x, x^* \rangle$$

d'où

$$\begin{aligned} d(b, A) \geq |a' - b|(1 - \varepsilon/\delta) \geq |a' - b| - \varepsilon \geq |a - b| - \varepsilon' - \varepsilon \geq \\ \geq |a - b| - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $b \in \operatorname{fr} B$, $e(\operatorname{fr} A, \operatorname{fr} B) \leq d(a, \operatorname{fr} B) + \varepsilon \leq |a - b| + \varepsilon$, ce qui, en rapprochant de l'inégalité précédente, donne

$$e(\operatorname{fr} A, \operatorname{fr} B) \leq d(b, A) + 3\varepsilon \leq e(B, A) + 3\varepsilon \leq h(A, B) + 3\varepsilon. \tag{8}$$

Comme ε est arbitraire, (5) résulte de (6) et (8). ∎

Remarques. 1) Banalement, (4) résulte aussi du Lemme 1 et de l'inégalité suivante [4], valable pour des parties quelconques de X:

$$h(\mathrm{co}\,A_1\,,\,\mathrm{co}\,A_2) \leq h(A_1\,,\,A_2)\,.$$

2) On peut rapprocher le raisonnement employé pour démontrer (5) de celui du Théorème 1 de [5], où X est un espace euclidien (de dimension finie).

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 1:

COROLLAIRE. *Soit* T *un espace topologique (resp. un intervalle, resp. un espace métrique). Soit* $F : T \to \mathcal{B}(X)$ *une multifonction. Alors* $\tau \to F(\tau)$ *est continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne) au sens de la distance de Hausdorff si et seulement si il en est de même pour* $\tau \to \mathrm{fr}\,F(\tau)$.

L'énoncé analogue en ce qui concerne les semi-continuités des multifonctions F et fr F, prises au sens usuel [6], est le suivant:

THÉORÈME 2. *Soient* T *un espace topologique,* X *un espace normé réel et* $F : T \to \mathcal{B}(X)$ *une multifonction à valeurs dans les convexes fermés bornés non vides de* X. *On a*:

(*a*) *Si* $\tau \to \mathrm{fr}\,F(\tau)$ *est semi-continue inférieurement au point* $\tau_0 \in T$ *alors il en est de même pour* F, *mais la réciproque est fausse.*

(*b*) *Si* $F(\tau_0)$ *est compact, alors si* $\tau \to \mathrm{fr}\,F(\tau)$ *est semi-continue supérieurement en* τ_0, *il en est de même pour* F, *mais la réciproque est fausse.*

Démonstration. Montrons d'abord que la semi-continuité inférieure (resp. supérieure) de la multifonction F n'entraîne pas la semi-continuité inférieure ni la semi-continuité supérieure de fr F. Si par exemple $X = T = \mathbf{R}$, posons $F(\tau) = [0\,,1]$ si $\tau \neq 0$ et $F(0) = [0,1/2]$ (resp. $F(0) = [0\,,2]$). Alors F est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) mais dans les deux cas fr F n'est ni semi-continue inférieurement ni semi-continue supérieurement.

(*a*) Supposons maintenant que fr F est semi-continue inférieurement en τ_0 et que W est un ouvert de X rencontrant $F(\tau_0)$ en un point x_0. En notant U la boule unité ouverte de X, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 + \varepsilon U \subset W$ et écrire $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ où $x_1\,, x_2 \in \mathrm{fr}\,F(\tau_0)$ et $0 \leq \lambda \leq 1$ (cf. Lemme 1). Par définition de semi-continuité inférieure, soit V un voisinage de τ_0 dans T tel que pour tout $\tau \in V$ il existe

$$y_i \in \mathrm{fr}\,F(\tau) \cap (x_i + \varepsilon U) \qquad (i = 1\,,2)\,.$$

Alors, le point $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ appartient à $F(\tau)$ et aussi à W, car $|y - x_0| \leq \lambda\,|y_1 - x_1| + (1 - \lambda)\,|y_2 - x_2| < \varepsilon$, ce qui prouve la semi-continuité inférieure de F en τ_0.

(*b*) Soit W un ouvert contenant $F(\tau_0)$. Associons à chaque x appartenant à $F(\tau_0)$ un nombre positif $r(x)$ tel que $x + 2r(x)\,U \subset W$. Soit $x_i + r(x_i)\,U$ $(1 \leq i \leq n)$ un recouvrement fini de $F(\tau_0)$ et posons $\varepsilon = \min r(x_i) > 0$. Visiblement l'ouvert convexe

$$W_\varepsilon = \{x \in X : d(x, F(\tau_0)) < \varepsilon\}$$

vérifie alors $F(\tau_0) \subset W_\varepsilon \subset W$. Si la multifonction frontière est semi-continue supérieurement au point τ_0, on a $\mathrm{fr}\, F(\tau) \subset W_\varepsilon$, pour tout τ dans un voisinage de τ_0. Il s'ensuit, vu le Lemme 1:

$$F(\tau) = \mathrm{co}\,\mathrm{fr}\, F(\tau) \subset \mathrm{co}\, W_\varepsilon = W_\varepsilon \subset W .$$

Remerciements. Ce travail a été réalisé pendant le séjour de l'auteur à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc, en détachement de la Faculté des Sciences de Lisbonne et grâce à une bourse de la Fondation Calouste Gulbenkian de Lisbonne. L'auteur remercie C. Castaing, J.J. Moreau et J. Saint-Pierre de leurs suggestions.

REFERENCES

[1] S. BAHI (1983) – *Quelques propriétés topologiques de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle multivoque* (I), « Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier », *13*, exposé n. 3.

[2] F.S. DE BLASI and G. PIANIGIANI (1982) – *A Baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in Banach spaces*, « Funkcial. Eqkvac. », *25*, 153-162.

[3] G. KÖTHE (1960) – *Topologische Lineare Räume I*, Springer.

[4] G. DEBREU (1967) – *Integration of correspondences*, in Proc. of the Fifth Berkeley Symposium on « Math. Stat. and Prob. », vol. II, part I (ed. Le Cam et Neyman), 351-372.

[5] N. KIKUCHI and Y. TOMITA (1971) – *On the absolute continuity of multifunctions and orientor fields*, « Funkcial. Eqkvac. », *14*, 161-170.

[6] C. CASTAING and M. VALADIER (1977) – *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, « Lecture Notes », Springer n. 580, 1977.