Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovambattista Amendola, Adele Manes

Esistenza e unicità della soluzione nella statica di solidi termoelastici incomprimibili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **80** (1986), n.7-12, p. 551–560.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1986_8_80_7-12_551_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1986.

Fisica matematica. — *Esistenza e unicità della soluzione nella statica di solidi termoelastici incomprimibili* (*). Nota di GIOVAMBATTISTA AMENDOLA (**) e ADELE MANES (***), presentata (****) dal Corrisp. T. MANACORDA.

SUMMARY. — In this work we prove that the thermoelastic equilibrium problem in the context of the linear theory for thermoelastic incompressible solids has one and only one solution.

1. INTRODUZIONE

In questo lavoro si studia l'esistenza e l'unicità della soluzione per i problemi al contorno relativi alle equazioni linearizzate della statica dei solidi termoelastici incomprimibili esaminati in [1]. I risultati ottenuti valgono anche per le corrispondenti equazioni, ricavate da T. Manacorda in [2], per i solidi termoelastici incomprimibili nel senso di Signorini [3], per la formale coincidenza delle equazioni.

La presenza di un vincolo di incomprimibilità comporta, com'è noto, l'introduzione di una nuova funzione incognita, come un moltiplicatore di Lagrange: una pressione indeterminata p. Essa compare, in particolare, nell'espressione del tensore degli sforzi come una parte isotropa; un termine analogo, nella stessa espressione, è dovuto alla temperatura per i solidi termoelastici in esame [1]. Dal momento che quando si assegna la temperatura sul contorno del solido termoelastico, si dà automaticamente anche quella parte del tensore degli sforzi ad essa legata; nello stesso modo, essendo p una funzione armonica nella statica dei solidi qui considerati, si può pensare di assegnare la parte dello sforzo isotropo dovuta a p, considerando questa come una pressione imposta dall'esterno.

La particolare natura del sistema di equazioni differenziali permette di risolvere il problema termico e quello nella pressione, legata alla incomprimibilità dei solidi in esame, indipendentemente da quello negli spostamenti. Per quest'ultimo, nell'ambito della teoria variazionale degli operatori alle derivate par-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito di Gruppi di ricerca del C.N.R.

(**) Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini », Facoltà di Ingegneria, via Diotisalvi, 2 - Pisa.

(***) Dipartimento di Matematica, via Buonarroti, 2 - Pisa.

(****) Nella seduta del 29 novembre 1986.

ziali, si costruisce una forma integro-differenziale legata al sistema delle rimanenti equazioni e si studia il problema utilizzando il teorema di Lax-Milgram e le classiche maggiorazioni di Poincaré e di Korn.

Per problemi analoghi a quello studiato in questa nota, si rimanda in particolare ai lavori di S. Campanato [4], di C.M. Dafermos [6] e per la teoria generale al volume di J.L. Lions e E. Magenes [9].

2. Preliminari

Le equazioni linearizzate della statica dei solidi termoelastici incomprimibili, introdotti in [1], possono essere ricavate direttamente dalle equazioni che regolano la termoelasticità linearizzata di tali corpi. Nel caso di solidi omogenei ed isotropi esse assumono la seguente forma (v. (6.20) di [1]).

$$\begin{aligned} &\mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \mathrm{L} \operatorname{grad} \theta - \sigma \operatorname{grad} p = \mathbf{0}\,, \\ &\Delta\theta = 0\,, \\ &\sigma \operatorname{div} \boldsymbol{u} = - a\,\theta\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

in assenza di forze di massa e di sorgenti termiche.

In queste μ, λ, L, σ ($\neq 0$) ed a sono costanti caratteristiche del materiale, la prima delle quali può essere supposta positiva ($\mu > 0$), in base alle considerazioni finali di [1] sulla propagazione di onde di accelerazione in tali solidi; $\boldsymbol{u}$ è il vettore spostamento linearizzato, θ è la variazione della temperatura nei punti del solido rispetto alla temperatura uniforme della configurazione di riferimento e p è il parametro che dà lo sforzo dovuto al vincolo di incomprimibilità (v. (3.2), (3.8) di [1]) anch'esso linearizzato.

Riportiamo inoltre l'espressione linearizzata del tensore degli sforzi (v. (6.14) di [1]).

$$\mathbf{T} = 2\,\mu\mathbf{E} + (\lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \mathrm{L}\theta - \sigma p)\,\mathbf{1}\,, \tag{2.2}$$

dove

$$\mathbf{E} = 1/2\ [\operatorname{grad} \boldsymbol{u} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}] \tag{2.3}$$

è il tensore di deformazione, anch'esso linearizzato.

È importante osservare, anche per il seguito, che dalle (2.1) si ottengono facilmente alcune conseguenze differenziali; infatti, applicando l'operatore di Laplace alla $(2.1)_3$ e tenendo conto dell'armonicità di θ, segue che

$$\Delta \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\,, \tag{2.4}$$

inoltre, calcolando il rotore e la divergenza della $(2.1)_1$, si ha

$$\Delta \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \Delta p = 0 , \tag{2.5}$$

infine, sempre dalla $(2.1)_1$, con l'operatore di Laplace si ricava

$$\Delta\Delta \boldsymbol{u} = \mathbf{0} . \tag{2.6}$$

In definitiva, continuano a valere anche per i solidi incomprimibili in esame gli stessi risultati che, come è ben noto, sono validi per i solidi elastici omogenei ed isotropi e cioè le relazioni (2.4), $(2.5)_1$ e (2.6) [8]. Sussiste inoltre la $(2.5)_2$ che esprime l'importante conseguenza dell'armonicità di p, condizione questa che ci sarà particolarmente utile nel seguito.

3. CONDIZIONI AL CONTORNO

Sia $\mathscr{C}$ il solido termoelastico incomprimibile per il quale valgono le (2.1). Indichiamo con C la regione regolare limitata di $\mathbf{R}^3$ occupata da $\mathscr{C}$, con ∂C il contorno di tale regione e con $\boldsymbol{n}$ la normale esterna nei punti di ∂C. Siano inoltre $\partial_1 C$ e $\partial_2 C$ due parti disgiunte di ∂C, tali che $\partial C = \partial_1 C \cup \partial_2 C$ e $\partial_1^0 C \cap \partial_2^0 C = \varnothing$.

Ciò premesso, osserviamo che le funzioni incognite che compaiono nel sistema di equazioni differenziali (2.1) sono lo spostamento $\boldsymbol{u}$, la temperatura θ e la pressione p. Per ciascuna di tali grandezze è possibile associare al sistema (2.1) delle condizioni al contorno di diversa natura, ottenendo così problemi con dati del tipo di Dirichlet, di Neumann e misto. Dal punto di vista fisico però solo alcuni di tali problemi hanno interesse, per cui noi ci occuperemo solo di questi osservando che i risultati ottenuti continuano ad essere formalmente validi anche per quei problemi che non sono trattati esplicitamente.

Assumiamo pertanto le seguenti condizioni al contorno

$$\theta = \hat{\theta} \quad \text{oppure} \quad \partial\theta/\partial n = \hat{h} \quad \text{su} \quad \partial C \tag{3.1}$$

e

$$p = \hat{p} \quad \text{su} \quad \partial C , \tag{3.2}$$

dove $\hat{\theta}$, $\hat{h}$ e $\hat{p}$ sono funzioni note dei punti di ∂C, inoltre

$$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} \quad \text{su} \quad \partial_1 C \quad \text{e} \quad \mathbf{T}\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{t}} \quad \text{su} \quad \partial_2 C , \tag{3.3}$$

$\hat{\boldsymbol{u}}$ e $\hat{\boldsymbol{t}}$ essendo due vettori definiti su $\partial_1 C$ e $\partial_2 C$ rispettivamente.

Le (3.1) esprimono le due possibilità che si presentano nei problemi termici e cioè con la $(3.1)_1$ si assegna la temperatura sul contorno di C mentre con la $(3.1)_2$ si impone una condizione sul flusso di calore, che attraversa ∂C e che, in base alla (6.17) di [1], è espresso da $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = k \operatorname{grad} \theta \cdot \boldsymbol{n}$ e quindi dalla $(3.1)_2$.

La condizione (3.2) relativa a p è giustificata dall'incomprimibilità del solido, per la quale si ha una nuova funzione incognita, rispetto al caso di solidi comprimibili, ma anche una terza equazione a disposizione [v. (2.1)].

4. Esistenza e unicità

Indichiamo con $H^1(C)$ lo spazio di Sobolev delle funzioni definite su C, di quadrato sommabile insieme con le derivate prime, con il prodotto scalare

$$(4.1) \qquad (u\,,v) = \int_C uv \, dC + \int_C \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dC \qquad \forall u\,, v \in H^1(C)$$

e la norma ad esso associata

$$(4.2) \qquad \| u \|^2 = \int_C u^2 \, dC + \int_C \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u \, dC \qquad \forall u \in H^1(C)\,.$$

Siano inoltre $H^{1/2}(\partial C)$ lo spazio di Sobolev frazionario delle tracce $\gamma_0(u)$ sul bordo di C degli elementi di $H^1(C)$ e $H^{-1/2}(\partial C)$ lo spazio di Sobolev, duale di $H^{1/2}(\partial C)$, delle tracce relative all'operatore di bordo $\gamma_1(u) = \partial u/\partial n$. Ricordiamo che γ_0 indica l'applicazione lineare definita su $H^1(C)$ a valori in $L^2(\partial C)$ tale che se $u \in \mathscr{D}(\bar{C})$, lo spazio delle distribuzioni definite su $\bar{C}$, allora $\gamma_0(u) = u_{|\partial C}$; in maniera analoga si definisce γ_1, purché ∂C sia dotato di normale quasi ovunque (basta per questo che la frontiera sia localmente lipshitziana).

Osserviamo ora che, in base alla $(2.1)_2$ e alla conseguente $(2.5)_2$, possiamo considerare, indipendentemente da $\boldsymbol{u}$, i problemi relativi a θ e p, che possono essere studiati separatamente.

4. *a) Problema nella temperatura.*

Avendo assegnato come condizioni al contorno le (3.1), il problema termico consiste nel risolvere il seguente problema di Dirichlet

$$(4.3) \qquad \Delta\theta = 0 \quad \text{in } C\,, \qquad \theta = \hat{\theta} \quad \text{su } \partial C$$

se si assume la $(3.1)_1$, oppure il problema di Neumann

$$(4.4) \qquad \Delta\theta = 0 \quad \text{in } C\,, \qquad \partial\theta/\partial n = \hat{h} \quad \text{su } \partial C$$

se si considera la $(3.1)_2$ come condizione al contorno.

Il primo di questi due problemi, espresso dalle (4.3), ammette, come è noto, una e una sola soluzione $\overline{\theta} \in H^1(C)$ se si suppone che $\hat{\theta} \in H^{1/2}(\partial C)$.

Per quanto riguarda il secondo problema (4.4), osserviamo innanzi tutto che la funzione $\hat{h}$ assegnata sul bordo di C non può essere arbitraria in quanto essa deve verificare la seguente condizione di compatibilità

$$\int_{\partial C} \hat{h}\, d\sigma = 0\,, \tag{4.5}$$

in base al noto risultato che il flusso del gradiente di una funzione armonica attraverso la frontiera è nullo. D'altra parte la soluzione del problema di Neumann non è unica, dal momento che, se $\overline{\theta}$ è una soluzione del problema (4.4) allora è anche soluzione dello stesso problema ogni altra funzione che differisca da $\overline{\theta}$ per una costante. Tuttavia, se si assume una ulteriore condizione su θ quale

$$\int_{C} \theta\, dC = 0\,, \tag{4.6}$$

la soluzione di (4.4) è univocamente determinata. In definitiva il problema (4.4) con le condizioni (4.5) e (4.6) ammette una e una sola soluzione $\overline{\theta} \in V =$ $= \left\{\theta \in H^1(C) : \int_C \theta\, dC = 0\right\}$ purché $\hat{h}$ appartenga allo spazio $H^{-1/2}(\partial C)$.

4. *b*) *Problema nella pressione.*

In maniera analoga al problema (4.3) si risolve anche il problema nella pressione, dal momento che, in virtù della $(2.5)_2$, p deve necessariamente essere armonica in C e, tenendo conto della (3.2), deve essere soluzione di un problema analogo a quello espresso dalle (4.3) e cioè di

$$\Delta p = 0 \quad \text{in } C, \qquad p = \hat{p} \quad \text{su } \partial C\,. \tag{4.7}$$

Ne segue dunque che esiste una e una sola soluzione $\overline{p} \in H^1(C)$ se $\hat{p} \in H^{1/2}(\partial C)$.

4. *c*) *Problemi negli spostamenti.*

Avendo già risolto i problemi in θ e p, se si tiene conto del fatto che il primo membro della $(2.1)_1$ è la divergenza di $\mathbf{T}$, espresso dalla (2.2), il problema negli spostamenti assume la seguente forma

$$
\begin{aligned}
&- \operatorname{div} \mathbf{E} = - \frac{1}{2\mu} \left\{ \left(\frac{a}{\sigma} \lambda + L \right) \operatorname{grad} \bar{\theta} + \sigma \operatorname{grad} \bar{p} \right\}, \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{u} = - \frac{a}{\sigma} \bar{\theta},
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

con le condizioni al contorno

$$
\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} \quad \text{su} \quad \partial_1 C \quad \text{e} \quad \mathbf{T}\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{t}} \quad \text{su} \quad \partial_2 C, \tag{3.3}
$$

dove $\bar{\theta}$ e $\bar{p}$ sono le soluzioni dei problemi nella temperatura e nella pressione e appartengono a $H^1(C)$.

Osserviamo che assegnare gli sforzi $(3.3)_2$ su $\partial_2 C$, in base alla (2.2), equivale ad assegnare

$$
\mathbf{E}\boldsymbol{n} = \frac{1}{2\mu} \left\{ \hat{\boldsymbol{t}} + \left[\left(\frac{a}{\sigma} \lambda + L \right) \bar{\theta} + \sigma \bar{p} \right] \boldsymbol{n} \right\} \quad \text{su} \quad \partial_2 C; \tag{4.9}
$$

si può pertanto sostituire la $(3.3)_2$ con

$$
\mathbf{E}\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}} \quad \text{su} \quad \partial_2 C. \tag{4.10}
$$

Ovviamente se $\partial_1 C = \varnothing$ si ha il problema negli sforzi, se $\partial_2 C = \varnothing$ si ha il problema negli spostamenti.

Sia V un sottospazio chiuso di $[H^1(C)]^3$ definito da un sistema di operatori differenziali di bordo e da altre eventuali condizioni di compatibilità, V′ il duale di V e $< F, \boldsymbol{u} >$ il valore che assume il funzionale $F \in V'$ in corrispondenza di $\boldsymbol{u} \in V$.

Data la forma integro-differenziale definita in $[H^1(C)]^3$

$$
a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_C (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} + \operatorname{div} \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \, dC, \tag{4.11}
$$

dove E è data dalla (2.3), consideriamo il problema: trovare una funzione $\boldsymbol{u} \in V$ tale che

$$
a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = < F, \boldsymbol{v} > \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V \tag{4.12}
$$

con

$$(4.13)\quad < F , \boldsymbol{v} > = \int_C -\frac{1}{2\mu}\left\{\left[\frac{a}{\sigma}\left(\lambda - 2\mu\right) + L\right]\operatorname{grad}\bar{\theta} + \sigma \operatorname{grad}\bar{p}\right\}.\,\boldsymbol{v}\, dC + \\ -\int_{\partial C} \frac{a}{\sigma}\bar{\theta}\boldsymbol{n}\,.\,\boldsymbol{v}\, d\sigma \text{ (1)}.$$

Osserviamo che, scegliendo opportunamente il sottospazio V di $[H^1(C)]^3$, ogni soluzione classica di (4.8), con le condizioni $(3.3)_1$ e (4.10), è anche soluzione di (4.12); viceversa una soluzione generalizzata è soluzione classica solo nel caso che siano verificate certe condizioni di regolarità sui dati. Per dimostrare ciò basta moltiplicare scalarmente la (4.8) per $(\boldsymbol{v}\,, \operatorname{div} \boldsymbol{v})$ con $\boldsymbol{v} \in V$ e integrare per parti.

Per studiare il problema espresso dalla (4.12) occorre pertanto definire esplicitamente lo spazio ambiente V al variare del tipo delle condizioni al contorno associate alle (4.8) e riportare al caso omogeneo i problemi con dati al bordo non nulli.

Consideriamo dapprima il problema di Dirichlet negli spostamenti. Nel caso omogeneo si ha

$$(4.14)\qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad \text{su } \partial C,$$

per cui si sceglie $V = [H_0^1(C)]^3$.

Se invece

$$(4.15)\qquad \boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} \neq \boldsymbol{0} \qquad \text{su} \quad \partial C \quad \text{con } \hat{\boldsymbol{u}} \in [H^{1/2}(\partial C)]^3,$$

è possibile trovare una funzione $\boldsymbol{g} \in [H^1(C)]^3$ tale che la sua traccia sul bordo di C sia $\hat{\boldsymbol{u}}$; si considera quindi la funzione

$$(4.16)\qquad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{g},$$

dove $\boldsymbol{u}$ è una soluzione del problema non omogeneo e si studia il seguente problema omogeneo: trovare una funzione $\boldsymbol{w} \in [H_0^1(C)]^3$ tale che

$$(4.17)\qquad a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = < F, \boldsymbol{v} > - a(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in [H_0^1(C)]^3.$$

Per quanto riguarda il problema misto, nel caso omogeneo, se la parte di frontiera $\partial_1 C$ è «sufficientemente grande» è possibile scegliere

$$(4.18)\qquad V = \{\boldsymbol{u} \in [H^1(C)]^3 : \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{su } \partial_1 C\};$$

(1) Gli integrali al secondo membro della (4.13) hanno senso in quanto $\bar{\theta}$ e $\bar{p}$ sono elementi di $H^1(C)$.

nel caso non omogeneo si può procedere come per il problema negli spostamenti.

Infine per il problema negli sforzi, non essendo presente un dato di Dirichlet, lo spazio V delle funzioni, che ora possono assumere qualunque valore su ∂C, coinciderebbe con $[H^1(C)]^3$; ma, poiché è necessario garantire la coercività della forma $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, si considera, nel caso omogeneo, cioè se $\mathbf{E}\boldsymbol{n} = \mathbf{0}$ su ∂C, (v. anche a pag. 51 di [7])

$$V = \left\{ \boldsymbol{u} \in [H^1(C)]^3 : \int_C \boldsymbol{u}\, dC = \mathbf{0} \quad e \quad \int_C (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \wedge \boldsymbol{u}\, dC = \mathbf{0} \right\}. \tag{4.19}$$

Se il dato di Neumann non è nullo ma $\mathbf{E}\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}} \in [H^{-1/2}(\partial C)]^3$, basta considerare il seguente problema: trovare una funzione $\boldsymbol{u} \in V$ tale che

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = < F, \boldsymbol{v} > + \int_{\partial C} \hat{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{v}\, d\sigma \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V \tag{4.20}$$

con V definito dalla (4.19).

Osserviamo che, in ogni caso, per il problema di Neumann deve essere verificata la seguente condizione di compatibilità

$$< F, \bar{\boldsymbol{v}} > + \int_{\partial C} \hat{\boldsymbol{e}} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}\, d\sigma = 0 \tag{4.21}$$

dove $\bar{\boldsymbol{v}}$ assume successivamente i valori

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{c} = \text{costante e } \bar{\boldsymbol{v}} = (x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1). \tag{4.22}$$

Ovviamente, devono inoltre essere verificate le seguenti condizioni della statica

$$\int_{\partial C} \hat{\boldsymbol{t}}\, d\sigma = \mathbf{0} \quad e \quad \int_{\partial C} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \wedge \hat{\boldsymbol{t}}\, d\sigma = \mathbf{0}. \tag{4.23}$$

Con la scelta fatta per lo spazio V vale il seguente risultato: esiste una e una sola soluzione per i problemi considerati.

Per dimostrare ciò, in virtù del teorema di Lax-Milgram (v. pag. 116 di [7]), basta far vedere che la forma bilineare $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ definita dalla (4.11) è continua e coerciva su V.

Verifichiamo dapprima che $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ è continua. Infatti, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha [v. (4.11), (2.3)]

$$|a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leq \frac{1}{2}\left|\int_C \operatorname{grad}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{v}\,dC\right| + \frac{1}{2}\cdot \tag{4.24}$$

$$\cdot\left|\int_C (\operatorname{grad}\boldsymbol{u})^T\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{v}\,dC\right| + \left|\int_C \operatorname{div}\boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dC\right| \leq \left(\int_C \operatorname{grad}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{u}\,dC\right)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_C \operatorname{grad}\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{v}\,dC\right)^{1/2} + \left(\int_C (\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2\,dC\right)^{1/2}\left(\int_C (\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2\,dC\right)^{1/2};$$

inoltre, poiché si ha

$$2(\partial u_i/\partial x_i)(\partial u_j/\partial x_j) \leq (\partial u_i/\partial x_i)^2 + (\partial u_j/\partial x_j)^2 \qquad (i,j=1,2,3), \tag{4.25}$$

risulta

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{u})^2 \leq 3\sum_{i=1}^{3}(\partial u_i/\partial x_i)^2 \leq 3\operatorname{grad}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{u}, \tag{4.26}$$

e quindi

$$|a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leq 4\left(\int_C \operatorname{grad}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{u}\,dC\right)^{1/2}\left(\int_C \operatorname{grad}\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{v}\,dC\right)^{1/2} \leq \tag{4.27}$$

$$\leq 4\,\|\boldsymbol{u}\|_V\,\|\boldsymbol{v}\|_V\,.$$

Per dimostrare la coercività di $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ ricordiamo che valgono le seguenti disuguaglianze di Poincaré

$$2\beta\int_C \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\,dC \leq \int_C \operatorname{grad}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{u}\,dC \qquad \forall\boldsymbol{u}\in[H_0^1(C)]^3,$$

(4.28)

$$\beta_1\int_C \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\,dC \leq \int_C \operatorname{grad}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{u}\,dC + \gamma\left(\int_C \boldsymbol{u}\,dC\right)^2 \forall\boldsymbol{u}\in[H^1(C)]^3,$$

dove β, β_1 e γ sono opportune costanti positive, e che la $(4.28)_1$ continua a valere anche se $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ solo su una parte $\partial_1 C \subset \partial C$ purché $\partial_1 C$ sia « sufficientemente grande » [7]. Poiché inoltre la disuguaglianza di Korn assicura che esiste una costante $c>0$ tale che

$$\int_C \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\,dC \geq c\int_C \operatorname{grad}\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{u}\,dC \qquad \forall\boldsymbol{u}\in V \tag{4.29}$$

con V sottospazio di $[H^1(C)]^3$ tale che $[H^1_0(C)]^3 \subset V \subset [H^1(C)]^3$, si ha

$$(4.30) \qquad a(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) \geq \int_C \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \, dC = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \, dC \geq c \int_C \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \, dC \geq$$

$$\geq c \left\{ \frac{1}{2} \int_C \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \, dC + \alpha \int_C \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \, dC \right\} \geq c\delta \, \| \boldsymbol{u} \| \, {}^2_V$$

con $\delta = \min \left(\frac{1}{2}, \alpha \right)$ e α è legato a β o β_1, in base alle (4.28) e (4.19), a seconda delle condizioni poste sulla frontiera di C e quindi della scelta di V.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. AMENDOLA (1978) – *A general theory of thermoelastic solids restrained by an internal thermomechanical constraint*, « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », *27*, 1-14.
[2] T. MANACORDA (1960) – *Sulla termoelasticità dei solidi incomprimibili*, « Riv. Mat. Univ. Parma », (2), *1*, 149-170.
[3] A. SIGNORINI (1955) – *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. III: *Solidi incomprimibili*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », (4), *39*, 147-201.
[4] S. CAMPANATO (1959) – *Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità*, « Ann. Scuola Normale Superiore », Pisa, *13*, I, 223-258; II, 275-302.
[5] P. PODIO GUIDUGLI (1974) – *Un teorema di esistenza e unicità in elastodinamica lineare*, II Congresso Nazionale AIMETA, Napoli, 16-19 ott. 1974.
[6] C.M. DAFERMOS (1968) – *On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *29*, 242-271.
[7] P. VILLAGGIO (1977) – *Qualitative methods in elasticity*, Noordhoff International Publishing, Leyden.
[8] M.E. GURTIN (1972) – *The linear theory of elasticity*, in « Handbuch der Physik », Band VI/a2, Springer-Verlag, Berlin.
[9] J.L. LIONS-E. MAGENES (1972) – *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin.