Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Andrea Braides

## Omogeneizzazione di funzionali debolmente quasi periodici

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **81** (1987), n.1, p. 29–33.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_1_29_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1987.

*Atti Acc. Lincei Rend. fis.*
*(8), LXXXI (1987), pp. 29–33*

**Calcolo delle variazioni.** — *Omogeneizzazione di funzionali debolmente quasi periodici.* Nota di ANDREA BRAIDES (*), presentata (**) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

ABSTRACT. — *Homogenization of weakly almost-periodic functionals.* Let $f = f(x, z)$ be quasiconvex in $z$, almost periodic in $x$ in the weak sense of Besicovitch and satisfy the estimate

$$|z|^p \leq f(x, z) \leq \Lambda (1 + |z|^p).$$

Then $f$ can be homogenized; that is there exists a function $\Psi$ depending only on $z$ such that the functionals

$$\int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \mathrm{D}\, u(x)\right) \mathrm{d}\, x \qquad u \in \mathrm{H}^{1,p}(\Omega\,;\mathrm{R}^m)$$

converge, as $\varepsilon$ goes to 0 (in the sense of $\Gamma$-convergence) to

$$\int_\Omega \Psi(\mathrm{D}\, u(x))\, \mathrm{d}\, x\,.$$

Moreover an asymptotic formula for $\Psi$ can be given.

KEY WORDS: Homogenization; Almost-periodicity, Quasiconvexity; $\Gamma$-convergence.

RIASSUNTO. — Sia $f = f(x, z)$ quasiconvessa in $z$, quasiperiodica in $x$ nel senso di Besicovitch e soddisfi le disuguaglianze:

$$|z|^p \leq f(x, z) \leq \Lambda (1 + |z|^p)\,.$$

Allora $f$ può essere omogeneizzata: esiste una funzione $\Psi$ che dipende solo da $z$ tale che i funzionali

$$\int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \mathrm{D}u(x)\right) \mathrm{d}x \qquad u \in \mathrm{H}^{1,p}(\Omega\,;\mathrm{R}^n)$$

convergono, per $\varepsilon$ tendente a 0 (nel senso della $\Gamma$-convergenza) a

$$\int_\Omega \Psi(\mathrm{D}u(x))\, \mathrm{d}x\,.$$

Inoltre si può dare una formula asintotica per $\Psi$.

(*) Scuola Normale Superiore 56100 Pisa.
(**) Nella seduta del 20 giugno 1986.

In questa Nota si considera il problema dell'omogeneizzazione di funzionali del tipo

$$F_\varepsilon(u, \Omega) = \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du(x)\right) dx,$$

ovvero la caratterizzazione del comportamento di tali funzionali per $\varepsilon$ che tende a 0, in un senso variazionale. Nel linguaggio della $\Gamma$– convergenza, ciò significa cercare un funzionale $F(u, \Omega)$ che sia il $\Gamma$–limite degli $F_\varepsilon(u, \Omega)$.

In ipotesi di vario tipo questo problema è stato studiato da vari autori, in special modo quando $f$ sia una forma quadratica. Un teorema di omogeneizzazione per funzionali di forma generale è stato dato da P. Marcellini, nel caso in cui $f$ sia periodica nella prima variabile, convessa nella seconda e i funzionali in questione dipendano da funzioni scalari.

*Teorema di omogeneizzazione–caso periodico* (Marcellini [8]).

*Siano* $p, \Lambda \geq 1$; *sia* $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to [0, +\infty[$ *una funzione di Carathèodory* 1*–periodica in* $x$ *e convessa in* $z$, *tale che*

$$|z|^p \leq f(x, z) \leq \Lambda(1 + |z|^p)$$

*per ogni* $z$, *per quasi ogni* $x$. *Allora*

i) $f$ *è omogeneizzabile, ovvero esiste una funzione* $\Psi : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ *tale che*

$$\int_\Omega \Psi(D\, u(x))\, dx = \Gamma(L^p(\Omega)^-) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, D\, u(x)\right) dx$$

*per ogni aperto limitato* $\Omega$ *di* $\mathbf{R}^n$ *e* $u \in H^{1,p}(\Omega)$;

ii) *vale la formula di omogeneizzazione :*

$$\Psi(z) = \min\left\{ \int_{]0,1[^n} f(x, D\, u(x) + z)\, dx : u \in H^{1,p}(]0, 1[^n) \text{ e } 1\text{–periodica} \right\}$$

*per ogni* $z \in \mathbf{R}^n$.

In successivi lavori (si veda per esempio Fusco [6], Braides [4]) il punto i) del teorema è stato dimostrato anche per funzioni $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{nm} \to [0, +\infty[$ quasiconvesse in $z$ e periodiche in $x$, ovvero per funzionali dipendenti da $u \in H^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$.

Nel caso scalare ($m = 1$) inoltre, l'ipotesi $f(x, z) \geq |z|^p$ può essere sostituita dalla sola positività della $f$ (Braides [3]).

Se si abbandona l'ipotesi di periodicità, è possibile ancora dimostrare la omogeneizzabilità, sotto l'ipotesi di quasi-periodicità della $f$.

Alla formula di omogeneizzazione del punto ii) si dovrà però sostituire una *formula asintotica*

$$\text{iii)}\quad \Psi(z) = \lim_{T\to+\infty} \min\left\{\frac{1}{T^n}\int_{]0,T[^n} f(x\,,\,D\,u(x)+z)\,d\,x : u \in H_0^{1,p}(]0\,,\,T[^n)\right\}.$$

Teoremi di omogeneizzazione per funzionali quasi periodici sono stati dimostrati nel caso quadratico (si veda ad esempio [7]). Per funzionali di forma generale il cui integrando verifichi

$$|z|^p \leq f(x\,,z) \leq \Lambda\,(1+|z|^p)$$

è stato dimostrato un teorema di omogeneizzazione sotto opportune ipotesi di uniforme quasi-periodicità (si veda [4]).

Scopo di questa Nota è di studiare l'omogeneizzazione sotto le semplici ipotesi che $f$ sia quasi periodica (secondo Besicovitch) in $x$ e quasi-convessa in $z$.

Le dimostrazioni, che verranno esposte in un lavoro di prossima pubblicazione, sfruttano un metodo di approssimazione di funzioni quasiconvesse. La funzione $f$ viene approssimata « in media » con una successione di funzioni $p$-uniformemente quasi-periodiche, e quindi omogeneizzabili. L'omogeneizzabilità della $f$ viene assicurata da un teorema di « scambio del $\Gamma$-limite », la cui dimostrazione si basa su un risultato di regolarità dei minimi di funzionali del Calcolo delle Variazioni (Meyers ed Elcrat [9]).

Prima di enunciare il risultato principale, introduciamo alcune notazioni. Consideriamo fissati per tutto il seguito due interi $n, m \geq 1$ e due numeri reali $p\,,\Lambda$ con $p\,,\Lambda > 1$. Diremo che una funzione $f$ appartiene alla classe $F = F(n\,,m\,,p\,,\Lambda)$ se $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{nm} \to \mathbf{R}$,

i) $f(x\,,\,\cdot)$ è continua per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$;

ii) $f(\,\cdot\,,z)$ è misurabile per ogni $z \in \mathbf{R}^{nm}$;

iii) $|z|^p \leq f(x\,,z) \leq \Lambda\,(1+|z|^p)$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$, per ogni $z \in \mathbf{R}^{nm}$.

Una funzione $g : \mathbf{R}^{nm} \to \mathbf{R}$ è *quasiconvessa* se per ogni $z \in \mathbf{R}^{nm}$, per ogni aperto limitato $\Omega$ di $\mathbf{R}^n$, $u \in H_0^{1,p}(\Omega\,;\mathbf{R}^N)$, si ha

$$\operatorname{mis}(\Omega)\,g(z) \leq \int_\Omega g(D\,u(y)+z)\,d\,y\,.$$

Se $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è una funzione localmente integrabile, porremo

$$\fint g(x)\,\mathrm{d}x = \limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{(2T)^n} \int_{]-T,T[^n} g(x)\,\mathrm{d}x .$$

Una funzione $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è *quasi-periodica* (nel senso di Besicovitch [2]) se esiste una successione di polinomi trigonometrici $(P_h)$ su $\mathbf{R}^n$ (ovvero funzioni del tipo

$$P_h(x) = \sum_{1}^{n_h} {}_k\, a_k\, e^{i\,\lambda_k \cdot x}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_h} \in \mathbf{R}^n$), tali che

$$\lim_{h\to+\infty} \fint |P_h(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = 0 .$$

Sia X uno spazio topologico, $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un insieme di funzioni definite su un sottoinsieme Y di X a valori in $\overline{\mathbf{R}}$. Sia $x$ un elemento della chiusura di Y in X e $t \in \overline{\mathbf{R}}$. Seguendo [5] diremo che

$$t = \Gamma(X^-) \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(x)$$

se e solo se

$$t = \sup_{Y\in\mathscr{I}(x)} \liminf_{\varepsilon\to 0} \inf_{y\in Y} F_\varepsilon(y) = \sup_{Y\in\mathscr{I}(x)} \limsup_{\varepsilon\to 0} \inf_{y\in Y} F_\varepsilon(y) ,$$

dove $\mathscr{I}(x)$ indica l'insieme degli intorni di $x$ in X.

Vale ora il seguente teorema.

*Teorema di omogeneizzazione – caso quasi periodico.*

*Sia $f$ una funzione della classe $\mathscr{F}$. Supponiamo che*

*a) per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ la funzione $f(x, \cdot)$ sia quasiconvessa;*

*b) per ogni $z \in \mathbf{R}^{nm}$ la funzione $f(\cdot, z)$ sia quasiperiodica.*

*Allora esiste una funzione $\Psi : \mathbf{R}^{nm} \to [0, +\infty[$ quasi convessa, che verifica*

$$|z|^p \le \Psi(z) \le \Lambda(1 + |z|^p)$$

*per ogni $z \in \mathbf{R}^{nm}$, tale che, per ogni $\Omega$ aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, $u \in H^{1,p}(\Omega; R^m)$ si ha*

$$\int_\Omega \Psi(D\,u(x))\,\mathrm{d}x = \Gamma(L^p(\Omega)^-) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, D\,u(x)\right)\mathrm{d}x ,$$

*Inoltre vale la formula asintotica* iii) *per la* $\Psi$.

Notiamo che nelle ipotesi di questo teorema l'unica « uniformità » richiesta nella $z$ alla $f$ è la quasiconvessità. Questa è una condizione naturale essendo necessaria e sufficiente per la semicontinuità inferiore del funzionale

$\int_\Omega f(x, \mathrm{D}\, u(x))\, \mathrm{d}\, x$ (si veda Acerbi, Fusco [1]).

È possibile costruire con facilità (anche nel caso $m = 1$) funzioni $f$ convesse in $z$, quasiperiodiche in $x$ ma non omogeneizzabili, qualora non si richieda la condizione di coercività

$$|z|^p \leq f(x, z).$$

## BIBLIOGRAFIA


[1] E. ACERBI e N. FUSCO (1986) – *Semicontinuity problems in the Calculus of Variations*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *86*, 125-145.

[2] A. BESICOVITCH (1932) – *Almost Periodic Functions*. Cambridge 1932.

[3] A. BRAIDES (1983) – *Omogeneizzazione di integrali non coercivi*, « Ricerche di Mat. », *32*, 437-468.

[4] A. BRAIDES (1985) – *Homogenization of some almost periodic coercive functional*, « Rend. Accad. Naz. Sci. detta dei XL », *103*, 313-322.

[5] E. DE GIORGI (1984) – G-*operators and* Γ-*convergence*. Proc. Intern. Congr. of Math. Warsaw 1983, vol. 2. North Holland Amsterdam 1984.

[6] N. FUSCO (1983) – *On the convergence of integral functionals depending on vector-valued functions*, « Ric. Mat. », *32*, 321-339.

[7] S. KOZLOV (1978) – *Averaging Differential Operators with almost-periodic rapidly oscillating coefficients*, « Math. USSR Sbornik », *35*, 481-498.

[8] P. MARCELLINI (1978) – *Periodic solutions and homogenization of nonlinear variational problems*, « Ann. Mat. Pura Appl. », *1 7*, 139-152.

[9] N. MEYERS e A. ELCRAT (1975) – *Some results on regularity for solutions of nonlinear elliptic sistems and quasiregular functions*, « Duke Math. J. », *42*, 121-136.