Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico de Tommasi, Salvatore Marzano

Deformazioni finite di blocchi elastici incomprimibili: una soluzione esatta per appoggi in gomma semplicemente compressi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **82** (1988), n.2, p. 269–289.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_2_269_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1988.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXII (1988), pp. 269-289

Meccanica dei solidi. – *Deformazioni finite di blocchi elastici incomprimibili: una soluzione esatta per appoggi in gomma semplicemente compressi*(*). Nota di DOMENICO DE TOMMASI(**) e SALVATORE MARZANO(**), presentata(***) dal Socio E. GIANGRECO.

ABSTRACT. – *Incompressible elastic blocks in finite deformations: an exact solution for simply compressed rubber bearings.* In this paper we study a mixed boundary-value problem associated with finite deformations of a homogeneous and isotropic, incompressible elastic rectangular block. Our study applies to rubber bearings for buildings. In particular, we give an exact solution of the equilibrium problem for simply compressed bearings, using a semi-inverse method. In addition, on the basis of this solution, we propose a new load-stretching relationship (of technical interest) which we compare with other experimental and theoretical results.

KEY WORDS: Non-Linear; Structural; Mechanics.

RIASSUNTO. – In questo articolo si studia un problema misto al contorno associato con le deformazioni finite di un parallelepipedo elastico incomprimibile, omogeneo ed isotropo. L'analisi è rivolta allo studio degli appoggi in gomma nelle costruzioni. In particolare, usando il metodo semi-inverso, viene fornita una soluzione esatta del problema di equilibrio degli appoggi semplicemente compressi. Inoltre, per ragioni di interesse tecnico, viene proposta una nuova relazione globale «carico-schiacciamento», che viene confrontata con altri risultati teorici e sperimentali.

1. INTRODUZIONE

In questo lavoro studiamo un problema misto al contorno associato alle deformazioni finite di un solido elastico incomprimibile, omogeneo ed isotropo, a forma parallelepipeda. L'analisi è rivolta allo studio degli appoggi in gomma nelle costruzioni, che sono stati l'oggetto di una serie di ricerche nel campo della meccanica teorica ed applicata, dell'analisi sperimentale, oltre che nel settore normativo (*cf.*, i lavori [1, 2, 3, 4, 5] e la bibliografia in essi contenuta).

(*) Ricerca finanziata dal Ministero della Pubblica Istruzione.

(**) Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Bari – Viale Japigia, 182 – 70126 Bari.

(***) Nella seduta del 22 giugno 1988.

Attualmente, il modello del comportamento meccanico di questi tipi strutturali necessita di ulteriori chiarimenti e sviluppi. Ad esempio, ed è questo uno tra i maggiori problemi di interesse tecnico, è incognita la relazione generale che specifica gli sforzi globali applicati (*i.e.*, il risultante ed il momento risultante degli sforzi superficiali) in termini degli spostamenti e delle rotazioni relative impresse alle basi dell'appoggio. Il ricorso alla teoria lineare dell'elasticità, che apparve spontaneo all'epoca del primo dei lavori sopra citati, non produce i risultati attesi; infatti, il confronto con gli esperimenti (*cf.*, *e.g.*, [3]) rivela l'inadeguatezza dell'approccio di Courbon, Conversy e Rajade [1], peraltro caratterizzato da ipotesi semplificative non del tutto lievi. Mentre, l'analisi di Del Piero e Podio-Guidugli [4] segna una marcata differenza dagli altri precedenti approcci: il problema di equilibrio (con forze di volume nulle e sforzi globali nulli sulle facce laterali), limitatamente al caso dell'appoggio semplicemente compresso, è formulato nel contesto della teoria non lineare dell'elasticità, ed una soluzione al second'ordine è ottenuta con il metodo perturbativo di Signorini.

Tornando allo scopo dichiarato all'inizio, il presente articolo propone un contributo ulteriore al programma suggerito da [4]. Infatti, a parità del resto, ammettiamo qui che il dato al bordo nello spostamento corrisponda ad una traslazione rigida relativa delle basi dell'appoggio, che non avvenga necessariamente in direzione della loro normale; inoltre, la risoluzione del problema non lineare al contorno è qui affrontata per integrazione diretta, senza il ricorso a particolari schemi approssimati di soluzione.

La nostra analisi si avvale del metodo semi-inverso, attraverso la scelta (*cf.*, Sezione 2) di una piuttosto vasta classe di deformazione che include, come suo caso speciale, la famiglia detta di *generalized shear* nella terminologia di Truesdell e Toupin [6]. Nella Sezione 3 indichiamo altresì un procedimento di riduzione della classe considerata *ab initio*, riduzione che è insieme conseguente alle condizioni geometriche del problema ed alla richiesta del vincolo interno di incomprimibilità sulle deformazioni del materiale elastico.

Nelle Sezioni successive (4 e 5), dopo aver illustrato una procedura di risoluzione per il caso generale, otteniamo una soluzione esplicita del problema della compressione uniassiale dell'appoggio (qui considerato, per ragioni di semplicità, a sezione quadrata); questa soluzione, che determina univocamente sia il campo di deformazione che quello di sforzo, è espressa in termini delle caratteristiche geometriche e materiali, oltre che del parametro di *schiacciamento* («stretching»). Perveniamo altresì ad una nuova proposta, di interesse applicativo, per la relazione globale carico-schiacciamento, relazione che è confrontata in dettaglio con i precedenti risultati teorici e sperimentali più significativi (Sezione 6).

Infine, va osservato che la nostra analisi è ristretta ai materiali neo-Hookeani, una speciale famiglia di materiali in gomma della teoria costitutiva di Mooney-Rivlin. Non perde tuttavia di generalità la soluzione qui ottenuta, anche perché (riprendendo una pertinente osservazione di Treloar [7]) un materiale di Mooney-Rivlin è indistinguibile da un materiale neo-Hookeano, per lo meno nelle compressioni uniassiali.

2. Estensione e taglio generalizzati

In questa Sezione, che è basata sulla Sezione 2 di [4], formuliamo il problema misto al contorno associato alle deformazioni finite del solido elastico incomprimibile, omogeneo ed isotropo. I tratti distintivi della formulazione presente sono: (i) le deformazioni di taglio si accompagnano qui a quelle estensionali; (ii) la soluzione è cercata per integrazione diretta in un'opportuna classe, senza il ricorso a schemi perturbativi; (iii) l'equazione costitutiva scelta, ancorché non lineare, è un caso speciale di quella considerata in [4] (*cf.*, a tale proposito, la Osservazione 1).

Sia dunque $\Omega \subset R^3$ un parallelepipedo di lati 2A, 2B e 2H, che si identifichi con una configurazione naturale (*i.e.*, con sforzo nullo) del corpo elastico; sia $\mathbf{X}$ un gene-

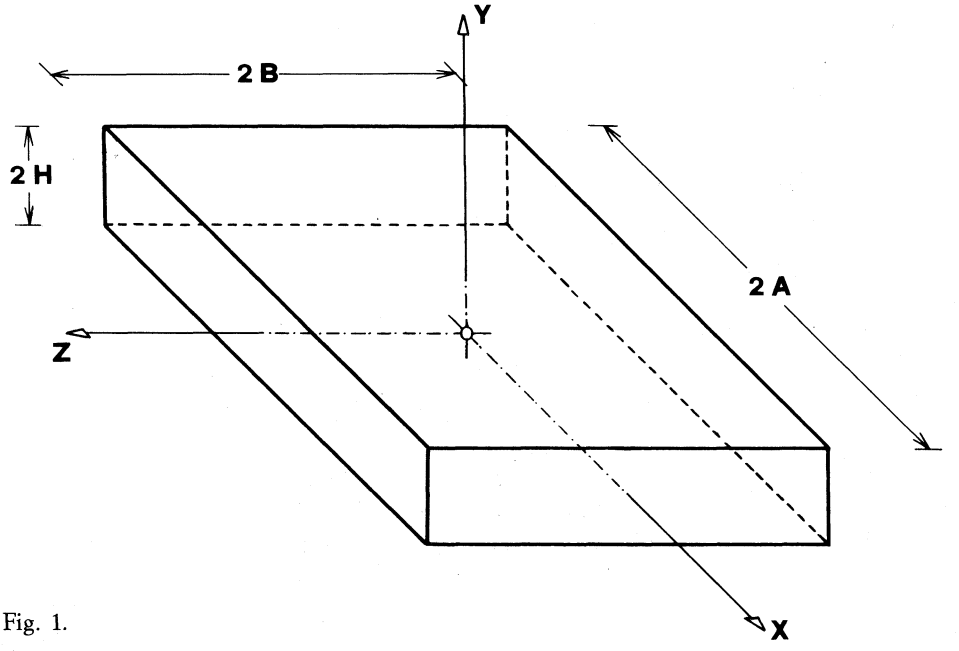


Fig. 1.

rico punto di Ω, e sia $\mathbf{f}: \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}$ la deformazione che porta il corpo nel piazzamento corrente. Si introduca un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con i piani coordinati coincidenti con i piani di simmetria di Ω (Fig. 1), e siano (X, Y, Z) e (x, y, z) le coordinate di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}$, rispettivamente; infine, (u, v, w) denotino le componenti del campo di spostamento $\mathbf{u}$ associato a $\mathbf{f}$.

Si vuole studiare il problema di equilibrio quando, in assenza di forze di volume, alle basi di Ω si imponga la traslazione rigida relativa (2s, 2c, 0) e sulla superficie laterale $\partial_1\Omega$ si prescriva uno sforzo superficiale ovunque nullo.

Detta

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \tag{2.1}$$

l'equazione costitutiva che specifica il primo tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff in termini del gradiente di deformazione $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{f}$, il problema consiste nel determinare una deformazione $\mathbf{f}$ tale che sia soddisfatta la restrizione del vincolo di incomprimibilità,

$$\det \mathbf{F} = 1 \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.2}$$

sia obbedita l'equazione di equilibrio,

$$\mathrm{Div}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0} \qquad \text{in ogni punto interno a } \Omega, \tag{2.3}$$

e siano rispettate le condizioni al contorno, sulla porzione libera

$$\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{0} \qquad \text{su } \partial_1\Omega \tag{2.4}$$

e su quella vincolata

$$\begin{cases} u(X,Y,Z) = \pm s \\ v(X,Y,Z) = \pm c \qquad \text{per } Y = \pm H. \\ w(X,Y,Z) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Come accennato in precedenza, in questa analisi restringiamo l'attenzione ai materiali neo-Hookeani, per i quali (1) si riduce alla forma [1]:

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = -p\mathbf{F}^{-T} + \mu\mathbf{F}, \tag{2.6}$$

dove $\mathbf{F}^{-T}$ indica l'inverso del trasposto di $\mathbf{F}$, $p = p(X,Y,Z)$ è il campo arbitrario della pressione e μ è un modulo materiale costante che soddisfa la diseguaglianza costitutiva *a priori*:

$$\mu > 0. \tag{2.7}$$

Osservazione 1. La teoria neo-Hookeana coincide con la teoria molecolare Gaussiana dei materiali in gomma (*cf.*, *e.g.*, [7] Ch. 10). Inoltre, (6) è la forma speciale che assume l'equazione costitutiva della teoria di Mooney-Rivlin per le gomme, *i.e.*,

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{F}^{-T} + \mu\left(\frac{1}{2} + \nu\right)\mathbf{F} - \mu\left(\frac{1}{2} - \nu\right)\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}, \tag{2.8}$$ [2]

(1) *Cf.*, *e.g.*, Truesdell & Noll [8], § 95.

(2) *Cf.*, *e.g.*, ancora [8], § 95. Le diseguaglianze di plausibilità fisica di Baker & Ericksen e le diseguaglianze empiriche di Truesdell & Toupin richiedono che $-1/2 \leqslant \nu \leqslant 1/2$.

quando il modulo materiale ν assume il valore 1/2. Come nota opportunamente Treloar [7], la stessa equazione (8) è inadeguata a descrivere formalmente la risposta dei vari tipi di materiali in gomma a *tutti* i tipi di deformazione; d'altra parte, nelle compressioni uniassiali, le osservazioni sperimentali mostrano che un materiale di Mooney-Rivlin è *essenzialmente* indistinguibile da un materiale neo-Hookeano.

Infine, nello spirito del metodo semi-inverso per la risoluzione dei problemi al contorno, assumiamo qui la seguente famiglia {f} di deformazioni:

$$\text{(2.9)} \qquad \begin{cases} x = Xf(Y) + g(Y) + m(X) + Xn(Y)o(Z) \\ y = h(Y) + Xj(Y) + Yq(X) \\ z = k(Z) + l(Y) + Zr(Y)t(X), \end{cases}$$

dipendente dalle funzioni arbitrarie f, g, m, n, o, h, j, q, k, l, r e t.

Osservazione 2. La scelta (9) è coerente con l'analisi di Truesdell e Toupin [3] per lo studio di famiglie speciali di deformazioni finite non omogenee. Ad esempio, se si sceglie $m = no = j = q = rt = 0$, la (9) si riduce alla classe detta di *taglio generalizzato* che si interpreta come uno scorrimento dei piani $Y = cost$, variabile in direzione ed entità con Y. Inoltre, quando $g = j = q = l = 0$, la (9) descrive un'estensione generalizzata, cioè un allungamento o uno schiacciamento del blocco rettangolare, in cui sia le fibre parallele all'asse Y che quelle parallele agli assi X e Z possono deformarsi in archi di curva.

3. Riduzione della classe di deformazione

Volendo considerare l'aspetto esplicito del problema formulato nella sezione precedente, conviene esaminare preliminarmente le restrizioni imposte dalle condizioni geometriche e dal vincolo interno di incomprimibilità sulla classe delle deformazioni (2.9).

Innanzitutto, le condizioni (2.5) sulla porzione vincolata del bordo impongono che:

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} m(X) = (1 - f(\pm H) - n(\pm H)o(Z))X - g(\pm H) \pm s \\ Hq(X) = \mp j(\pm H)X \mp h(\pm H) + H + c \\ k(Z) = (1 - r(\pm H)t(X))Z - l(\pm H), \end{cases}$$

per ogni $X \in [-A, A]$ e per ogni $Z \in [-B, B]$. Inoltre, la simmetria inerente al proble-

(3) *Cf.* [6], § 40 e sgg.. Si veda, in particolare, § 47, eq. (47.1).

ma richiede che $u(X,Y,Z) = u(X,Y,-Z)$ e $w(X,Y,Z) = -w(X,Y,-Z)$ [4] o piuttosto, in vista di (2.9), che simultaneamente:

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} &n(Y)(o(Z) - o(-Z)) = 0 \\ &k(Z) + k(-Z) + 2l(Y) = 0, \end{aligned}$$

per ogni Y e Z.

Si osservi che $(1)_1$ e $(1)_3$ implicano, rispettivamente, che $n(\pm H)o(Z) = \text{cost.}$, e $r(\pm H)t(X) = \text{cost.}$ Conseguentemente, tenendo presente altresì la $(2)_1$, si ottengono le condizioni:

$$(3.3)\qquad n(\pm H) = 0, \quad r(\pm H) = 0 \quad \text{e} \quad o(Z) = o(-Z). \ [5]$$

Inoltre, da $(2)_2$ segue che $l(Y) = \text{cost.}$; in vista di (1) e (3), il sistema (2.9) può perciò riarrangiarsi con semplici sostituzioni nella forma:

$$(3.4)\qquad \begin{cases} x = X\tilde{f}(Y) + \tilde{g}(Y) + Xn(Y)o(Z) \\ y = \tilde{h}(Y) + X\tilde{j}(Y) \\ z = Z(1 + r(Y)t(X)), \end{cases}$$

dove $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ e $\tilde{j}$ sono funzioni di Y, soddisfacenti le condizioni

$$(3.5)\qquad \tilde{f}(\pm H) = 1, \quad \tilde{g}(\pm H) = \pm s, \quad \tilde{h}(\pm H) = \pm (H + c), \quad \tilde{j}(\pm H) = 0,$$

e per altro arbitrarie.

Passiamo adesso ad analizzare le riduzioni conseguenti al vincolo di incomprimibilità osservando, per gli sviluppi del seguito, che $t = t(X)$, $o = o(Z)$, e che tutte le rimanenti funzioni incognite che appaiono in (4) dipendono solamente da Y.

Stante (4), il gradiente di deformazione assume la forma

$$[F] = \begin{bmatrix} \tilde{f} + no & X\tilde{f}' + \tilde{g}' + Xn'o & Xno' \\ \tilde{j} & \tilde{h}' + X\tilde{j}' & 0 \\ Zrt' & Zr't & 1 + rt \end{bmatrix}$$

e, conseguentemente, (2.2) equivale alla richiesta:

(4) Si noti che la componente v del campo di spostamento associato a (2.9) è una funzione pari in Z.

(5) Si noti che queste condizioni sono le meno stringenti, sulla classe di deformazione (2.9), per soddisfare alle relazioni sopra richiamate. Ad esempio, se si sceglie o (Z) = cost. in luogo di $(3)_1$, la $(2.9)_1$ perde la dipendenza da Z.

$$(3.5)' \qquad \det\mathbf{F} = XZno'(\tilde{j}r't - rt'\tilde{h}' - Xrt'\tilde{j}') + (1 + rt)(\tilde{f}\tilde{h}' + \\ + no\tilde{h}' - \tilde{j}\tilde{g}' + X(\tilde{f}\tilde{j}' + no\tilde{j}' - \tilde{j}\tilde{f}' - \tilde{j}n'o)) = 1,$$

per ogni $\mathbf{X} \in \Omega$. Ne consegue che per ogni Y e Z

$$(3.6) \qquad \det\mathbf{F}|_{X=0} = (1 + rt(0))\,(\tilde{f}\tilde{h}' + no\tilde{h}' - \tilde{j}\tilde{g}') = 1,$$

e

$$(3.7) \qquad (\det\mathbf{F})_{,Z}|_{X=0} = (1 + rt(0))no'\tilde{h}' = 0. \quad (6)$$

Da (6) segue che $(1 + rt(0)) \neq 0$ per ogni Y, e da (7), allora, che $no'\tilde{h}' = 0$. D'altra parte, $\tilde{h}'$ non può essere identicamente nulla, altrimenti $(5)_3$ è contraddetta; né può annullarsi identicamente la funzione n, altrimenti la generalità della classe definita da (4) è persa a priori (7). Se ne deduce che o = cost. = ô e, in vista di (5)', si ottengono le seguenti identità:

$$(3.8) \qquad (\det\mathbf{F})_{,X} = rt'(\tilde{f}\tilde{h}' + n\hat{o}\tilde{h}' - \tilde{j}\tilde{g}' + X(\tilde{f}\tilde{j}' + n\hat{o}\tilde{j}' - \tilde{j}\tilde{f}' - \\ - \tilde{j}n'\hat{o})) + (1 + rt)(\tilde{f}\tilde{j}' + n\hat{o}\tilde{j}' - \tilde{j}\tilde{f}' - \tilde{j}n'\hat{o}) = 0,$$

$$(3.9) \qquad (\det\mathbf{F})_{,X}|_{X=0} = rt'(0)(\tilde{f}\tilde{h}' + n\hat{o}\tilde{h}' - \tilde{j}\tilde{g}') + \\ + (1 + rt(0))(\tilde{f}\tilde{j}' + n\hat{o}\tilde{j}' - \tilde{j}\tilde{f}' - \tilde{j}n'\hat{o}) = 0,$$

$$(3.10) \qquad (\det\mathbf{F})_{,XX}|_{X=0} = rt''(0)(\tilde{f}\tilde{h}' + n\hat{o}\tilde{h}' - \tilde{j}\tilde{g}') + 2rt'(0)(\tilde{f}\tilde{j}' + \\ + n\hat{o}\tilde{j}' - \tilde{j}\tilde{f}' - \tilde{j}n'\hat{o}) = 0.$$

In virtù della (6), il confronto di (9) con (10) produce l'identità

$$r^2(t(0)t''(0) - 2(t'(0))^2) + rt''(0) = 0;$$

per $(3)_2$, se r non è identicamente nulla, deve dunque essere $t''(0) = t'(0) = 0$. Da (9) ancora, segue che $\tilde{f}\tilde{j}' + n\hat{o}\tilde{j}' - \tilde{j}\tilde{f}' - \tilde{j}n'\hat{o} = 0$ o, piuttosto, che

$$\left(\frac{\tilde{j}}{\tilde{f} + n\hat{o}}\right)' = 0,$$

dove si è supposto che $\tilde{f} + n\hat{o}$ è ovunque non nullo (8). Per le $(3)_1$ e $(5)_{1,4}$, si ha perciò che $\tilde{j} = 0$ identicamente e, in conseguenza, che t = cost. (*cf.* (8)).

(6) Qui e nel seguito, la differenziazione parziale si denota con una virgola.

(7) *Cf.*, (5).

(8) La contropartita meccanica a questa richiesta è, semplicemente, quella di escludere l'esistenza di un piano ortogonale all'asse Y che si porti in un piano ortogonale all'asse x (*cf.*, (4)).

In conclusione, cambiando nuovamente nome alle funzioni incognite restanti in (4), la classe ridotta di deformazione è descritta dal sistema:

$$(3.11)\qquad \begin{cases} x = Xf(Y) + g(Y) \\ y = h(Y) \\ z = Zr(Y), \end{cases}$$

che va corredato con le condizioni al bordo

$$(3.12)\qquad f(\pm H) = 1,\ g(\pm H) = \pm s,\ h(\pm H) = \pm (H + c),\ r(\pm H) = 1,$$

e con la richiesta locale

$$(3.13)\qquad fh'r = 1,$$

per garantire l'incomprimibilità (*cf.* (5)').

4. Integrazione delle equazioni di equilibrio

Stanti (3.11) e (3.13), l'equazione costitutiva (2.6) fa corrispondere lo sforzo [9]

$$(4.1)\qquad [S] = \begin{bmatrix} -pf^{-1} + \mu f & \mu(Xf' + g') & 0 \\ pr(Xf' + g') & -pfr + \mu f^{-1} r^{-1} & Zpr'f \\ 0 & \mu Zr' & -pr^{-1} + \mu r \end{bmatrix}$$

e l'equazione di equilibrio (2.3) produce:

$$\begin{aligned} & p_{,X} = \mu f(Xf'' + g'') \\ (4.2)\qquad & p_{,X} r(Xf' + g') - p_{,Y} fr - \mu f^{-2} f' r^{-1} - \mu r^{-2} r' f^{-1} + Zfr' p_{,Z} = 0 \\ & p_{,Z} = \mu Z r r''. \end{aligned}$$

Da (2), derivando rispetto ad X ed uguagliando le derivate miste, segue che f e g devono soddisfare, rispettivamente, le equazioni differenziali

$$(4.3)\qquad f'' = C_1 f \qquad \text{e} \qquad g''' - C_1 g' = 0$$

in cui C_1 è una costante arbitraria. Similmente, derivando rispetto a Z, si ottiene

(9) Si noti che f ed r sono ovunque positive in $[-H, +H]$ (si veda (3.13), $(3.12)_1$ e $(3.12)_4$).

$$r'' = C_2 r \,, \tag{4.4}$$

un'equazione differenziale per r che è formalmente identica alla $(3)_1$ eccetto che per la presenza di un'altra costante arbitraria C_2. Perciò, corredando le (3) e (4) con le competenti condizioni al contorno $(3.12)_{1,2,4}$, ne conseguono le seguenti integrazioni esplicite.

(i) $C_1 > 0$:

$$f(Y) = \frac{1}{\cosh(H\sqrt{C_1})} \cosh(Y\sqrt{C_1}) \tag{4.5}$$

e

$$g(Y) = \frac{s}{\sinh(H\sqrt{C_1})} \sinh(Y\sqrt{C_1}); \text{(10)} \tag{4.6}$$

(ii) $C_1 < 0$:

$$f(Y) = \frac{1}{\cos(H\sqrt{-C_1})} \cos(Y\sqrt{-C_1}) \tag{4.7}$$

e

$$g(Y) = \frac{s}{\sin(H\sqrt{-C_1})} \sin(Y\sqrt{-C_1}); \tag{4.8}$$

(iii) $C_2 > 0$:

$$r(Y) = \frac{1}{\cosh(H\sqrt{C_2})} \cosh(Y\sqrt{C_2}); \tag{4.9}$$

(iv) $C_2 < 0$:

$$r(Y) = \frac{1}{\cos(H\sqrt{-C_2})} \cos(Y\sqrt{-C_2}). \tag{4.10}$$

Dal sistema (2) si ottiene altresì, per integrazione, il campo di pressione

$$p(X,Y,Z) = \frac{1}{2}\mu[ff''X^2 + 2fg''X + rr''Z^2 + (g')^2 + f^{-2}r^{-2}] + q, \tag{4.11}$$

dove q è una costante arbitraria. Quindi, in vista di (1), per lo sforzo sulle facce libere del blocco risulta:

$$S^{XX}|_{X=\pm A} = \frac{1}{2}\mu[\pm 2f \mp A^2 f'' - 2Ag'' \mp ((g')^2 + f^{-2}r^{-2})f^{-1} \mp \mp f^{-1}rr''Z^2] \mp qf^{-1}, \tag{4.12}$$

(10) Si ammette qui $g(0) = 0$; pertanto, come è ragionevole supporre, lo spostamento del baricentro di Ω è nullo.

$$
\begin{aligned}
S^{YX}|_{X=\pm A} &= \frac{1}{2} r(\pm Af' + g')[\pm \mu A^2 ff'' + 2\mu Afg'' \pm \mu (g')^2 \pm \\
&\qquad \pm \mu f^{-2} r^{-2} \pm \mu r r'' Z^2 \pm 2q], \\
S^{ZX}|_{X=\pm A} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

per le facce $X = \pm A$, e

$$
S^{XZ}|_{Z=\pm B} = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
S^{YZ}|_{Z=\pm B} &= \frac{1}{2} \mu [Br' f^2 f'' X^2 + 2Bf^2 r' g'' X + Bfr'((g')^2 + \\
&\qquad + f^{-2} r^{-2}) + B^3 frr' r''] + qBfr', \\
S^{ZZ}|_{Z=\pm B} &= \frac{1}{2} \mu [\pm 2r \mp ff'' r^{-1} X^2 \mp 2fr^{-1} g'' X \mp r^{-1}((g')^2 + \\
&\qquad + f^{-2} r^{-2}) \mp B^2 r''] \mp qr^{-1},
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

per le facce $Z = \pm B$.

Da un breve esame delle (12) e (13) emerge, tuttavia, una difficoltà caratteristica dei problemi al contorno di deformazione finita con dato locale al bordo di tipo misto: infatti $S^{XX}|_{X=\pm A}$, $S^{YX}|_{X=\pm A}$, $S^{YZ}|_{Z=\pm B}$ e $S^{ZZ}|_{Z=\pm B}$, si annullano identicamente, cioè si soddisfa alla richiesta (2.4) di sforzo ovunque nullo su $\partial_1\Omega$, solo se $C_1 = C_2 = 0$. Ne consegue, per le (3.12), che il dato di spostamento (2.5) si può assegnare compiutamente solo se le basi di Ω sono vincolate a scorrere nei propri piani; la deformazione (escludendo la traslazione identica) si riduce ad uno scorrimento semplice, la pressione data da (11) è ovunque nulla e, contraddicendo (2.7), il modulo materiale $\mu = 0$.

Appare pertanto opportuno, per rimuovere la difficoltà alla radice, sostituire le informazioni locali al bordo libero con altre meno stringenti: richiedere precisamente che, in luogo di (2.4), siano nulli il risultante ed il momento risultante degli sforzi superficiali assegnati su ogni faccia di $\partial_1\Omega$. Così ad esempio, se si chiama $\mathbf{R}$ il risultante ed $\mathbf{M}$ il momento risultante degli sforzi sulle facce $X = \pm A$, si deve avere:

$$
\begin{aligned}
R_X &= \int_{-H}^{+H} dY \int_{-B}^{+B} S^{XX}|_{X=\pm A}\, dZ = 0 \\
R_Y &= \int_{-H}^{+H} dY \int_{-B}^{+B} S^{YX}|_{X=\pm A}\, dZ = 0
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

e

$$M_X = \int_{-H}^{+H} dY \int_{-B}^{+B} - ZS^{YX}{}_{|X = \pm A}\, dZ = 0$$

$$M_Y = \int_{-H}^{+H} dY \int_{-B}^{+B} ZS^{XX}{}_{|X = \pm A}\, dZ = 0 \qquad (4.15)$$

$$M_Z = \int_{-H}^{+H} dY \int_{-B}^{+B} - YS^{XX}{}_{|X = \pm A}\, dZ = 0,$$

dove si tengano presenti le (12).

Tale formulazione *rilassata* del problema, come notano opportunamente Del Piero e Podio-Guidugli [4], è consistente con i ben noti principi generali della teoria della distribuzione uniforme dell'errore: tutte le equazioni differenziali e al contorno sono soddisfatte esattamente, eccetto alcune condizioni al contorno di trazione che vengono imposte in media.

Resta aperto il problema della determinazione delle costanti C_1, C_2 e q in termini del parametro di taglio s/H, del parametro estensionale c/H, del modulo elastico μ e degli ulteriori dati geometrici di Ω. Per ognuna delle possibili scelte tra (i) e (ii), (iii) e (iv), le integrazioni esplicite coinvolte in (3.13) (cui va associata la condizione al contorno $(3.12)_3$), in (14) & (15) e loro analoghe relative alle facce $Z = \pm B$, richiedono lunghi e piuttosto elaborati sviluppi. Tralasciando la discussione generale (*cf.*, [9]), nella sezione seguente studiamo un caso speciale di particolare interesse per le applicazioni.

5. Appoggi semplicemente compressi

Restringiamo i dati del problema al caso in cui $s = 0$, $c < 0$ e $A = B$, per studiare la compressione uniassiale di un appoggio in gomma di forma quadrata.

In assenza di scorrimento relativo per le basi vincolate, tanto nel caso (i) che in quello (ii) della sezione precedente, risulta $g(Y) = 0$ (*cf.*, (4.6) e (4.8)); in altri termini, la deformazione considerata è simmetrica rispetto al piano $X = 0$, oltre che rispetto al piano $Z = 0$ (si veda (3.11)). Sempre per ragioni di simmetria, in vista di $(4.3)_1$ e (4.4), ammettiamo qui che $C_1 = C_2$; ne consegue che $f = r$, e dunque che (4.5) ≡ (4.9) e (4.7) ≡ (4.10). Infine, da (3.13) si ha che:

$$h(Y) = \int \frac{1}{f^2(Y)}\, dY + \lambda, \qquad (5.1)$$

dove λ è una costante arbitraria.

Si chiami ora

$$\epsilon = \frac{c}{H} \tag{5.2}$$

lo schiacciamento del blocco, e, in vista di (4.7), si ponga:

$$\gamma = H\sqrt{-C_1}\,. \tag{5.3}$$

Per integrazione, (1) assume l'aspetto esplicito:

$$h(Y) = \frac{H}{\gamma}\cos^2\gamma \operatorname{tang}\left(\gamma\frac{Y}{H}\right), \tag{5.4}$$

dove le condizioni al contorno di posto $(3.12)_3$ richiedono che ($\lambda = 0$ e), per ogni fissata scelta di ϵ in $]-1, 0[$, γ sia determinato dall'equazione

$$\frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} = 1 + \epsilon\,. \tag{5.5}$$

La funzione $\hat{\gamma}: \epsilon \mapsto \gamma \in]0, \pi/2[$, definita da (5), è continua e decrescente in $]-1, 0[$; si noti inoltre che $\epsilon \to 0$ (*i.e.*, $\gamma \to 0$) descrive la configurazione di riferimento, mentre per $\epsilon \to -1$ (*i.e.*, $\gamma \to \pi/2$) il blocco implode nel piano $y = 0$.

Osservazione 3. La scelta (4.5), in luogo di (4.7), è appropriata per studiare il caso di trazione ($c > 0$), invece che di compressione. Infatti, è immediato verificare che $(3.12)_3$ sono soddisfatte *solo se* sign$c$ = sign C_1 (*cf.*, i casi (i) e (ii) della sezione precedente).

Per i valori di γ forniti da (5), anche la funzione f(Y) risulta nota (*cf.*, (4.7) e (5)):

$$f(Y) = \frac{1}{\cos\gamma}\cos\left(\gamma\frac{Y}{H}\right), \tag{5.6}$$

e con essa è univocamente definita la deformazione (3.11). Ad esempio, la retta di equazione $X = A$ e $Z = 0$ si deforma nella curva di equazione

$$\begin{cases} x = \dfrac{A}{\cos\gamma}\cos \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\gamma}{H\cos^2\gamma}y\right) \\ z = 0, \end{cases}$$

dando luogo ad una deformata del tipo illustrato in figura 2.**a**, per

$$\gamma < \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

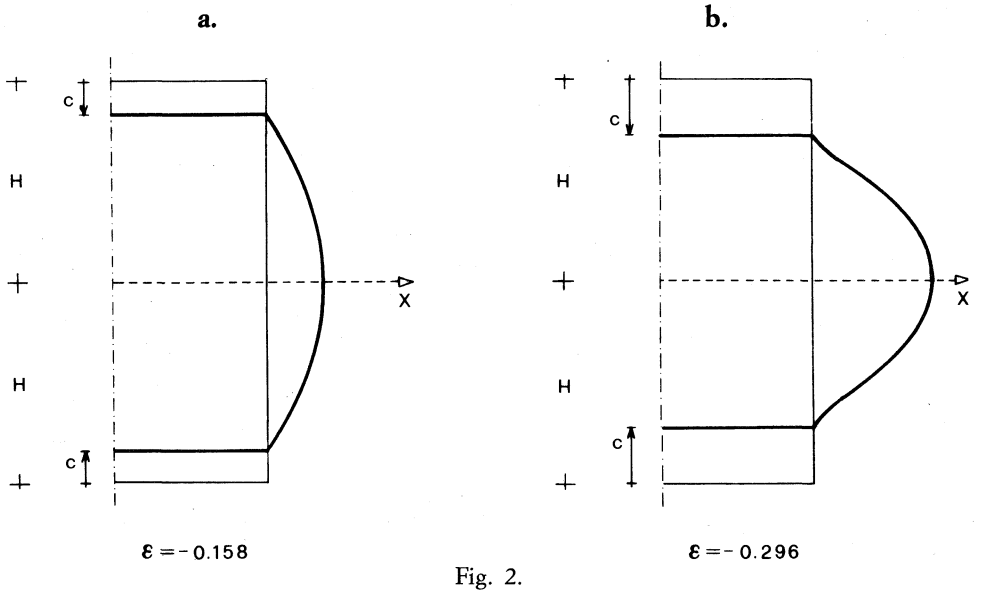


Fig. 2.

e del tipo in figura 2.**b** per valori di

$$\gamma > \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Con f(Y) data da (6), la pressione (4.11) prende la forma

$$p(X,Y,Z) = \frac{1}{2}\mu\,[ff''(X^2 + Z^2) + f^{-4}] + q, \tag{5.7}$$

e per le componenti non nulle di sforzo sulle facce libere si ha (*cf.*, (4.12) e (4.13)):

$$\begin{aligned}
S^{XX}{}_{|X=\pm A} &= \frac{1}{2}\mu[\pm 2f \mp (A^2 + Z^2)f'' \mp f^{-5}] \mp qf^{-1} \\
S^{YX}{}_{|X=\pm A} &= \frac{1}{2}\mu A[(A^2 + Z^2)f^2 f' f'' + f^{-3}f'] + qAff' \\
S^{YZ}{}_{|Z=\pm A} &= \frac{1}{2}\mu A[(A^2 + X^2)f^2 f' f'' + f^{-3}f'] + qAff' \\
S^{ZZ}{}_{|Z=\pm A} &= \frac{1}{2}\mu[\pm 2f \mp (A^2 + X^2)f'' \mp f^{-5}] \mp qf^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Ne discende che le condizioni globali di sforzo $(4.14)_2$ e (4.15) coinvolgono

esclusivamente integrande dispari, e dunque esse sono soddisfatte da tutti i valori dei parametri in gioco. Non altrettanto accade per la $(4.14)_1$ che richiede:

$$\int_{-H}^{+H} dY \int_{-A}^{+A} S^{XX}|_{X=\pm A} dZ = 4\mu A \frac{H}{\gamma} \operatorname{tang}\gamma + \frac{8}{3}\mu A^3 \frac{\gamma}{H} \operatorname{tang}\gamma -$$
$$- 2Aq\frac{H}{\gamma}\cos\gamma \log\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma} - \frac{1}{2}\mu A\frac{H}{\gamma}\sin\gamma\cos\gamma -$$
$$- \frac{3}{4}\mu A\frac{H}{\gamma}\sin\gamma\cos^3\gamma - \frac{3}{8}\mu A\frac{H}{\gamma}\cos^5\gamma\log\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma} = 0;$$

ciò consente di determinare univocamente la costante q:

$$q = \mu\left[\sin\gamma \frac{\frac{2}{\cos^2\gamma}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{A^2}{H^2}\gamma^2\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2}\cos^2\gamma\right)}{\log\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}} - \frac{3}{16}\cos^4\gamma\right]. \tag{5.9}$$

Infine, resta univocamente individuata la distribuzione locale di sforzo, sulle facce $Y = \pm H$, che mantiene la deformazione di equilibrio sotto lo schiacciamento ϵ. Infatti, da (4.1) e (6), le componenti di taglio valgono:

$$S^{XY}{}_{|Y=\pm H} = \mp\mu\frac{\gamma}{H}(\operatorname{tang}\gamma)X$$
$$S^{ZY}{}_{|Y=\pm H} = \mp\mu\frac{\gamma}{H}(\operatorname{tang}\gamma)Z \tag{5.10}$$

(Fig. 3); mentre, da (4.1) & (6) & (7) segue che la componente normale ha l'espressione

$$S^{YY}{}_{|Y=\pm H} = \frac{1}{2}\mu\left(1 + \frac{\gamma^2}{H^2}(X^2 + Z^2)\right) - q, \tag{5.11}$$

con q dato da (9) (Fig. 4).

6. Relazione carico-schiacciamento. Interpretazione dei risultati

La soluzione ottenuta nella sezione precedente consente la determinazione esplicita dei carichi globali che è necessario applicare alle basi per assicurare l'equilibrio sotto lo schiacciamento ϵ. Infatti, per integrazione di (5.10) e (5.11) sulle basi

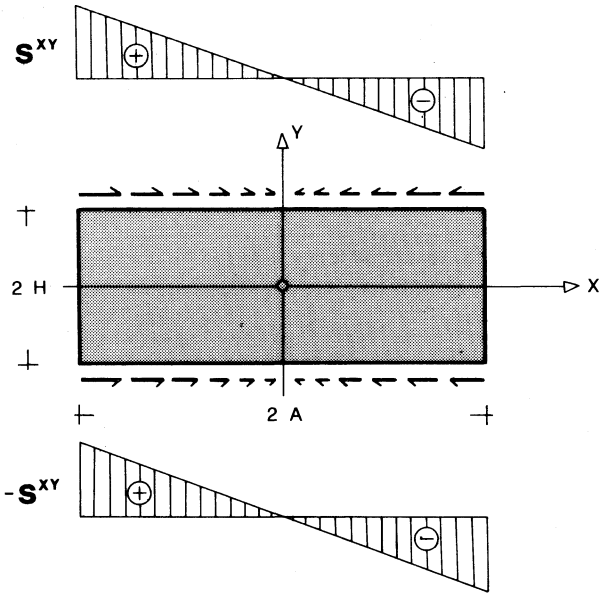


Fig. 3.

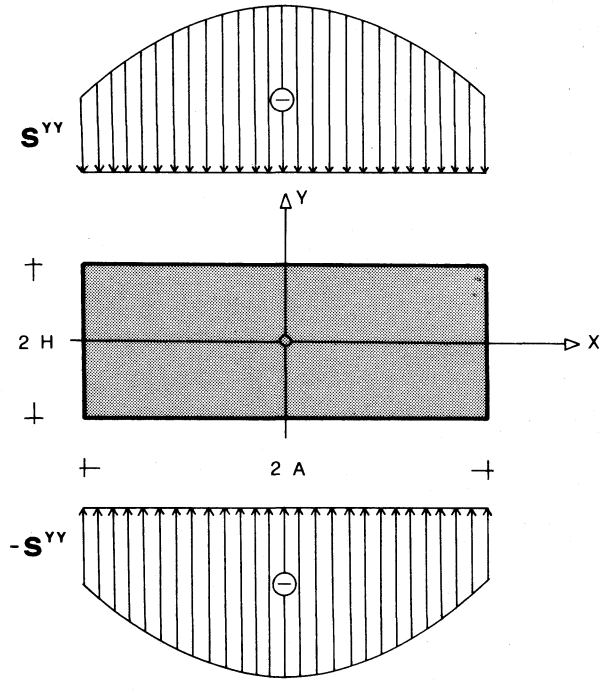


Fig. 4.

$Y = \pm H$, la risultante degli sforzi superficiali è una forza di compressione, coassiale con Y e di entità:

$$N := \int_{-A}^{+A} dX \int_{-A}^{+A} S^{YY}|_{Y=\pm H} dZ = 4A^2\mu\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{A^2}{H^2}\gamma^2 - \frac{q}{\mu}\right); \tag{6.1}$$

qui, naturalmente, q è precisato da (5.9) e γ è il valore corrispondente ad ϵ attraverso (5.5). (1) è la desiderata relazione carico-schiacciamento (*cf.*, Introduzione), nella quale le variabili indipendenti sono i dati geometrici A ed H, il modulo elastico μ ed il parametro di schiacciamento ϵ.

Adesso, per rendere agevole individuare gli aspetti comuni e le differenze con altri approcci, introduciamo il parametro adimensionale

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{N}{4A^2\mu}, \tag{6.2}$$

in termini della pressione media $\sigma = \dfrac{N}{4A^2}$. Da (1) e (5.9), si ottiene perciò che:

$$\frac{\sigma}{\mu} = \delta(\gamma) + \frac{A^2}{H^2}\varrho(\gamma), \tag{6.3}$$

dove, al solito, $\gamma = \hat{\gamma}(\epsilon)$ è definita da (5.5), e

$$\delta(\gamma) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\cos^4\gamma - \sin\gamma\frac{4 - \frac{1}{2}\cos^2\gamma - \frac{3}{4}\cos^4\gamma}{\cos^2\gamma \log\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}}\right),$$

$$\varrho(\gamma) = \frac{1}{3}\gamma^2\left(1 - \frac{4\sin\gamma}{\cos^2\gamma \log\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}}\right). \tag{6.4}$$

Si noti che $\delta(\gamma)$ e $\varrho(\gamma)$ sono entrambe negative e decrescenti; che il membro destro di (3) è dominato dal suo secondo termine, quando $H \ll A$; inoltre, che la pressione media tende all'infinito per $\gamma \to \pi/2$. La figura 5 illustra l'andamento della curva σ/μ in funzione di ϵ, per alcuni fissati valori del rapporto A/H (*cf.*, tabella numerica a fine nota).

Passiamo dunque ai confronti resi possibili dalla (3) con altri risultati, teorici e sperimentali, ottenuti da vari Autori. L'analisi del raffronto, come del resto la stessa applicabilità dei risultati qui ottenuti, si riferisce compiutamente, e correttamente, al generico strato interno di gomma in appoggi armati (*cf.*, [2]). Infatti, questi appoggi

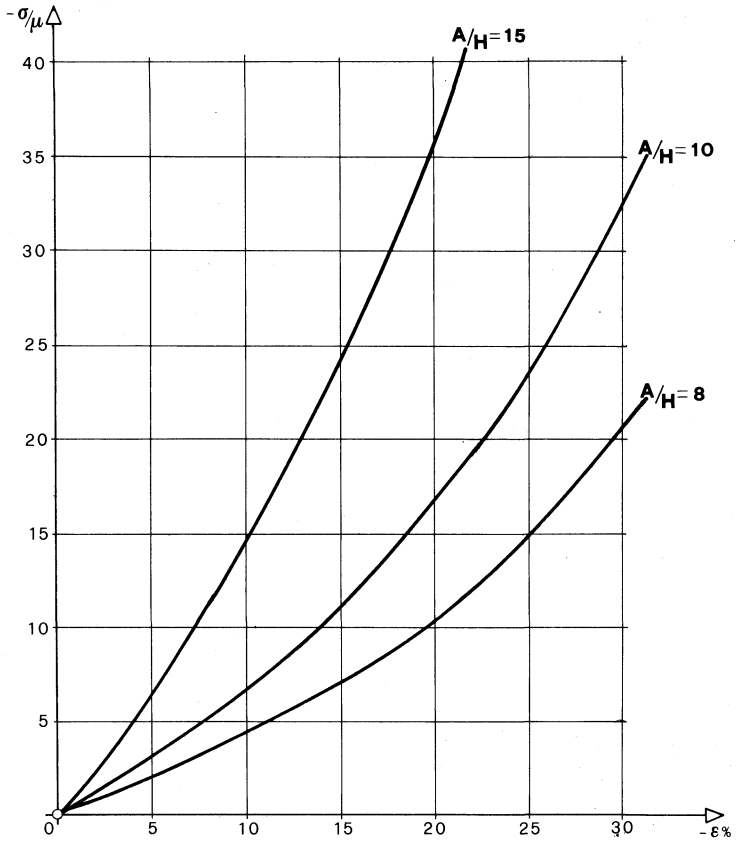


Fig. 5.

sono costituiti da strati alterni di gomma e di acciaio tra loro efficacemente vincolati mediante vulcanizzazione; cosicché, le basi dell'elemento in gomma tra due consecutive piastre di acciaio possono ritenersi rigide, e le equazioni al bordo nello spostamento (2.5) riproducono coerentemente, e significativamente, effettive condizioni al contorno.

In sintesi, il confronto mette in luce i seguenti elementi di rilievo:

(i) nel campo delle *piccole* deformazioni (Fig. 6), emerge un soddisfacente accordo della (3) con l'analisi di Del Piero & Podio-Guidugli [4], e con i risultati sperimentali di Sanpaolesi & Angotti [3]; invece, una certa sottostima della rigidezza del blocco elastico evidenziano, sia pure in diversa misura, tanto la teoria lineare di Conversy [1], quanto la proposta suggerita dalle Istruzioni CNR [2];

(ii) nel campo delle deformazioni *non piccole*, la teoria di Conversy è completamente inadeguata, mentre la previsione elaborata su base sperimentale da Sanpaolesi & Angotti [3] ci pare sovrastimi la rigidezza dell'appoggio (Fig. 7); confronto significativo resta infine quello con la soluzione al *secondo ordine* di Del Piero & Podio-Guidugli [4]: sia rispetto al caso $\nu = 0{,}4$ che a quello $\nu = 0{,}5$ (materiale neo-Hookeano), la (3) predice una maggiore e sempre crescente difficoltà dell'appoggio compresso a deformarsi.

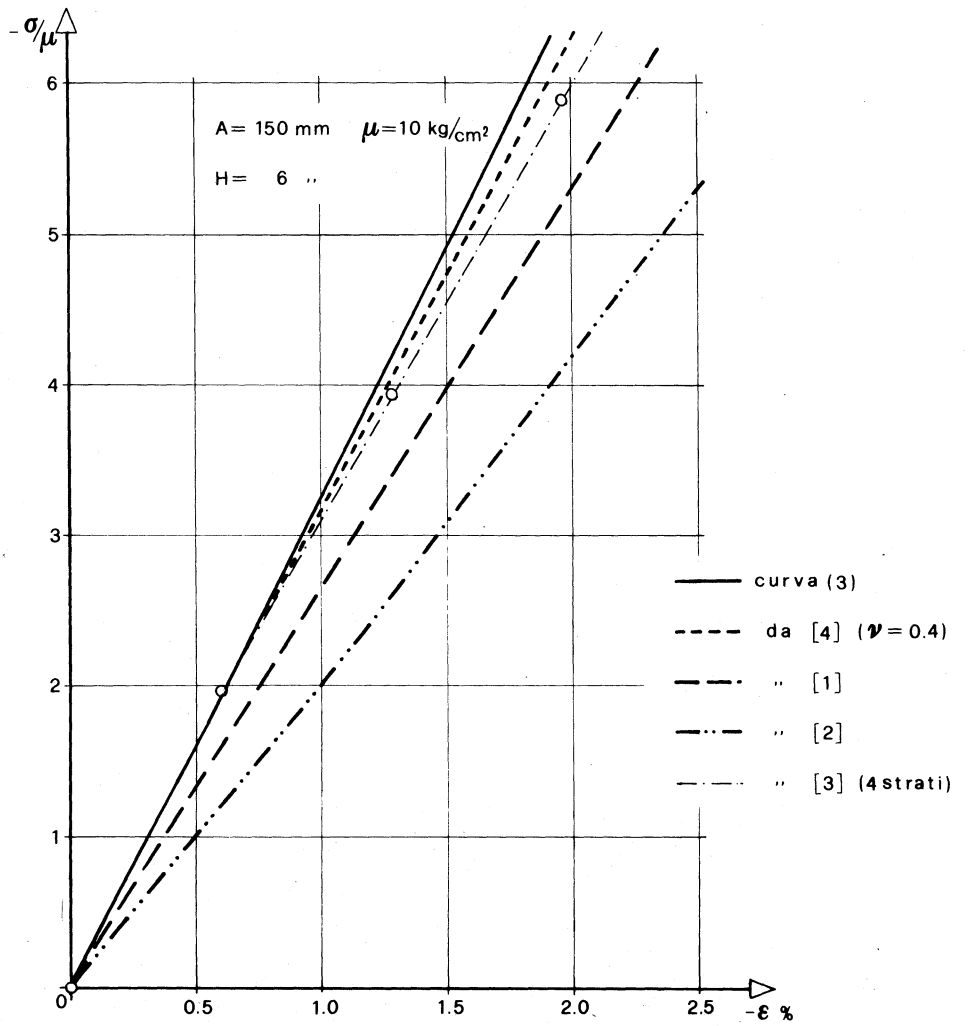

$-\sigma/\mu$
A= 150 mm
μ=10 kg/cm²
H= 6 ,,
curva (3)
da [4] (ν = 0.4)
,, [1]
,, [2]
,, [3] (4 strati)
$-\varepsilon$ %

Fig. 6.

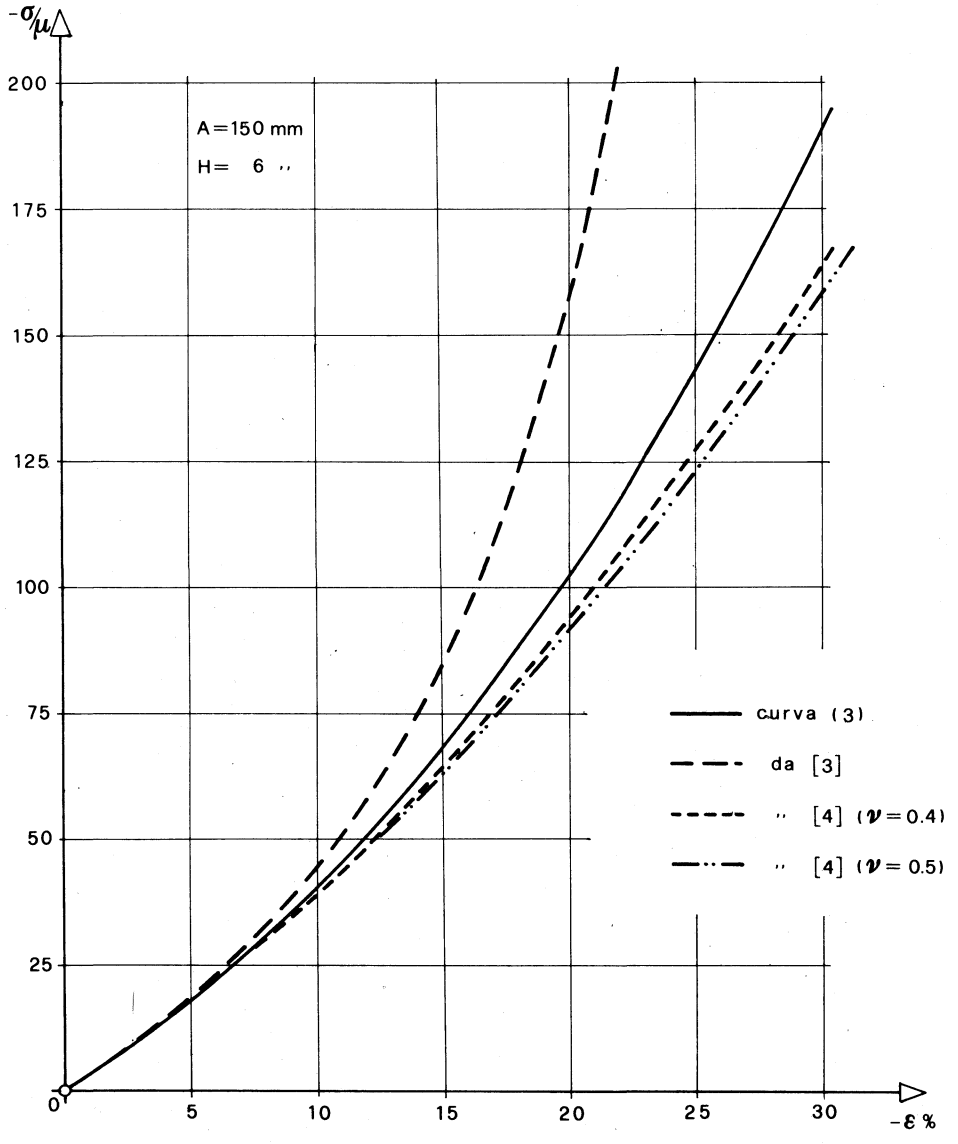

-σ/μ
200
175
150
125
100
75
50
25
0
5
10
15
20
25
30
-ε %
A=150 mm
H= 6 ,,
curva (3)
da [3]
,, [4] (ν=0.4)
,, [4] (ν=0.5)

Fig. 7.

TABELLA NUMERICA

$-\varepsilon\,\%$	γ	δ	ϱ	$-\varepsilon\,\%$	γ	δ	ϱ
0.007	0.01	-0.0001	-0.0000	16.460	0.51	-0.3472	-0.1215
0.027	0.02	-0.0005	-0.0001	17.077	0.52	-0.3613	-0.1280
0.060	0.03	-0.0012	-0.0003	17.702	0.53	-0.3756	-0.1348
0.107	0.04	-0.0021	-0.0005	18.337	0.54	-0.3903	-0.1419
0.167	0.05	-0.0033	-0.0008	18.981	0.55	-0.4054	-0.1492
0.240	0.06	-0.0048	-0.0012	19.634	0.56	-0.4208	-0.1569
0.326	0.07	-0.0065	-0.0016	20.295	0.57	-0.4365	-0.1649
0.426	0.08	-0.0085	-0.0022	20.965	0.58	-0.4526	-0.1732
0.539	0.09	-0.0108	-0.0027	21.644	0.59	-0.4690	-0.1819
0.665	0.10	-0.0133	-0.0034	22.330	0.60	-0.4859	-0.1910
0.805	0.11	-0.0161	-0.0041	23.025	0.61	-0.5031	-0.2005
0.957	0.12	-0.0192	-0.0049	23.727	0.62	-0.5207	-0.2104
1.123	0.13	-0.0225	-0.0058	24.437	0.63	-0.5387	-0.2207
1.302	0.14	-0.0261	-0.0067	25.155	0.64	-0.5571	-0.2315
1.493	0.15	-0.0300	-0.0077	25.880	0.65	-0.5760	-0.2427
1.698	0.16	-0.0341	-0.0088	26.612	0.66	-0.5953	-0.2544
1.916	0.17	-0.0385	-0.0100	27.352	0.67	-0.6150	-0.2667
2.146	0.18	-0.0431	-0.0113	28.098	0.68	-0.6352	-0.2794
2.389	0.19	-0.0480	-0.0126	28.851	0.69	-0.6560	-0.2928
2.645	0.20	-0.0532	-0.0141	29.611	0.70	-0.6772	-0.3067
2.914	0.21	-0.0587	-0.0156	30.377	0.71	-0.6989	-0.3213
3.196	0.22	-0.0644	-0.0172	31.149	0.72	-0.7212	-0.3364
3.490	0.23	-0.0703	-0.0189	31.927	0.73	-0.7441	-0.3523
3.796	0.24	-0.0766	-0.0207	32.711	0.74	-0.7676	-0.3689
4.115	0.25	-0.0831	-0.0226	33.500	0.75	-0.7916	-0.3862
4.446	0.26	-0.0898	-0.0246	34.295	0.76	-0.8164	-0.4044
4.790	0.27	-0.0969	-0.0268	35.096	0.77	-0.8417	-0.4233
5.145	0.28	-0.1042	-0.0290	35.901	0.78	-0.8678	-0.4432
5.513	0.29	-0.1117	-0.0313	36.712	0.79	-0.8946	-0.4639
5.893	0.30	-0.1195	-0.0338	37.527	0.80	-0.9222	-0.4856
6.285	0.31	-0.1276	-0.0364	38.346	0.81	-0.9505	-0.5083
6.688	0.32	-0.1360	-0.0391	39.170	0.82	-0.9797	-0.5321
7.103	0.33	-0.1446	-0.0419	39.999	0.83	-1.0098	-0.5570
7.530	0.34	-0.1535	-0.0449	40.831	0.84	-1.0408	-0.5831
7.969	0.35	-0.1627	-0.0480	41.667	0.85	-1.0727	-0.6105
8.419	0.36	-0.1721	-0.0512	42.506	0.86	-1.1057	-0.6391
8.880	0.37	-0.1818	-0.0546	43.349	0.87	-1.1397	-0.6692
9.352	0.38	-0.1918	-0.0582	44.196	0.88	-1.1749	-0.7008
9.836	0.39	-0.2020	-0.0619	45.045	0.89	-1.2112	-0.7339
10.330	0.40	-0.2125	-0.0658	45.897	0.90	-1.2488	-0.7687
10.836	0.41	-0.2233	-0.0698	46.752	0.91	-1.2877	-0.8052
11.352	0.42	-0.2344	-0.0741	47.610	0.92	-1.3280	-0.8437
11.879	0.43	-0.2458	-0.0785	48.469	0.93	-1.3697	-0.8840
12.416	0.44	-0.2574	-0.0831	49.331	0.94	-1.4130	-0.9265
12.964	0.45	-0.2694	-0.0879	50.195	0.95	-1.4580	-0.9713
13.522	0.46	-0.2816	-0.0929	51.060	0.96	-1.5047	-1.0184
14.090	0.47	-0.2941	-0.0982	51.927	0.97	-1.5533	-1.0680
14.668	0.48	-0.3069	-0.1037	52.795	0.98	-1.6039	-1.1203
15.255	0.49	-0.3200	-0.1094	53.665	0.99	-1.6565	-1.1755
15.853	0.50	-0.3335	-0.1153	54.535	1.00	-1.7114	-1.2338

References

[1] Courbon J., Conversy F., Rajade J., *Appareils d'appui en caoutchouc fretté pour ouvrages d'art*, Annales des Ponts et Chaussées, VI, pp. 340-390 (1967).

[2] C.N.R. (Consiglio Nazionale delle Ricerche), *Apparecchi d'appoggio in gomma e ptfe nelle costruzioni-istruzioni per il calcolo e l'impiego*. (C.N.R. 10018/85).

[3] L. Sanpaolesi & F. Angotti, *Apparecchi di appoggio in gomma per le costruzioni. Impostazione teorica e risultati sperimentali* - Costruzioni metalliche, n. 3, pp. 195-201, e n. 4, pp. 287-300 (1971).

[4] G. Del Piero & P. Podio-Guidugli, *A second-order solution for simply compressed rubber bearings*, Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Pisa, Vol. X, n. 173, pp. 257-277 (1969).

[5] G. Del Piero & P. Podio-Guidugli, *Collapse loads for reinforced rubber bearings in simple compression*, Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Pisa, Vol. XI, n. 180, pp. 115-128 (1970).

[6] Truesdell C. & Toupin R., *The classical field theories*, Encyclopedia of Physics, Vol. III/1, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1960).

[7] Treloar L.R.G., *The physics of rubber elasticity*, 3th Ed. Clarendon Press, Oxford (1975).

[8] Truesdell C. & Noll W., *The non-linear field theories of mechanics*, Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, Berlin-Heidelberg - New York, Springer (1965).

[9] S. Marzano, in preparazione (1988).