Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Giulio Mattei

Alcune osservazioni sulle onde magnetoacustiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.1, p. 81–84.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_1_81_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:81-84 (1990)

Magnetofluidodinamica. — *Alcune osservazioni sulle onde magnetoacustiche.* Nota (*) di Giulio Mattei, presentata dal Corrisp. T. Manacorda.

Abstract. — *Some remarks about the magnetoacoustic waves.* In this paper some remarks are made about the magnetoacoustic waves. These remarks do not appear in the very extensive literature on the subject, as far as the author knows; in spite of their simplicity, it is perhaps of some interest to derive them explicitly in this brief note, pointing out their physical meaning. The remarks concern: the Doppler effect; the linear momentum; the distinctive character of the waves; the magnetic force; the equipartition of energy.

Key words: Magnetofluid dynamics; Plasma; Waves.

Riassunto. — Nel presente lavoro si fanno alcune osservazioni sulle onde magnetoacustiche. Esse, per quanto è a conoscenza dell'autore, non sono presenti nella vastissima letteratura sull'argomento; nonostante la loro semplicità, è sembrato di un qualche interesse segnalarle esplicitamente per il loro contenuto fisico. Specificatamente riguardano: l'effetto Doppler; la quantità di moto; il carattere di onde di condensazione; il carattere conservativo del campo di forza magnetica; l'equipartizione dell'energia.

1. Richiami

Le equazioni magnetofluidodinamiche (MFD) delle piccole perturbazioni per un fluido comprimibile omogeneo, non dissipativo (non viscoso, non conduttore del calore e perfetto conduttore dell'elettricità) sono notoriamente le

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \partial \boldsymbol{v}/\partial t = -(a_0^2/\rho_0)\,\mathrm{grad}\,\rho + (4\pi\mu\rho_0)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b})\wedge \boldsymbol{B}_0\,, \\ \partial \boldsymbol{b}/\partial t = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}\wedge \boldsymbol{B}_0)\,, \\ \partial \rho/\partial t = -\rho_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,. \end{cases} \qquad \text{con } \mathrm{div}\,\boldsymbol{b} = 0\,,$$

In esse $\boldsymbol{B}_0/\mu$ e ρ_0 sono i valori costanti del campo magnetico e della densità nello stato imperturbato supposto di quiete (μ permeabilità magnetica costante); $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}/\mu$ e ρ le perturbazioni del campo di velocità, del campo magnetico e della densità; a_0 la velocità del suono (si usa il sistema di unità di misura di Gauss).

Dalle (1.1) per le onde piane sinusoidali magnetoacustiche (riferendoci con questa dizione alle onde propagantesi nella direzione ortogonale a $\boldsymbol{B}_0$), scelta la terna cartesiana di riferimento con l'asse x nella direzione di propagazione e l'asse y in quella di $\boldsymbol{B}_0$, si trae (cfr. p.e. [1, n. 52])

$$(1.2)\qquad \begin{cases} v_x(x,t) = \tilde{v}_x \cos(kx - \omega t)\,, \qquad v_y = v_z = 0\,, \\ b_y = (B_0/u)\,v_x\,, \qquad b_x = b_z = 0\,, \\ \rho = (\rho_0/u)\,v_x\,, \\ u = \omega/k = \sqrt{a_0^2 + A_0^2}\,, \end{cases}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1989.

dove $A_0 = B_0/\sqrt{4\pi\mu\rho_0}$ è la velocità di Alfvén, ω la frequenza angolare, k il numero d'onda, u la velocità di fase e il soprassegno $\sim$ indica l'ampiezza.

2. Effetto Doppler

In questo numero studiamo la propagazione di onde magnetoacustiche piane sinusoidali nel caso in cui il fluido nello stato imperturbato non sia, come supposto nel n. 1, in quiete, ma in moto traslatorio rettilineo e uniforme (di velocità $\boldsymbol{V}_0 = \textbf{costante}$).

Le (1.1) sono ora sostituite dalle

$$
(2.1)\qquad \begin{cases} (\partial/\partial t + \boldsymbol{V}_0\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{v} = -\,(a_0^2/\rho_0)\operatorname{grad}\rho + (4\pi\mu\rho_0)^{-1}(\operatorname{rot}\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{B}_0\,, \\ (\partial/\partial t + \boldsymbol{V}_0\cdot\operatorname{grad})\,\boldsymbol{b} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}_0)\,, \qquad \text{con } \operatorname{div}\boldsymbol{b} = 0\,, \\ (\partial/\partial t + \boldsymbol{V}_0\cdot\operatorname{grad})\,\rho = -\,\rho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,. \end{cases}
$$

Segue da qui che l'equazione di dispersione discende direttamente da quella del caso $V_0 = 0$ operando la trasformazione

$$(2.2)\qquad \omega \to \omega - kV_{0x}\,.$$

Si ha perciò

$$(2.3)\qquad (\omega - kV_{0x})^2 - (a_0^2 + A_0^2)\,k^2 = 0\,.$$

La trasformazione (2.2) — tenuto conto dell'invarianza di k (cfr. (2.6)) — equivale alla trasformazione

$$(2.4)\qquad u \to u'\,,$$

dove $u = \omega/k$ è la velocità di fase «assoluta» (cioè relativa alla terna Galileiana T a cui sono riferite le equazioni (2.1)) e

$$(2.5)\qquad u' = u - V_{0x}\,,$$

la velocità di fase «relativa» (cioè relativa ad una terna Galileiana T' rispetto alla quale il fluido nello stato imperturbato è in quiete). Quindi possiamo affermare che la propagazione di onde magnetoacustiche piane sinusoidali in un fluido, che nello stato imperturbato non è in quiete bensì in moto traslatorio rettilineo uniforme, viene descritta sostituendo u con u'.

È opportuno a questo punto sottolineare che quanto sopra è stato dedotto (*ed è certamente da attendersi a priori*) trascurando la corrente di spostamento. Non trascurando infatti tale corrente la suddetta affermazione non è più vera.

Se si tiene conto del fatto che in assenza di corrente di spostamento le equazioni MFD sono invarianti per una trasformazione di Galileo (come affermato p.e. in [2, p. 312] e in [3, p. 16] e dimostrato in [4, n. 8]) — mentre in presenza di detta corrente ciò non è più vero, stante l'invarianza per trasformazioni di Lorentz delle equazioni di Maxwell — quanto sopra appare fisicamente chiaro e naturale.

Infatti, imponendo l'invarianza della fase dell'onda piana (1) monocromatica

(1) Tale invarianza sussiste peraltro, come è ben noto, anche in relatività ristretta (cfr. [5, n. 3 e n. 23]).

abbiamo $kx - \omega t = k' x' - \omega' t'$, dove le grandezze con l'apice sono riferite alla terna T', da cui, tenendo conto del fatto che x' e t' sono legate a x e t dalla trasformazione Galileiana $x' = x - V_{0x} t$, $t' = t$, discendono le

$$k' = k\,, \tag{2.6}$$

$$\omega' = \omega - kV_{0x} \quad \text{(cfr. (2.2))}\,. \tag{2.7}$$

La (2.6) esprime la proprietà naturale che k è indipendente dal moto, mentre la (2.7) è la ben nota espressione matematica dell'*effetto Doppler* non relativistico.

Le osservazioni che seguono si riferiscono al caso $V_0 = 0$.

3. Ulteriori osservazioni

a) **Quantità di moto.** *Landau* e *Lifchitz* in [6, n. 64, (64.7)] dimostrano la formula seguente valida per *un'onda acustica piana monocromatica*

$$\overline{j} = \overline{q}/a_0^2\,, \tag{3.1}$$

dove $\boldsymbol{j}$ è il vettore densità di quantità di moto, $\boldsymbol{q}$ il vettore densità di flusso d'energia ed il soprassegno indica il valor medio sul periodo $2\pi/\omega$ (²).

Si vuole qui osservare che la (3.1) *vale anche per l'onda magnetoacustica piana monocromatica con* a_0 *sostituita da* $u = \sqrt{a_0^2 + A_0^2}$.

Infatti, da (1.2) segue $j_x = (\rho_0 + \rho)\, v_x = (\rho_0 + \rho)\, u\rho/\rho_0$, $j_y = j_z = 0$, da cui

$$\overline{j}_x = u\overline{\rho^2}/\rho_0 = u\tilde{\rho}^2/2\rho_0\,. \tag{3.2}$$

È inoltre (cfr. [9, (3.74)])

$$\overline{q}_x = u^3 \tilde{\rho}^2/2\rho_0\,, \qquad q_y = q_z = 0\,. \tag{3.3}$$

Da (3.2) e (3.3) segue

$$\overline{j} = \overline{q}/u^2\,. \tag{3.4}$$

b) **Carattere di onde di condensazione.** Osserviamo che dalle (1.2) discende che *il campo cinetico dell'onda magnetoacustica è irrotazionale e non solenoidale.* È facile convincersi (cfr. p.e. [1, n. 52]) che invece *il campo cinetico dell'onda di Alfvén è rotazionale e solenoidale.*

In analogia con la ben nota terminologia che si usa nella teoria delle onde elastiche (cfr. p.e. [7, n. 114 e n. 115]), potremmo per conseguenza pensare *le onde magnetoacustiche come particolari onde di condensazione e quelle di Alfvén come particolari onde di distorsione* (³).

(²) Si noti l'analogia formale con la formula per la quantità di moto elettromagnetica (cfr. p.e. [7, n. 142, (VI, 76)] e [8, n. 77, (206)]).

(³) Si osservi qui la profonda differenza fra MFD e ordinaria idrodinamica: nei fluidi ordinari non si possono notoriamente propagare onde di distorsione, cfr. p.e. [7, n. 118].

c) **Carattere conservativo del campo della forza magnetica.** Un'altra proprietà delle (1.2) è che per le onde magnetoacustiche il campo della forza magnetica (per unità di volume) $\boldsymbol{F}_m = (4\pi\mu)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B} = (4\pi\mu)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{B}_0$ risulta *conservativo.*

Per le onde di Alfvén invece $\boldsymbol{F}_m$ risulta *non conservativa.*

d) **Equipartizione dell'energia.** È ben noto (cfr. p.e. [10, p. 80]) che per le onde piane sinusoidali di Alfvén di piccola ampiezza propagantesi in un fluido incomprimibile omogeneo, non dissipativo c'è equipartizione fra la densità d'energia magnetica dell'onda e la densità d'energia cinetica.

Per un fluido comprimibile il risultato trovasi esteso in [9, n. 3.2] alle onde MFD propagantesi in direzione generica rispetto a $\boldsymbol{B}_0$. Per il fluido comprimibile c'è equipartizione fra la densità d'energia cinetica e la somma della densità d'energia magnetica e della densità di energia acustica associate all'onda.

Si vuole qui osservare che per le onde magnetoacustiche qui considerate (propagazione ortogonale a $\boldsymbol{B}_0$) il risultato è di immediata constatazione. Infatti, ricordando che la somma E_p della densità d'energia magnetica e della densità d'energia acustica associate alle onde magnetoacustiche vale (cfr. p.e. [11, (5.2) e (2.6)]) $E_p = a_0^2\rho^2/2\rho_0 + b^2/8\pi\mu$, detta $E_c = \rho_0 v^2/2$ la densità d'energia cinetica (approssimata al solito al second'ordine), da (1.2) segue subito $E_p = E_c$.

Bibliografia

[1] L. Landau - E. Lifchitz, *Electrodynamique des milieux continus.* Ed. Mir, Moscou 1969; ovvero: *Electrodynamics of continuous media.* Pergamon Press, 1981.

[2] C. K. Chu - H. Grad, *Magnetofluid dynamics.* In: R. J. Seeger - G. Temple (eds.), *Research Frontiers in Fluid Dynamics.* Interscience, New York 1965.

[3] V. C. A. Ferraro - C. Plumpton, *An introduction to magneto-fluid-mechanics.* 2nd ed., Oxford 1966.

[4] G. Mattei, *Una introduzione allo studio dei modelli di tipo idrodinamico della Fisica matematica dei plasmi.* Boll. Un. Mat. Ital., (5), 17-A, 1980, 1-24.

[5] C. Møller, *The theory of relativity.* Oxford 1952.

[6] L. Landau - E. Lifchitz, *Méchanique des fluids.* Ed. Mir, Moscou 1971; ovvero: *Fluid Mechanics.* Pergamon Press, 1982.

[7] E. Persico, *Introduzione alla Fisica matematica.* Zanichelli, Bologna 1960.

[8] R. Becker, *Teoria dell'elettricità.* Vol. I, Sansoni, Firenze 1949.

[9] J. E. Anderson, *Magnetohydrodynamic shock waves.* M.I.T. Press, 1963.

[10] H. Alfvén, *Cosmical electrodynamics.* 2nd ed., Oxford 1963.

[11] G. Mattei, *The lagrangian and hamiltonian formulations for magneto-fluid-dynamic waves.* Boll. Un. Mat. Ital., (4), 7, 1973, 302-308.

Meccanica Razionale, Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale
Facoltà di Ingegneria - Università degli Studi di Pisa
Via Diotisalvi, 2 - 56100 Pisa