Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Gaetano Fichera

I difficili rapporti fra l'Analisi funzionale e la Fisica Matematica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.2, p. 161–170.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_2_161_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:161-170(1990)

Fisica matematica. — *I difficili rapporti fra l'Analisi funzionale e la Fisica matematica.* Nota (*) del Socio GAETANO FICHERA.

ABSTRACT. — *Difficult relationships between Functional Analysis and Mathematical Physics*. It is shown how the choice of a topology in the space of the admissible functions, in some problems, influences the relevant results. Three examples are exhibited. Two from pure Mathematical Analysis: Stability of the solution of a Volterra integral equation and «Well-posedness» of Cauchy problem for Laplace operator. The third example concerns Mathematical Physics, namely the «Principle of Fading Memory» in Viscoelasticity.

KEY WORDS: Stability of solutions of integral equations; Well-posedness of Cauchy problem; Viscoelasticity; Principle of Fading Memory.

RIASSUNTO. — Si mostra come la scelta di una topologia nello spazio delle funzioni ammissibili, in taluni problemi, influenzi i relativi risultati. Vengono mostrati tre esempi. Due tratti dall'Analisi matematica pura: uno riguardante la stabilità della soluzione di un'equazione integrale di Volterra e l'altro il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace come «problema ben posto». Il terzo esempio è relativo alla Fisica matematica, precisamente al «Principio della Memoria evanescente» in Viscoelasticità.

In questi ultimi decenni l'Analisi funzionale è stata largamente usata nello studio di problemi posti dalla Meccanica del Continuo.

È indubbio che i potenti metodi funzionali hanno permesso di risolvere molti difficili problemi della Meccanica. C'è, tuttavia, un punto che merita di essere considerato con particolare attenzione.

L'uso dei metodi dell'Analisi funzionale richiede una scelta «a priori» degli spazi funzionali dove operare e, d'altronde, molti concetti fondamentali delle teorie che vengono ad essere impiegate sono strettamente legati alla scelta di questi spazi. Già nella stessa Matematica pura molte delle definizioni fondamentali hanno contenuto completamente diverso quando da un dato spazio funzionale si passa ad un altro. Di riflesso, lo stesso avviene, nella Fisica matematica, per quelle teorie fondate sull'impiego dell'Analisi funzionale. Vi è però una fondamentale differenza: mentre in Matematica pura il ricercatore deve solo prendere atto del cambiamento di significato di taluni concetti di base quando si passa da uno spazio funzionale ad un altro, nelle teorie che hanno come scopo precipuo la descrizione del mondo fisico le definizioni debbono avere un significato non ambiguo e, comunque, dipendente unicamente dal fenomeno che si vuole studiare e non dagli strumenti analitici impiegati per fornire un modello matematico.

Si ha, concettualmente, una situazione analoga a quella che si presenta allorché nello spazio geometrico, in cui si studia un fenomeno fisico, si introduce un sistema di coordinate. Le leggi fisiche che governano il fenomeno in istudio debbono essere indipendenti dal riferimento scelto.

(*) Presentata nella seduta del 18 novembre 1989.

Credo di poter affermare con sicurezza che, mentre i Fisici matematici sono sensibilissimi ai problemi della *frame indifference*, poco o per nulla sentono l'istanza di rendere indipendenti dalla topologia funzionale, che vengono ad impiegare, le teorie da essi studiate. Avviene allora che un fenomeno del mondo fisico descritto in un dato modo, impiegando una certa topologia nello spazio delle funzioni ammissibili, viene rappresentato in modo completamente diverso, cambiando la topologia nello spazio funzionale in considerazione.

Naturalmente bisognerebbe che la scelta degli spazi funzionali dove operare e della relativa topologia potesse esser fatta in base ad esperimenti o, quanto meno, a considerazioni puramente fisiche. Ma questo non appare sempre possibile.

In questo lavoro mostreremo prima, mediante due esempi, come concetti fondamentali dell'Analisi abbiano contenuto completamente opposto quando si cambia lo spazio funzionale dove essi si esercitano. Successivamente faremo vedere come il concetto di *Fading Memory* (Memoria evanescente) per i materiali elastici dipenda pesantemente dalla scelta dello spazio funzionale scelto, talché questo concetto, che tanto successo ha avuto nella recente letteratura, appare privo di un effettivo significato fisico per l'impossibilità di indicare, in base a considerazioni puramente fisiche, lo spazio funzionale nel quale esso deve esercitarsi ([1]).

Gli argomenti esposti in questa Nota furono oggetto di una conferenza da me tenuta al Convegno che si svolse a Bologna (21-22 ottobre 1988) per onorare il 70° compleanno di Antonio Pignedoli. Sono stato informato che il volume degli Atti di quel Convegno, ancorché venga pubblicato, subirà notevoli ritardi. Il Presidente del Convegno stesso, il Collega Prof. Renato Nardini, mi ha, pertanto, autorizzato a pubblicare questa Nota che, con animo profondamente rattristato, torno a dedicare ad Antonio Pignedoli, purtroppo, ora, alla Sua Memoria, dato che quel caro, indimenticabile Amico è improvvisamente mancato il 7 agosto di quest'anno.

1. Il concetto di «stabilità» per la soluzione di un'equazione integrale o differenziale

Sia S uno spazio di Banach complesso la cui norma indichiamo con $\| \ \|$ e sia $\mathcal{T}(S)$ lo spazio delle trasformazioni lineari e limitate di S in se stesso. Lo spazio $\mathcal{T}(S)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$|||K||| = \sup_{\|u\|=1} \|Ku\| .$$

Consideriamo l'intervallo $I \equiv [t_0, +\infty)$ dell'asse reale e sia $C^0(I, S)$ lo spazio delle funzioni a valori in S e continue (nella topologia forte di S) su I.

Indichiamo con $K(t, \tau)$ una trasformazione di $\mathcal{T}(S)$ definita e continua (nella topologia forte di $\mathcal{T}(S)$) per ogni $(t, \tau) \in I \times I$. Se è $\varphi(t) \in C^0(I, S)$, l'equazione integrale

([1]) Considerazioni analoghe a quelle svolte in questo lavoro sono state esposte dall'a. nella conferenza *Function Spaces and Fading Memory* tenuta al Symposium on *Nonlinear Effects in Solids and Fluids*, Boston, 12-13, XII, 1987.

di Volterra

$$u(t) = \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau \tag{1.1}$$

ha una ed una sola soluzione $u(t) \in C^0(I, S)$. La soluzione $u(t)$ di (1.1) è detta essere *asintoticamente stabile* (per $t \to +\infty$) se

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t)\| = 0 . \tag{1.2}$$

Come esempio si consideri l'equazione integrale di Volterra

$$U(x, t) = \exp - x^2 + \int_1^t \left(\frac{2}{\tau} - 6\tau^5 x^2\right) U(x, \tau)\, d\tau , \tag{1.3}$$

la quale è equivalente all'equazione differenziale

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \left(\frac{2}{t} - 6t^5 x^2\right) U(x, t)$$

con la condizione iniziale $U(x, 1) = \exp - x^2$. Assumiamo come spazio S lo spazio delle funzioni L^1 in $(-1, 1)$ con la norma

$$\|v\| = \int_{-1}^{1} |v(x)|\, dx .$$

Si consideri $U(x, t)$ come una funzione $u(t)$ definita per $t \in [1, +\infty)$ e con valori in S. Poniamo

$$Ku = (2\tau^{-1} - 6\tau^5 x^2)\, U(x, \tau) , \qquad \varphi = \exp - x^2 .$$

L'equazione (1.1) ha la seguente soluzione

$$u(t) \equiv U(x, t) = t^2 \exp - t^6 x^2 . \tag{1.4}$$

Quindi

$$\|u(t)\| = t^2 \int_{-1}^{1} \exp - t^6 x^2\, dx = \frac{1}{t} \int_{-t^3}^{t^3} \exp - \xi^2\, d\xi \leqslant \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - \xi^2\, d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{t} .$$

Ciò prova che (1.2) è soddisfatta e $u(t)$ è asintoticamente stabile.

Assumiamo ora come S lo spazio delle funzioni continue in $[-1, 1]$ con la norma

$$\|v\| = \max_{[-1,1]} |v(x)| .$$

Da (1.4) abbiamo

$$\|u(t)\| = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} [t^2 \exp - t^6 x^2] = t^2 , \qquad \lim_{t \to +\infty} \|u(t)\| = +\infty .$$

In conclusione:

Assumendo come spazio S lo spazio $L^1(-1, 1)$, è vero che la soluzione di (1.3) *è asintoticamente stabile. Se S è lo spazio $C^0[-1, 1]$ questo è falso.*

È bene notare che, se si considera il problema

$$\frac{du}{dt}=f(t,u)\,,\qquad u(t_0)=u_0$$

per funzioni u aventi valori in uno spazio vettoriale S di dimensione finita, non si presenta più l'inconveniente consistente nella dipendenza del concetto di «stabilità» dalla norma (compatibile con la struttura lineare di S) introdotta in S, dato che la topologia, che una siffatta norma introduce in S, è invariante (cfr. [1, p. 51, teor. II]).

2. Il concetto di «problema ben posto»: il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace

Secondo la classica definizione data da Hadamard, un problema per un'equazione alle derivate parziali è *ben posto* se: I) la soluzione esiste; II) è unica; III) dipende con continuità dai dati.

Si consideri il problema di Cauchy per le funzioni armoniche

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x)\,,\qquad u_y(x,0)=\varphi_1(x)\,,\qquad\qquad 0\leqslant x\leqslant\pi\,. \tag{2.2}$$

Si supponga che $\varphi_0(x)$ e $\varphi_1(x)$ siano funzioni analitiche di x nell'intervallo chiuso $[0,\pi]$. Ciò significa che, per ogni $x_0\in[0,\pi]$, $\varphi_k(x)$ $(k=1,2)$ può essere sviluppata in una serie di potenze in x-x_0 convergente in un intorno di x_0. Allora, in virtù del classico teorema di Cauchy-Kowaleswka, è possibile trovare $\sigma>0$ tale che per $0\leqslant x\leqslant\pi$, $-\sigma\leqslant y\leqslant\sigma$ esiste una (unica) soluzione di (2.1) che soddisfa le (2.2).

Seguendo Hadamard [2, p. 33-34], si assuma

$$\varphi_0^n(x)=0\,,\qquad \varphi_1^n(x)=(\exp-\sqrt{\mathrm{n}})\sin nx \tag{2.3}$$

dove n è un intero positivo.

Si ha $u^{(n)}(x,y)=n^{-1}(\exp-\sqrt{n})\sin nx\sinh ny$.

Si introduca nello spazio dei dati $\Phi\equiv(\varphi_0,\varphi_1)$ la seguente norma

$$\|\Phi\|=\sum_{h=0}^{m}\left(\max_{[0,\pi]}\left|\frac{d^h\varphi_0}{dx^h}\right|+\max_{[0,\pi]}\left|\frac{d^h\varphi_1}{dx^h}\right|\right) \tag{2.4}$$

dove m è un prefissato intero non negativo.

Relativamente alla scelta (2.3) abbiamo

$$\|\Phi^{(n)}\|=(\exp-\sqrt{n})\sum_{h=0}^{m}n^h\,.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\|\Phi^{(n)}\|=0\,.$$

Si introduca nello spazio U delle soluzioni della (2.1) nel rettangolo $[0,\pi]\times\times[-\sigma,\sigma]$ la norma

$$\|u\|=\max_{[0,\pi]\times[-\sigma,\sigma]}|u(x,y)|\,. \tag{2.5}$$

Si vede facilmente che, per quanto piccolo possa essere stato scelto σ, si ha
$$\lim_{n\to\infty} \|u^{(n)}\| = +\infty .$$
Ciò prova che la condizione III) perché il problema (2.1), (2.2) sia ben posto, non è soddisfatta.

Si può leggere nell'autorevole trattato [3] (vedi p. 115): «It was emphasized by Hadamard that the Cauchy-Kowalewska theorem is of limited value because the solution needs not to depend continuously on φ_0 and φ_1 even if these functions are given the C^∞ topology and a very weak topology is used for u».

A nostro avviso, questa critica al teorema di Cauchy-Kowalewska appare ingiusta, dato che, assumendo una norma più opportuna nello spazio dei «dati», può ottenersi la dipendenza continua della soluzione del problema (2.1), (2.2) dai dati.

Infatti, dato che il teorema di Cauchy-Kowalewska è valido se φ_0 e φ_1 sono funzioni analitiche di x in $[0,\pi]$, introducendo la variabile complessa $z = x + iy$, si possono considerare φ_0 e φ_1 come funzioni olomorfe di z in un rettangolo $R_\sigma: -\sigma \leqslant x \leqslant \pi + \sigma$, $-\sigma \leqslant y \leqslant \sigma$ $(\sigma > 0)$ del piano complesso della variabile z.

Si assuma come spazio S dei dati lo spazio delle coppie $\Phi \equiv (\varphi_0, \varphi_1)$ di funzioni olomorfe in $R_\sigma - \partial R_\sigma$ e continue in R_σ.

Se u è armonica in $R_\sigma - \partial R_\sigma$ e continua in R_σ, denotiamo con v la funzione armonica coniugata di u tale che $v(0,0) = 0$. Sia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Se esiste la soluzione di (2.1), (2.2), allora per $0 \leqslant x \leqslant \pi$: $f'(x + i0) = \varphi_0'(x + i0) - i\varphi_1(x + i0)$.

Quindi, per $z \in R_\sigma$, $f'(z) = \varphi'(z_0) - i\varphi_1(z)$, che implica
$$f(z) = \varphi_0(z) - i \int_0^z \varphi_1(\zeta)\, d\zeta . \tag{2.6}$$
Viceversa, considerata la funzione olomorfa data da (2.6), si verifica immediatamente che la funzione $u = \Re f(z)$ è la soluzione del problema (2.1), (2.2). Se introduciamo in S la norma
$$\|\Phi\| = \max_{R_\sigma} |\varphi_0(z)| + (\pi + \sigma) \max_{R_\sigma} |\varphi_1(z)| \tag{2.7}$$
ed assumiamo per u la norma (2.5), da (2.6) otteniamo $\|u\| \leqslant \|\Phi\|$, che prova la dipendenza continua della soluzione u dai dati. Quindi:

Il problema di Cauchy (2.1), (2.2) che non è ben posto nelle topologie definite da (2.4) e (2.5) diventa ben posto se si introducono le topologie (2.7), (2.5).

Dopo l'esempio del §1, questo è un ulteriore esempio di come la scelta degli spazi funzionali e delle relative topologie può influenzare un concetto fondamentale dell'Analisi matematica.

3. Il concetto di Fading Memory per un materiale elastico

Consideriamo le equazioni costitutive di un corpo linearmente elastico dotato di memoria. Come ben noto, ammesso il «Principio del ciclo chiuso» [4, cap. VII] o

«Translation Invariance Axiom» [5, p. 303], le dette equazioni costitutive si scrivono

$$\sigma(t) = G(0)\,\varepsilon(t) + \int_{t_0}^{t} \dot{G}(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau\,, \tag{3.1}$$

dove σ è il tensore degli sforzi, ε quello di deformazione, G una matrice dipendente unicamente da una variabile reale s $(0 \leq s < +\infty)$ e $\dot{G}$ la sua derivata rispetto a s.

Nelle (3.1) non è stata indicata la dipendenza di σ e di ε dalle variabili spaziali. Per t_0 si pone $t_0 = -\infty$ oppure t_0 uguale ad un fissato numero reale. Si assume $G(0) > 0$, cioè la matrice $G(0)$ si suppone definita positiva. Inoltre è necessario fare su $\dot{G}(s)$ e su $\varepsilon(t)$ ipotesi tali da assicurare l'esistenza dell'integrale al secondo membro di (3.1).

Coleman e Noll, nella ben nota Memoria [6], assunto $t_0 = -\infty$, affermano (vedi p. 243): «The memory of a simple material fades in time». Con questa proposizione essi intendono che il materiale elastico ha la tendenza a dimenticare la storia del suo lontano passato, cioè che le deformazioni sofferte dal corpo nel passato diventano sempre più ininfluenti nella (3.1) quando t cresce. Questa idea già appare nell'opera di Volterra, ancorché espressa mediante un differente approccio analitico (vedi [4, p. 102]).

Per esprimere matematicamente la loro idea, Coleman e Noll introducono una *funzione di influenza* $h(s)$ (funzione a valori reali) che gode delle seguenti proprietà:

I) $h(s) > 0, \ \forall s \geq 0$;

II) $\lim\limits_{s \to +\infty} s^p h(s) = 0$ per qualche $p > 0$;

III) (3.2) $$\int_0^{+\infty} |\dot{G}(s)|^2 [h(s)]^{-2}\, ds < +\infty\,.$$

È evidente in qual modo Coleman e Noll intendano che $h(s)$ *influenzi* la memoria del materiale: più grande è p, più rapido deve essere il «decadimento» di $\dot{G}(s)$ per $s \to +\infty$, cioè più rapida deve essere l'evanescenza della memoria del materiale.

La condizione (3.2) permette anche di indicare sotto quali condizioni $\varepsilon(t)$ è tale da dar senso all'integrale al secondo membro di (3.1). Ciò, ovviamente, può farsi in più modi. Ad esempio, se $h(s)$ è continua in $[0, +\infty)$ ed esiste $t_1 \geq 0$ tale che per $t \geq t_1$: $|h(t+s)|^2 \leq q(t)|h(s)|^2$, essendo $q(t)$ una funzione positiva di t, allora, assumendo nella (3.1) $t \geq t_1$, basta prendere $\varepsilon(t)$ nello spazio delle funzioni misurabili tali che

$$\varepsilon(t) \in L^2_{\mathrm{loc}}\,, \qquad \int_0^{+\infty} |\varepsilon(-s)|^2\, |h(s)|^2\, ds < +\infty\,. \tag{3.3}$$

È bene ripetere che, fissata $h(s)$, la definizione dello spazio funzionale nel quale scegliere $\varepsilon(t)$ può darsi in infiniti altri modi.

È ovvio che il concetto di *funzione di influenza* è un concetto puramente matematico. Infatti, la $h(s)$ non potrà mai essere assegnata, o la sua scelta essere confermata, sulla base di esperimenti di carattere fisico. Infatti, qualunque sia l'esperimento fisico che possa escogitarsi, esso si eserciterà sempre in un intervallo finito di tempo e non potrà mai essere atto a determinare il comportamento asintotico di $h(s)$ per $s \to +\infty$.

In altri termini, data comunque una funzione $h(s)$ definita in un intervallo limitato, questa potrà sempre prolungarsi fuori di questo intervallo in modo da avere per $s \to +\infty$ un qualsiasi prefissato comportamento asintotico.

Considereremo, d'ora in avanti, per semplicità, il caso di una struttura elastica unidimensionale. In tal caso $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ e $G(s)$ sono funzioni scalari a valori reali.

Le considerazioni che verremo a svolgere e gli esempi che porteremo possono facilmente estendersi ai casi pluri-dimensionali.

Sia $\gamma > 0$ ed assumiamo $h(s) = \exp - \gamma s$.

Da quanto sopra si è detto, come spazio funzionale S_γ nel quale assumere $\varepsilon(t)$ possiamo considerare lo spazio definito da

$$\varepsilon(t) \in L^2_{\mathrm{loc}}, \quad \int_0^{+\infty} |\varepsilon(-s)|^2 \exp - 2\gamma s \, ds < +\infty . \tag{3.4}$$

Come funzione $G(s)$ si assuma $G(s) = 2^{-1} + 2^{-1} \exp - s$.

Si vede subito che è soddisfatta la (3.2) assumendo $\gamma < 1$.

L'equazione omogenea associata a (3.1) (con $t_0 = -\infty$) è

$$0 = \varepsilon(t) - 2^{-1} \exp - t \int_{-\infty}^{t} (\exp \tau)\, \varepsilon(\tau)\, d\tau . \tag{3.5}$$

Posto $\varphi(t) = (\exp t)\, \varepsilon(t)$, dalla (3.5) si trae $2\varphi'(t) - \varphi(t) = 0$ e quindi $\varepsilon(t) = c \exp - 2^{-1} t$ con c costante arbitraria.

Si ha

$$\int_0^{+\infty} (\exp s)\, (\exp - 2\gamma s)\, ds \begin{cases} = +\infty & \text{se } 2\gamma \leqslant 1 , \\ < +\infty & \text{se } 2\gamma > 1 . \end{cases}$$

Pertanto, se è $\gamma \leqslant 2^{-1}$, la $\exp - 2^{-1} t$ non appartiene a S_γ ed, invece, vi appartiene se $\gamma > 2^{-1}$. Pertanto

Per $\gamma \leqslant 2^{-1}$ *per la* (3.1) (*con* $t_0 = -\infty$) *sussiste il teorema di unicità* (2), *laddove tale teorema non sussiste per* $\gamma > 2^{-1}$.

Si ha così un ulteriore esempio (cfr. [7-9]) nel quale, pur essendo verificato il Principio di «Fading Memory» di Coleman e Noll, può mancare il teorema di unicità: basta assumere $2^{-1} < \gamma < 1$.

Si noti che la *funzione di rilassamento* $G(s) = 2^{-1} + 2^{-1} \exp - s$, oltre a verificare le condizioni I), II), III) del Principio di «Fading Memory» di Coleman e Noll, verifica le condizioni proposte da Gurtin e Capriz (lettera a me diretta riprodotta in [8]) dopo la pubblicazione di [7], nonché la condizione proposta da Graffi [10] (e ripresa da altri), dopo la pubblicazione del lavoro [8].

(2) Per $\gamma \leqslant 2^{-1}$ si ha anche il teorema di esistenza e la soluzione $\varepsilon(t)$ di (3.1), con $t_0 = -\infty$, è data da

$$\varepsilon(t) = 2^{-1} \int_{-\infty}^{t} \exp[-2^{-1}(t-\tau)]\, \sigma(\tau)\, d\tau + \sigma(t) . \tag{*}$$

È, infatti, facile verificare che, se è $\sigma(t) \in S_{\gamma'}$ con $\gamma' < \gamma$ la (*) fornisce la soluzione di (3.1) ($t_0 = -\infty$) appartenente a S_γ.

Da ultimo qualcuno ha osservato che il verificarsi della mancanza di esistenza e/o unicità è circostanza per nulla sorprendente, dato che tale mancanza può corrispondere ad un fenomeno di instabilità del materiale.

Questa affermazione non appare, però, convincente, dato che non si potranno mai predisporre esperimenti fisici tali da poter determinare a quale S_γ appartengono le soluzioni di (3.1), con $t_0 = -\infty$, che hanno significato fisico.

Qualunque sia γ $(0 < \gamma < 1)$, per ogni intervallo (di tempo) limitato $[a, b]$, le restrizioni delle funzioni dello spazio S_γ all'intervallo $[a,b]$ costituiscono sempre lo spazio $L^2[a, b]$. In altri termini, data comunque una funzione di $L^2[a, b]$, questa si può sempre prolungare fuori di questo intervallo, sia in una funzione appartenente ad uno

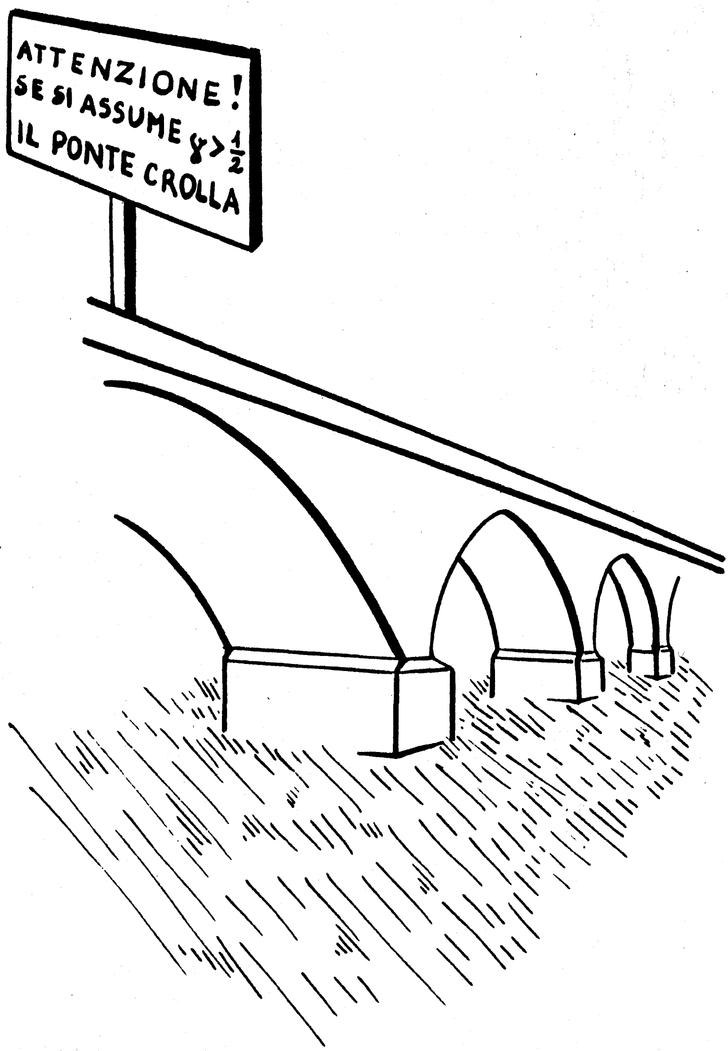

Fig. 1.

spazio funzionale per il quale ci sarebbe la predetta stabilità, sia in una di uno spazio per il quale tale stabilità mancherebbe.

Le considerazioni svolte fanno sorgere serie perplessità circa l'effettivo valore fisico della teoria di Coleman e Noll, data la sua dipendenza dalla scelta di una topologia nello spazio funzionale in cui si studia il problema (v. fig. 1).

4. Osservazioni su un'appropriata impostazione dei problemi della Viscoelasticità lineare

Volterra, nello studiare la teoria lineare dei materiali elastici con memoria, assume $t_0 > -\infty$, riservando al caso $t_0 = -\infty$ oppure al caso $t_0 = t - T$ (T costante positiva assegnata) solo brevissimi cenni. Il caso $t_0 = t - T$ si riconduce immediatamente al caso $t_0 = -\infty$ assumendo $G(s) = G(T)$ per $s > T$.

Pertanto, nell'analisi che ora faremo, confronteremo fra loro solo i due casi: $t_0 = -\infty$, $t_0 =$ numero reale. La ragione per la quale si considera l'operatore integrale che fa variare τ da $-\infty$ ad un valore finito di t, risiede nel fatto che, in ipotesi di sommabilità per il prodotto $\dot{G}(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)$, si pensa che per t_0 reale negativo e di modulo assai grande, il contributo dell'integrale esteso da $-\infty$ a t_0 sia molto piccolo e, quindi, «trascurabile», talché il fenomeno viene sostanzialmente descritto allo stesso modo, sia considerando l'integrale esteso all'intervallo infinito $(-\infty, t)$, che a quello finito (t_0, t).

La considerazione dell'intervallo infinito ha il vantaggio di evitare di fissare un valore iniziale t_0 per la variabile tempo.

Purtroppo tale considerazione di «trascurabilità» si rivela assai grossolana ed altera in modo determinante il modello matematico del problema. In effetti, i due operatori

$$\mathcal{T}_{-\infty}(\varepsilon) = G(0)\,\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^{t} \dot{G}(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau\,,$$

$$\mathcal{T}_{t_0}(\varepsilon) = G(0)\,\varepsilon(t) + \int_{t_0}^{t} \dot{G}(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau \qquad (t_0 > -\infty)$$

sono, dal punto di vista dell'Analisi funzionale, completamente diversi, dato che $\mathcal{T}_{t_0}$ soffre, in generale, di una sorta di «discontinuità» quando $t_0 = -\infty$. Questo perché:

1) Lo spettro di $\mathcal{T}_{t_0}$ che per ogni $t_0 > -\infty$ contiene solo l'elemento $\mu = G(0)$, per $t_0 = -\infty$ può «esplodere» e contenere infiniti punti o, addirittura, tutto un disco del piano complesso.

2) L'operatore $\mathcal{T}_{t_0}(t_0 > -\infty)$ che, in ipotesi di modesta regolarità per $\dot{G}(s)$, è insensibile allo spazio funzionale nel quale si studia l'equazione (3.1), diventa sensibilissimo alla scelta di tale spazio se $t_0 = -\infty$.

Quanto affermato in 2) fa sì che i problemi viscoelastici, studiati mediante la (3.1), per $t_0 > -\infty$ non esibiscono risultati diversi o, addirittura, opposti quando si cambia lo spazio funzionale, come, invece, abbiamo visto, accade per $t_0 = -\infty$. La (3.1) per $t_0 > -\infty$ è un'equazione integrale di Volterra per la quale c'è sempre il teorema di esistenza ed unicità e la regolarità della soluzione $\varepsilon(t)$ è assicurata dal grado di regolarità che si concede a $\dot{G}(s)$ ed a $\sigma(t)$, quale si sia lo spazio funzionale nel quale la (3.1) viene studiata.

Se si vuole assumere $t_0 = -\infty$, appare come un compito arduo fornire una teoria la quale, oltre che *frame indifferent*, sia anche *functional topology indifferent*, come ha il dovere di essere ogni autentica teoria fisico-matematica (3).

(3) Per ulteriori considerazioni su questo argomento cfr. [11].

Bibliografia

[1] M. A. Naimark, *Normed Rings.* P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1959.

[2] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Yale Univ. Press, 1923; reprinted by Dover Publ., New York 1952.

[3] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Equations.* Die Grundleheren der Mathematischen Wissenschaften in Einzerdarstellungen, Bd. 116, 2nd rev. ed., Springer, Heidelberg 1964.

[4] V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes.* Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris 1913.

[5] M. E. Gurtin - E. Sternberg, *On the Linear Theory of Viscoelasticity.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 11, 1962, 291-356.

[6] B. Coleman - W. Noll, *Foundations of Linear Viscoelasticity.* Reviews of Modern Physics, 33, 2, 1961, 239-249.

[7] G. Fichera, *Avere una memoria tenace crea gravi problemi.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 70, 1979, 101-112.

[8] G. Fichera, *Sul principio della memoria evanescente.* Rend. del Seminario Matematico Università di Padova, 68, 1982, 245-259.

[9] G. Fichera, *On Linear Viscoelasticity.* Mechanics Res. Commun., 12, 1985, 241-242.

[10] D. Graffi, *On the Fading Memory.* Applicable Analysis, 15, 1983, 295-311.

[11] G. Fichera, *Sui materiali elastici con memoria.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 82, fasc. 3, 1988, 473-478.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 2 - 00185 Roma