Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Jacques Justin, Giuseppe Pirillo, Stefano Varricchio

Alcune condizioni sul prodotto di due elementi in un semigruppo.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.2, p. 85–87.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_2_85_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:85-87 (1990)

Algebra. — *Alcune condizioni sul prodotto di due elementi in un semigruppo.* Nota di JACQUES JUSTIN, GIUSEPPE PIRILLO e STEFANO VARRICCHIO, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

ABSTRACT. — *Some conditions on the product of two elements of a semigroup.* Let S be a finitely generated semigroup. If for each pair x, y of elements of S one has that xy or yx is an idempotent then S is finite.

KEY WORDS: Semigroup; Idempotent; Ideal.

RIASSUNTO. — Sia S un semigruppo finitamente generato. Se per ogni coppia x, y di elementi di S si ha che xy oppure yx è un idempotente allora S è finito.

Sia S un semigruppo finitamente generato. È ben noto che se tutti i suoi elementi sono idempotenti allora S è finito (si veda [1] e si veda anche il teorema 2.4.1 di [5]).

Recentemente Justin e Pirillo, studiando la classe dei semigruppi permutabili, hanno dimostrato l'esistenza di un semigruppo finitamente generato, infinito, periodico e tale che dati comunque tre suoi elementi x_1, x_2 ed x_3, per almeno una permutazione p di $\{1, 2, 3\}$, il prodotto $x_{p(1)} x_{p(2)} x_{p(3)}$ è uno zero (si veda [4]; in [3] è presentato un risultato analogo).

È utile introdurre ora una definizione.

DEFINIZIONE. *Diciamo che un semigruppo S verifica la condizione* I_n (*risp.* Z_n, L_n, R_n), $n \geq 1$, *se per ogni n-pla* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *di elementi di S esiste una permutazione p di* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *tale che* $x_{p(1)} x_{p(2)} \ldots x_{p(n)}$ *è un idempotente* (*risp. uno zero, uno zero sinistro, uno zero destro*) *di S.*

Il risultato appena ricordato di [4] dice che la condizione Z_3 e, *a fortiori*, tutte le altre condizioni Z_k, L_k, R_k ed I_k con $k \geq 3$ non sono condizioni di finitezza per semigruppi finitamente generati (anche se periodici).

Poiché il già citato teorema di [1] assicura invece che tale è la condizione I_1, e poiché tali sono, banalmente, le condizioni Z_1, L_1 ed R_1, restano aperte solo le questioni relative ad I_2, Z_2, L_2 ed R_2. Ad esse diamo una risposta in questo lavoro.

LEMMA. *Se un semigruppo S ha la proprietà* I_2 *allora, per ogni elemento s di S,*

$$s^2 \text{ è un idempotente;} \tag{1}$$

e, per ogni coppia s, t di elementi di S,

$$sts = ststs. \tag{2}$$

DIMOSTRAZIONE. La (1) è ovvia; per la (2) basta osservare che st oppure ts è un idempotente.

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1990.

TEOREMA 1. *Sia* S *un semigruppo finitamente generato. Se* S *ha la proprietà* I_2 *allora* S *è finito.*

DIMOSTRAZIONE. Per un noto teorema di Hotzel (si veda [2]), è sufficiente dimostrare che

a) i sottogruppi di S sono finiti;

b) le catene discendenti di ideali principali destri sono di lunghezza finita.

a) Possiamo dimostrare facilmente che i sottogruppi di S sono addirittura banali.

b) Indichiamo ora con A un insieme finito di generatori di S. Sia m il numero di elementi di A. Supponiamo, per assurdo, che esista una catena *strettamente decrescente* di ideali principali destri di S di lunghezza $2m^2+3$: $x_{-1}S^1 \supset x_0S^1 \supset x_1S^1 \supset \dots \supset x_{2m^2+1}S^1$. Poiché $x_i \in x_{i-1}S^1$ ed $x_i \neq x_{i-1}$, esiste $u_i \in S$ tale che $x_i = x_{i-1}u_i$, per $0 \leqslant i \leqslant 2m^2+1$.

Sia y_i una sequenza di generatori avente prodotto u_i.

Se poniamo $y = y_0 y_1 \dots y_{2m^2+1} = a(0)\,a(1)\dots a(k)$, dove $a(i) \in A$ per ogni $i \in \{0, \dots, k\}$, abbiamo $k \geqslant 2m^2+1$.

La sequenza y è costruita in modo tale da assicurare l'esistenza di almeno $2m^2+1$ interi, diciamo $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{2m^2+1} \leqslant k$, tali che

$$a(0)\,a(1)\dots a(i_j-1)\,S^1 \supset a(0)\,a(1)\dots a(i_j-1)\,a(i_j)\,S^1$$

per ogni $j \in \{1, \dots, 2m^2+1\}$.

Tre delle $2m^2+1$ coppie $(a(i_j-1), a(i_j))$, dove $j \in \{1, \dots, 2m^2+1\}$, devono coincidere poiché il numero di elementi di A è m e pertanto per due di esse, diciamo $(a(i_r-1), a(i_r))$ e $(a(i_s-1), a(i_s))$ con $r, s \in \{1, \dots, 2m^2+1\}$, deve necessariamente verificarsi $i_r < i_s - 1$.

Allora, posto $(a(i_r-1), a(i_r)) = (a(i_s-1), a(i_s)) = (a, b)$ con a, $b \in A$, la sequenza di generatori y si può così fattorizzare: $y = uabu'abu''$, dove u, u' ed u'' sono sequenze di generatori (eventualmente vuote). Si ha poi $uabu'aS^1 \supset uabu'abS^1$.

Per il Lemma si ha $abu'a = abu'abu'a$ e pertanto

$$uabu'aS^1 = uabu'abu'aS^1 \subseteq uabu'abS^1,$$

e ciò è una contraddizione.

Dal teorema precedente segue il Corollario 2.

COROLLARIO 2. *Sia* S *un semigruppo finitamente generato. Se* S *ha la proprietà* L_2 (*risp.* R_2, Z_2) *allora è finito.*

Nota. Il corollario 2 può essere dimostrato direttamente utilizzando solo il «principio dei cassetti». Il teorema di Green e Rees, si vedano [5] ed [1], è generalizzato dal teorema 1. Nelle ipotesi di quel teorema, infatti, è richiesto che tutti gli elementi del semigruppo siano idempotenti, noi invece richiediamo che solo una parte di essi lo sia: in particolare, non facciamo ipotesi sui generatori. Più precisamente, noi abbiamo dimostrato la finitezza di un semigruppo finitamente generato che verifichi la condizione 2 del Lemma.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. A. GREEN - D. REES, *On semigroups in which* $x^r = x$. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 48, 1952, 35-40.

[2] E. HOTZEL, *On finiteness conditions in semigroups.* Journal of Algebra, 60, 1979, 352-370.

[3] J. JUSTIN - G. PIRILLO, *Infinite words and permutation properties.* Semigroup Forum, in corso di stampa.

[4] J. JUSTIN - G. PIRILLO, *Mots sans carré et permutabilité des semi-groups.* C. R. Acad. Sci. Paris, in corso di stampa.

[5] M. LOTHAIRE, *Combinatorics on words.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 17, Addison-Wesley, London 1983.

J. Justin: (LITP-CNRS-Univ. Paris VII)
19, rue de Bagneux - 92330 SCEAUX (Francia)

G. Pirillo: IAGA-IAMI C.N.R.
Viale Morgagni, 67/A - 50134 FIRENZE

S. Varricchio: Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 2 - 00185 ROMA