Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei Matematica e Applicazioni

Italo Tamanini, Corrado Giacomelli

Un tipo di approssimazione «dall'interno» degli insiemi di perimetro finito

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.3, p. 181–187.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_3_181_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:181-187 (1990)

Analisi matematica. — *Un tipo di approssimazione «dall'interno» degli insiemi di perimetro finito.* Nota di ITALO TAMANINI e CORRADO GIACOMELLI, presentata (*) dal Socio E. DE GIORGI.

ABSTRACT. — *Monotone approximation of sets of finite perimeter from inside.* We prove a strong approximation result of sets of finite perimeter by subsets without zero density points on the boundary.

KEY WORDS: Caccioppoli sets; Perimeter; Density points; Approximation.

RIASSUNTO. — Viene presentato un risultato di approssimazione forte degli insiemi di perimetro finito con una successione di sottoinsiemi privi di punti di densità zero sulla frontiera.

INTRODUZIONE

Un classico risultato della teoria degli insiemi di Caccioppoli (si veda ad esempio [2] o [6], Theorem 1.24) afferma che ogni insieme limitato Ω, di perimetro $P(\Omega)$ finito in $\boldsymbol{R}^n$, può essere approssimato — in misura e con convergenza dei perimetri — con una successione di *aperti* A_h, le cui frontiere sono sottovarietà $n-1$ dimensionali di $\boldsymbol{R}^n$ di classe C^∞ (si veda anche [9]).

Talvolta vi è l'esigenza di approssimare un dato insieme Ω «dall'interno», ovvero utilizzando sottoinsiemi di Ω stesso. Quando Ω è un aperto limitato con frontiera lipschitziana, un risultato in questa direzione è stato ottenuto da U. Massari e L. Pepe in [8].

D'altra parte, l'esistenza di insiemi di perimetro finito privi di punti interni mostra l'impossibilità di teoremi generali di approssimazione dall'interno, con successioni di aperti contenuti in Ω (cfr. [6, Remark 1.27]).

Qualche tempo fa, il prof. W. F. Pfeffer, nel corso di ricerche su condizioni generali atte a garantire la validità del teorema di Gauss-Green, pose alcune questioni che, ulteriormente rafforzate, possono essere riformulate come segue:

(i) è possibile approssimare in misura l'insieme (limitato e di perimetro finito) Ω con una successione crescente di sottoinsiemi E_h, ciascuno privo di punti di densità 0 sulla frontiera, e in modo che:

$$\lim_{h\to\infty} P(E_h) = P(\Omega)?$$

(ii) è inoltre possibile soddisfare la condizione aggiuntiva:

$$\lim_{h\to\infty} P(\Omega \setminus E_h) = 0\,?$$

(*) Nella seduta del 21 aprile 1990.

In questa nota viene esposto un metodo variazionale di approssimazione che consente di dare una risposta affermativa alle precedenti domande; notiamo che, tenuto conto della struttura degli insiemi di Caccioppoli (cfr. [3, § 4.4]), questi sono in un certo senso i migliori risultati conseguibili.

Notiamo inoltre che un metodo di approssimazione soddisfacente la sola condizione (i) è stato esposto in [11] e utilizzato dallo stesso Pfeffer in [10] (si vedano in particolare: Prop. 3.2, Remark 3.3 e 10.10). Il risultato ottenuto in [11] è qui riportato nel Teorema 1 del paragrafo 1.

Il successivo esempio mostra che la successione E_h ottenuta in [11] (minimizzando un funzionale, somma del perimetro e di un termine di volume; cfr. § 1) può non verificare la condizione (ii) — nemmeno se Ω è un aperto limitato con frontiera lipschitziana!

Nel § 2 viene esposto un nuovo procedimento di approssimazione che, salvaguardando le proprietà di monotonia e di densità dei minimi, forza questi ultimi ad «aderire» sempre più alla frontiera di Ω, in modo che (Teorema 2) risultino soddisfatte entrambe le richieste (i) e (ii).

1. Notazioni, definizioni e risultati preliminari

Nel seguito, indicheremo con E un sottoinsieme di $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 2$, misurabile secondo Lebesgue e con $|E|$ la sua misura di Lebesgue. Indicheremo con

$$E(\alpha) = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n : \lim_{r \to 0} \frac{|E \cap B_{x,r}|}{|B_{x,r}|} = \alpha \right\}$$

l'insieme dei punti di densità $\alpha \in [0,1]$ di E, dove $B_{x,r}$ denota la palla aperta in $\boldsymbol{R}^n$ di centro x e raggio r. Porremo inoltre $\omega_n = |B_{0,1}|$. Con $\mathcal{H}^{n-1}$ denoteremo la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale in $\boldsymbol{R}^n$.

Se C_h, C sono chiusi in $\boldsymbol{R}^n$, diremo che $C_h \to C$ *nella metrica di Hausdorff* (cfr. [4]) se e solo se: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists h_\varepsilon$ *t.c.* $C_h \subset [C]_\varepsilon$ e $C \subset [C_h]_\varepsilon$ $\forall h \geq h_\varepsilon$ dove

$$[C]_\varepsilon = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \inf_{y \in C} |x - y| \leq \varepsilon\} .$$

Per ogni aperto A in $\boldsymbol{R}^n$ definiamo, seguendo De Giorgi [2], il *perimetro* di E in A:

$$P(E,A) = sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \phi(x)\, dx : \phi \in C_0^1(A; \boldsymbol{R}^n),\ |\phi(x)| \leq 1 \ \ \forall x \right\} .$$

Quando $A = \boldsymbol{R}^n$ scriveremo brevemente $P(E)$ al posto di $P(E, \boldsymbol{R}^n)$; diremo che E è un *insieme di Caccioppoli* o di perimetro finito se $P(E) < +\infty$. La definizione precedente può essere estesa ai boreliani B di $\boldsymbol{R}^n$ ponendo $P(E,B) = inf\{P(E,A) : A$ aperto, $A \supset B\}$.

Poiché modifiche di misura zero di un insieme non ne cambiano il perimetro, nel seguito non distingueremo fra insiemi equivalenti (nel senso della misura di Lebesgue) e scriveremo ad esempio $E = \emptyset$ oppure $F \subset E$ intendendo rispettivamente $|E| = 0$ o $|F \setminus E| = 0$. Inoltre supporremo che nei punti x appartenenti alla frontiera ∂E di un insieme di perimetro finito sia verificata la condizione (cfr. [6, Prop. 3.1]): $0 < |E \cap B_{x,r}| < |B_{x,r}|$ $\forall r > 0$.

Rimandiamo a [3, 6, 7, 5] per ulteriori informazioni sugli insiemi di Caccioppoli.

Consideriamo ora un boreliano Ω di $\boldsymbol{R}^n$ verificante $|\Omega| + P(\Omega) < +\infty$; come è ben noto ciò equivale a richiedere che la funzione caratteristica χ_Ω dell'insieme Ω appartenga allo spazio $BV(\boldsymbol{R}^n)$ delle funzioni a variazione limitata su $\boldsymbol{R}^n$.

Per $E \subset \Omega$ e $\lambda > 0$ definiamo il funzionale

$$\hat{F}_\lambda(E) = P(E) + \lambda |\Omega \setminus E| . \tag{1.1}$$

Nel lavoro [11, Prop. 1.10 e Teor. 2.3] è dimostrato il seguente

Teorema 1. *Per ogni $\lambda > 0$ il funzionale $\hat{F}_\lambda$ ammette minimo fra i sottoinsiemi E di Ω. Se E_λ minimizza $\hat{F}_\lambda$ allora:*

$$\partial E_\lambda \cap E_\lambda(0) = \emptyset . \tag{1.2}$$

Inoltre, per $\lambda \uparrow +\infty$ vale

$$E_\lambda \uparrow \Omega \quad (\textit{ovvero } E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_2} \subset \Omega \textit{ se } \lambda_1 < \lambda_2,\ |\Omega \setminus E_\lambda| \to 0) ; \tag{1.3}$$

$$P(E_\lambda) \uparrow P(\Omega) . \tag{1.4}$$

Finalmente, se Ω è limitato si ha pure

$$\partial E_\lambda \to \partial \Omega \textit{ nella metrica di Hausdorff}. \tag{1.5}$$

In particolare, il Teorema 1 risponde affermativamente alla questione (i) formulata nell'introduzione. D'altra parte, come mostra il seguente esempio (che abbiamo inizialmente discusso con S. Luckhaus), i minimi E_λ di $\hat{F}_\lambda$ possono non verificare l'ulteriore condizione

$$\lim_{\lambda \to \infty} P(\Omega \setminus E_\lambda) = 0 .$$

Per quanto precede, quest'ultima condizione equivale alla convergenza $\chi_{E_\lambda} \to \chi_\Omega$ nella norma $BV(\boldsymbol{R}^n)$.

Esempio. Costruiremo un *dominio lipschitziano* Ω (aperto limitato connesso di $\boldsymbol{R}^2$ con frontiera lipschitziana), per il quale si ha, con le notazioni del Teorema 1, $P(\Omega \setminus E_\lambda) \geq \varepsilon > 0$ $\forall \lambda > 0$. Ω è un quadrato di lato 2 da cui viene rimossa una successione di «punte interne» triangolari, con base sui lati del quadrato e angolo al vertice costante. L'effetto delle «punte» è di impedire il contatto fra la frontiera di E_λ e parte della frontiera di Ω. La costruzione (iterativa) viene illustrata su un singolo lato (vedi fig. 1), essendo la stessa su ogni lato del quadrato. Nel corso della verifica verranno usati noti risultati di regolarità i quali, nel nostro caso specifico, affermano che $\partial E_\lambda \cap \Omega$ è costituita da archi di circonferenza di raggio costante $1/\lambda$, tangenti a $\partial \Omega$ nei punti di contatto regolari: si veda ad esempio [11, Prop. 1.22] e successivo commento.

Indichiamo (passo 1: vedi fig. 1) con $T_{1,1}$ il triangolo isoscele di altezza $u_1 = 1/2$ e angolo al vertice 2θ, posto a metà del lato. Al passo $i > 1$ costruiamo 2^{i-1} triangoli congruenti $T_{i,j}$ ($j = 1, \ldots, 2^{i-1}$) di altezza $2^{-i} i^{-2}$ e angolo al vertice 2θ, posti a metà dei

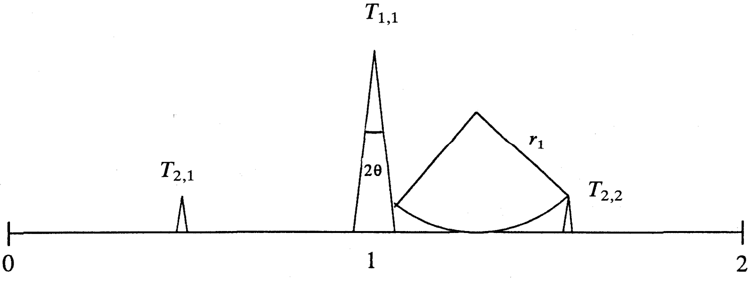

Fig. 1.

segmenti di lato lasciati liberi dalle punte già costruite. Scegliendo θ opportunamente piccolo, si osserva che il raggio r_i dell'arco di circonferenza che collega due triangoli successivi come in figura tende a 0 per $i \to \infty$. Posto $\lambda_i = r_i^{-1}$, da quanto precede si ottiene che la frontiera dei minimi E_i di $\hat{F}_{\lambda_i}$ non tocca la porzione di lato lasciata libera dalle punte. L'affermazione iniziale è così provata.

2. Il nuovo funzionale e il risultato di convergenza forte

In questo paragrafo utilizzeremo proprietà più fini degli insiemi di Caccioppoli, per le quali rimandiamo a [3, 6, 7]. Ricordiamo che il gradiente $D\chi_E$ (in senso distribuzionale) della funzione caratteristica χ_E di un insieme di perimetro finito $E \subset \boldsymbol{R}^n$ è una misura di Radon vettoriale avente variazione totale $|D\chi_E|$ limitata, e che in $|D\chi_E|$-quasi ogni $x \in \partial E$ è possibile definire una *normale interna approssimata*

$$\nu_E(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{D\chi_E(B_{x,\rho})}{|D\chi_E|(B_{x,\rho})}.$$

L'insieme dei punti $x \in \partial E$ dove $\nu_E(x)$ esiste ed ha modulo 1 è chiamato *frontiera ridotta* di E, denotato con $\partial^* E$. Si ha:

$$P(E, B) = |D\chi_E|(B) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap B) \tag{2.1}$$

per ogni boreliano $B \subset \boldsymbol{R}^n$. Inoltre

$$\partial^* E \subset E(1/2),\ \mathcal{H}^{n-1}(E(1/2) \setminus \partial^* E) = 0,\ \mathcal{H}^{n-1}[\boldsymbol{R}^n \setminus (E(0) \cup E(1) \cup E(1/2))] = 0. \tag{2.2}$$

Assegnata una costante $\alpha \in (0,1)$ che rimarrà fissa in tutto il paragrafo, possiamo definire per $\lambda > 0$ ed $E \subset \Omega$ (Ω boreliano $\subset \boldsymbol{R}^n$ con $|\Omega| + P(\Omega) < +\infty$) il nuovo funzionale (si veda (1.1)):

$$F_\lambda(E) = \hat{F}_\lambda(E) - \alpha \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap \partial^* \Omega) = \int_{\partial^* E} \phi(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) + \lambda |\Omega \setminus E| \tag{2.3}$$

dove

$$\phi(x) = 1 - \alpha \chi_{\partial^* \Omega}(x) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{se } x \in \partial^* \Omega, \\ 1 & \text{altrimenti}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Notiamo che, essendo $E \subset \Omega$:

(2.5) $$\nu_E(x) = \nu_\Omega(x) \qquad \forall x \in \partial^* E \cap \partial^* \Omega .$$

Vale allora il seguente

TEOREMA 2. *Per ogni $\lambda > 0$, il funzionale F_λ ammette minimo fra i sottoinsiemi di Ω. Se G_λ è un tale minimo, allora*

(2.6) $$\partial G_\lambda \cap G_\lambda(0) = \emptyset .$$

Inoltre, per $\lambda \uparrow +\infty$ vale (come nel Teorema 1):

(2.7) $$G_\lambda \uparrow \Omega ;$$

(2.8) $$P(G_\lambda) \uparrow P(\Omega) ;$$

(2.9) $$P(\Omega \setminus G_\lambda) \to 0 .$$

Finalmente, se Ω è limitato si ha pure

(2.10) $$\partial G_\lambda \to \partial \Omega \quad \textit{nella metrica di Hausdorff.}$$

La dimostrazione viene suddivisa in alcuni Lemmi e Osservazioni.

LEMMA 1. *Il funzionale*

(2.11) $$F(E,A) = \int_{\partial^* E \cap A} \phi(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

definito per E di perimetro finito in $\boldsymbol{R}^n$, A aperto di $\boldsymbol{R}^n$ e con ϕ come in (2.4), *è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\phi_1 : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ semicontinua inferiormente e non negativa e sia $E_h \to E$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ (E_h, E sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}^n$ di perimetro finito, $\lim_{h\to\infty} \int_{A'} |\chi_{E_h}(x) - \chi_E(x)|\, dx = 0 \quad \forall A' \subset\subset A$); allora, indicato con A_t l'aperto $\{x \in A : \phi_1(x) > t\}$, si ha

$$\int_{\partial^* E \cap A} \phi_1(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_0^{+\infty} P(E, A_t)\, dt \le \liminf_{h\to\infty} \int_0^{+\infty} P(E_h, A_t)\, dt = \\ = \liminf_{h\to\infty} \int_{\partial^* E_h \cap A} \phi_1(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

grazie alla (2.1), alla semicontinuità del perimetro e al lemma di Fatou. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* \Omega) = P(\Omega) < +\infty$, sarà possibile trovare un chiuso $K \subset \partial^* \Omega$ tale che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* \Omega \setminus K) < \varepsilon$ (cfr. [4, Teor. 1.6]). Scegliendo $\phi_1(x) = 1 - \alpha \chi_K(x)$, da quanto precede otteniamo:

$$\int_{\partial^* E \cap A} \phi(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \le \int_{\partial^* E \cap A} \phi_1(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \le \liminf_{h\to\infty} \int_{\partial^* E_h \cap A} \phi_1(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \le \\ \le \liminf_{h\to\infty} \int_{\partial^* E_h \cap A} \phi(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) + \alpha\varepsilon .$$

La tesi segue dall'arbitrarietà di ε. ■

OSSERVAZIONE 1. È chiaro che $0 \leq \inf\{F_\lambda(E) : E \subset \Omega\} \leq F_\lambda(\emptyset) = \lambda|\Omega| < +\infty$ e che $F_\lambda(E) \leq c$ implica $P(E) \leq c + \alpha P(\Omega)$. L'esistenza di minimi di F_λ segue allora dal Lemma 1 e da noti risultati di compattezza.

LEMMA 2. *Se $F(E, A)$ è come in (2.11), se $B = B_{x,\rho}$ è una palla aperta di $\boldsymbol{R}^n$ e se G_λ è un minimo di F_λ, allora $F(G_\lambda, B) \leq F(E, B) + \lambda\omega_n^{1/n}\rho|G_\lambda \setminus E|^{(n-1)/n}$ per ogni E di perimetro finito tale che $E \subset G_\lambda$ e $G_\lambda \setminus E \subset\subset B$.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo, per ogni E siffatto, $F_\lambda(G_\lambda) \leq F_\lambda(E)$ si ha:

$$\int_{\partial^* G_\lambda \cap B} \phi(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leq \int_{\partial^* E \cap B} \phi(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) + \lambda|G_\lambda \setminus E|$$

con $|G_\lambda \setminus E| \leq |B|^{1/n}|G_\lambda \setminus E|^{(n-1)/n}$, da cui la tesi. ■

OSSERVAZIONE 2. La (2.6) segue subito dal Lemma 2 scegliendo ρ sufficientemente piccolo e utilizzando il Teor. 3 di [1].

LEMMA 3. *Se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ e se G_i minimizza F_{λ_i} $(i = 1, 2)$, allora $G_1 \subset G_2$ e $P(G_1) \leq P(G_2)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi abbiamo $F_{\lambda_1}(G_1) + F_{\lambda_2}(G_2) \leq F_{\lambda_1}(G_1 \cap G_2) + F_{\lambda_2}(G_1 \cup G_2)$ da cui, ponendo $B_t = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \phi(x) > t\}$ otteniamo (come nella dimostrazione del Lemma 1):

$$\int_0^{+\infty} [P(G_1, B_t) + P(G_2, Bt) - P(G_1 \cap G_2, B_t) - P(G_1 \cup G_2, B_t)]\, dt \leq (\lambda_1 - \lambda_2)|G_1 \setminus G_2| .$$

Grazie alla subadditività del perimetro (cfr. [6, (15.1)]), il termine a sinistra è non negativo, e quindi $G_1 \subset G_2$. Infine, da $F_{\lambda_1}(G_1) \leq F_{\lambda_1}(G_2)$ segue subito $P(G_1) \leq P(G_2)$. ■

OSSERVAZIONE 3. Confrontando un minimo G_λ di F_λ con Ω otteniamo $\forall \lambda > 0$:

$$\int_{\partial^* G_\lambda} \phi(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) + \lambda|\Omega \setminus G_\lambda| \leq (1 - \alpha)\, P(\Omega) \tag{2.12}$$

da cui

$$\lim_{\lambda \to \infty} |\Omega \setminus G_\lambda| = 0$$

che, con il Lemma 3, prova la (2.7). Ricordando che $\phi \geq 1 - \alpha$, cfr. (2.4), dalla (2.12) segue inoltre $P(G_\lambda) \leq P(\Omega)$; dalla (2.7) si ha quindi

$$\lim_{\lambda \to \infty} P(G_\lambda) = P(\Omega) ,$$

grazie alla semicontinuità del perimetro. Con il Lemma 3, questo completa la dimostrazione della (2.8). Sempre dalla (2.12) si ottiene

$$(1 - \alpha)\, P(\Omega) \geq \liminf_{\lambda \to \infty} P(G_\lambda) - \alpha \liminf_{\lambda \to \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* G_\lambda \cap \partial^* \Omega)$$

da cui, per quanto appena visto:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* G_\lambda \cap \partial^* \Omega) = P(\Omega) . \tag{2.13}$$

La (2.9) segue allora combinando le (2.8), (2.13) con la relazione $P(\Omega \setminus E) = P(\Omega) + P(E) - 2\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap \partial^* \Omega)$ valida per ogni $E \subset \Omega$ di perimetro finito (come si verifica facilmente, utilizzando la (4.49) di [3], e ricordando le (2.2) e (2.5)).

LEMMA 4. *Se* $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ *e se* E_1 *minimizza* $\hat{F}_{\lambda_1}$ *(definito nella* (1.1)) *e* G_2 *minimizza* F_{λ_2} *(definito nella* (2.3)), *allora* $E_1 \subset G_2$.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi abbiamo $\hat{F}_{\lambda_1}(E_1) + F_{\lambda_2}(G_2) \leq \hat{F}_{\lambda_1}(E_1 \cap G_2) + F_{\lambda_2}(E_1 \cup G_2)$; semplificando e usando la subadditività del perimetro si conclude facilmente (come nella dimostrazione del Lemma 3) che $0 \leq (\lambda_1 - \lambda_2)|E_1 \setminus G_2|$, da cui la tesi. ■

OSSERVAZIONE 4. Quando Ω è limitato la convergenza $\partial E_\lambda \to \partial \Omega$ nella metrica di Hausdorff è stata dimostrata in [11, Teor. (2.3)], cfr. (1.5). Usando il Lemma 4, è immediato estendere tale risultato ai minimi G_λ di F_λ.

La dimostrazione del Teorema 2 è così conclusa.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CONGEDO - I. TAMANINI, *Note sulla regolarità dei minimi di funzionali del tipo dell'area.* Rend. Accad. Naz. XL, 106, vol. XII, fasc. 17, 1988, 239-257.

[2] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni.* Ann. Mat. Pura Appl., 36, 1954, 191-213.

[3] E. DE GIORGI - F. COLOMBINI - L. PICCININI, *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate.* Editrice Tecnico Scientifica, Pisa 1972.

[4] K. J. FALCONER, *The geometry of fractal sets.* Cambridge University Press, 1985.

[5] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1969.

[6] E. GIUSTI, *Minimal surfaces and functions of bounded variation.* Birkhäuser, Boston - Basel - Stuttgart 1984.

[7] U. MASSARI - M. MIRANDA, *Minimal surfaces of codimension one.* North-Holland, Amsterdam 1984.

[8] U. MASSARI - L. PEPE, *Sull'approssimazione degli aperti lipschitziani in* $\mathbf{R}^n$ *con varietà differenziabili.* Boll. Un. Mat. Ital., 10, 1974, 532-544.

[9] T. QUENTIN DE GROMARD, *Approximation forte dans* $BV(\Omega)$. C. R. Acad. Sc. Paris, 301, (6), 1985, 261-264.

[10] W. F. PFEFFER, *The Gauss-Green Theorem.* Advances in Mathematics, to appear.

[11] I. TAMANINI - C. GIACOMELLI, *Approximation of Caccioppoli sets, with applications to problems in image segmentation.* Ann. Univ. Ferrara, to appear.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Trento
38050 Povo (TN)