Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Enrico Magenes

Su alcune questioni connesse con il problema di derivata obliqua regolare per le funzioni armoniche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.3, p. 195–202.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_3_195_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1: 195-202 (1990)

Equazioni a derivate parziali. — *Su alcune questioni connesse con il problema di derivata obliqua regolare per le funzioni armoniche.* Nota (*) del Corrisp. Enrico Magenes.

Abstract. — *On the regular oblique derivative problem for harmonic functions.* Regular oblique derivative problem and mixed Dirichlet-regular oblique derivative problem for the harmonic functions in a domain of $\boldsymbol{R}^3$ and the related L^2 completeness questions, already studied in a previous paper, are again considered and a new proof of a uniqueness theorem is given.

Key words: Partial differential equations; Harmonic function; Regular oblique derivative problem.

Riassunto. — Vengono riconsiderati il problema di derivata obliqua regolare e quello misto di Dirichlet-derivata obliqua regolare per le funzioni armoniche in un dominio di $\boldsymbol{R}^3$ e le questioni di completezza hilbertiana connesse già studiate in un precedente lavoro e viene data una nuova dimostrazione di un teorema di unicità.

In un recente lavoro [3] A. Cialdea ha studiato il problema di derivata obliqua regolare (*d.o.r.*) per le funzioni armoniche in un dominio limitato $\mathcal{D}$ di $\boldsymbol{R}^n$ e le questioni connesse di «completezza» sulla frontiera $\mathcal{F}$ di $\mathcal{D}$ del sistema delle derivate oblique dei polinomi armonici omogenei ed è pervenuto, mediante lo studio di un nuovo tipo di equazioni integrali singolari, a risultati della massima generalità, stabilendo detta «completezza» sia negli spazi $L^p(\mathcal{F})$, per ogni p con $1 < p < \infty$, sia in $C^0(\mathcal{F})$. Il lavoro di Cialdea mi ha suggerito di rivedere una mia memoria del 1955 [6], nella quale nel caso hilbertiano, cioè in $L^2(\mathcal{F})$, avevo studiato lo stesso problema di *d.o.r.* e quello misto di Dirichlet-*d.o.r.* in un dominio di $\boldsymbol{R}^3$ con le relative questioni di «completezza», seguendo il metodo di M. Picone (cf. ad es. [10, 11]) di traduzione dei problemi al contorno per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine in sistemi di equazioni del tipo di Fischer-Riesz, mediante l'uso della «formula di Green». Con questo stesso metodo i problemi di Dirichlet, di Neumann e di tipo misto Dirichlet-Neumann erano allora già stati trattati da L. Amerio [1], che aveva dimostrato il «teorema di inversione della formula di Green», con dati addirittura in $L^1(\mathcal{F})$, e determinato sistemi di funzioni che portano alla suddetta traduzione in sistemi di Fischer-Riesz, e da G. Fichera [4], che aveva dimostrato la «completezza» in $L^2(\mathcal{F})$ di questi sistemi di funzioni. Nell'intento di estendere, in ambito $L^2(\mathcal{F})$, i risultati di Amerio e di Fichera al caso dei problemi di *d.o.r.* e di tipo misto Dirichlet-*d.o.r.*, io mi sono servito in [6] essenzialmente di due idee: utilizzare da una parte i risultati di S. G. Mihlin [7] sul prolungamento degli operatori integrali lineari singolari negli spazi di tipo L^2 e dall'altra rappresentare le soluzioni del problema di *d.o.r.* non con i classici potenziali di

(*) Presentata nella seduta del 21 aprile 1990.

semplice strato ma mediante i cosidetti «potenziali» di C. W. Oseen [9] e di G. Giraud [5]. Nel corso del lavoro ho dato un teorema di unicità per il problema di Dirichlet nella classe dei predetti «potenziali» di Oseen-Giraud, di cui però ho indicato (cf. [6, *Osservazione*, p. 156]) una dimostrazione non corretta. Mi è sembrato perciò opportuno far vedere come questo teorema di unicità si possa dimostrare con tecniche hilbertiane del tipo di quelle già da me utilizzate in [6] (teor. VII del n. 5) e che si riducono in sostanza a verificare la validità nella classe considerata di una relazione integrale suggerita dalla formula di Green. Da questa stessa relazione integrale seguono poi anche tutti i teoremi di unicità che permettono di risolvere, sia pure limitatamente allo spazio $L^2(\mathcal{F})$, le questioni di completezza connesse non solo con il problema di *d.o.r.*, ma anche con il problema misto di Dirichlet-*d.o.r.*

1. Per comodità del lettore, dovendo fare frequente riferimento a [6], seguirò la nomenclatura e le notazioni ivi usate. Sia $\mathcal{D}$ un dominio (cioè la chiusura di un aperto) limitato dello spazio $\boldsymbol{R}^3$ (di cui indicheremo con $P=(x,y,z)$ il punto generico). Supporremo $\mathcal{D}$ a connessione superficiale finita, con frontiera $\mathcal{F}$ dotata di piano tangente e curvature continue. Per ogni M di $\mathcal{F}$ sia definito un asse l non situato sul piano tangente a $\mathcal{F}$ in M e penetrante in $\mathcal{D}$; inoltre i coseni direttori di l siano funzioni di classe 1 del punto M su $\mathcal{F}$. Se u e v sono due funzioni sufficientemente regolari in $\mathcal{D}$, per es. di classe 2 in $\mathcal{D}$, è valida la seguente formula di Green (v. [10, p. 739], [8, p. 12]):

$$(1)\qquad \int_{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\cos(l,n)}u\frac{dv}{dl^*}-\frac{1}{\cos(l,n)}v\frac{du}{dl}+\beta^{(l)}uv\right)d\sigma=\int_{\mathcal{D}}(v\Delta_2 u-u\Delta_2 v)\,d\tau$$

dove n è la normale a $\mathcal{F}$ orientata verso l'interno di $\mathcal{D}$, l^* è l'asse «coriflesso» di l rispetto all'operatore di Laplace Δ_2 e $\beta^{(l)}$ una opportuna funzione [1] del punto M su $\mathcal{F}$ dipendente da l.

Indichiamo ora con Γ la classe delle coppie di funzioni $(\mu(M),\, \delta(M))$ di quadrato

[1] Seguo qui la nomenclatura del Picone [10, p. 739 e s.]; l^* è in definitiva l'asse simmetrico rispetto alla normale n a $\mathcal{F}$; $\beta^{(l)}$ risulta ora definito da

$$\beta^{(l)}=(\sqrt{EG-F^2})^{-1}\{\partial(\alpha_x^{(l)},x)/\partial(\xi,\eta)+\partial(\alpha_y^{(l)},y)/\partial(\xi,\eta)+\partial(\alpha_z^{(l)},z)/\partial(\xi,\eta)\}$$

dove, supposta la $\mathcal{F}$ data nell'intorno di M mediante la rappresentazione parametrica $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$, $z=z(\xi,\eta)$, E, F, G sono i noti operatori differenziali e

$$\alpha_x^{(l)}=\frac{1}{\cos(l,n)}\begin{vmatrix}\cos(z,n) & \cos(y,n)\\ \cos(z,l) & \cos(y,l)\end{vmatrix};$$

$$\alpha_y^{(l)}=\frac{1}{\cos(l,n)}\begin{vmatrix}\cos(x,n) & \cos(z,n)\\ \cos(x,l) & \cos(z,l)\end{vmatrix};$$

$$\alpha_z^{(l)}=\frac{1}{\cos(l,n)}\begin{vmatrix}\cos(y,n) & \cos(x,n)\\ \cos(y,l) & \cos(x,l)\end{vmatrix}.$$

sommabile su $\mathcal{F}$ e tali inoltre che risulti verificata per ogni punto P esterno a $\mathcal{D}$ la

$$(2)\qquad \iint_{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\mu(Q)}{\cos(l_Q, n_Q)} \frac{dF(Q,P)}{dl_Q^*} - \frac{\delta(Q)}{\cos(l_Q, n_Q)} F(Q,P) + \beta^{(l)}(Q)\mu(Q)F(Q,P) \right\} d\sigma_Q = 0$$

dove $F(Q,P) = 1/\overline{QP}$ è la soluzione fondamentale dell'equazione $\Delta_2 u = 0$. Il risultato più importante relativo alla classe Γ è il seguente teorema, che estende ai problemi di *d.o.r.*, limitatamente al caso dei dati μ e δ in $L^2(\mathcal{F})$, il teorema di Amerio [1].

Teorema 1. (di inversione della formula di Green). *Se* (μ, δ) *appartiene a* Γ, *la funzione* $w(P)$ *definita da*

$$(3)\qquad 4\pi w(P) =$$

$$= \iint_{\mathcal{F}} \left\{ \frac{\mu(Q)}{\cos(l_Q n_Q)} \frac{dF(Q,P)}{dl_Q^*} - \frac{\delta(Q)}{\cos(l_Q, n_Q)} F(Q,P) + \beta^{(l)}(Q)\mu(Q)F(Q,P) \right\} d\sigma_Q$$

è armonica in $\mathcal{D} - \mathcal{F}$ *e soddisfa alle*

$$(4)\qquad \lim_{P\to M(\mathrm{su}\, n_M)} w(P) = \mu(M); \qquad \lim_{P\to M(\mathrm{su}\, n_M)} \frac{dw(P)}{dl_M} = \delta(M)$$

per quasi-tutti gli M *di* $\mathcal{F}$.

Per dimostrare questo teorema, senza affrontare direttamente lo studio del comportamento della derivata obliqua del potenziale di semplice strato e del potenziale di doppio strato obliquo nelle ipotesi di dati (densità e momento) di quadrato sommabile su $\mathcal{F}$, io ho cercato in [6] di utilizzare anzitutto i lavori di C. W. Oseen [9] e di G. Giraud [5], che avevano studiato il problema di *d.o.r.*, nelle ipotesi di dati hölderiani su $\mathcal{F}$, senza far uso di integrali principali e di equazioni integrali singolari, bensì traducendo detto problema in equazioni integrali ordinarie di tipo Fredholm. Oseen e Giraud hanno cercato infatti la soluzione non più come potenziale di semplice strato, bensì nella forma

$$(5)\qquad u(P) = \int_{\mathcal{F}} \varphi(Q)H(Q,P)\,d\sigma_Q, \qquad P \in \mathcal{D} - \mathcal{F}$$

dove il nucleo $H(Q,P)$ differisce dalla soluzione fondamentale, pur presentando con essa alcune analogie di comportamento; in particolare esso dipende anche dalla direzione l_Q. Noi rinviamo a [9, n. 3] (Oseen tratta proprio il caso delle funzioni armoniche; per le equazioni di tipo ellittico generale si veda Giraud [5]) per la definizione di questo nucleo in ipotesi generali sul dominio $\mathcal{D}$, osservando però che le ipotesi da noi fatte su $\mathcal{D}$ rientrano in quelle considerate da Oseen. Ci limiteremo a darne la costruzione esplicita nel caso che in ogni punto M di $\mathcal{F}$ l'asse opposto a l non abbia alcun punto comune con $\mathcal{D}$ tranne M (per es. se $\mathcal{D}$ è convesso), onde mettere in evidenza più facilmente le proprietà che ci interessano e che sono comunque verificate anche nel caso generale. Nel caso particolare ora detto $H(Q,P)$ ha la seguente forma:

$$H(Q,P)=\vec{n}_Q\cdot(\vec{l}_Q+\vec{r}_{QP})/2\pi\cdot\overline{QP}\cdot(1+\vec{l}_Q\cdot\vec{r}_{QP}),\qquad Q\in\mathcal{F},\ P\in\mathcal{D},\ P\neq Q \tag{6}$$

dove $\vec{n}_Q$ e $\vec{l}_Q$ sono i vettori unitari rispettivamente sulla normale n e sull'asse obliquo l nel punto Q e $\vec{r}_{QP}$ è il vettore unitario su $\overrightarrow{QP}$ (vettore orientato di primo estremo Q e secondo estremo P). Dalla (6) seguono le proprietà seguenti

(7) $H(Q,P)$ è continua in (P,Q), purché $P\neq Q$;

(8) per ogni Q fissato su $\mathcal{F}$, $H(Q,P)$ è funzione armonica di P in $\mathcal{D}-\mathcal{F}$;

(9) esistono due costanti positive m e M tali che $m/\overline{QP}\leqq H(Q,P)\leqq M/\overline{QP}$

$$\partial H(Q,P)/\partial_p l_Q=(2\pi)^{-1}\,\partial F(Q,P)/\partial_P n_Q\,. \tag{10}$$

Per ogni P in $\mathcal{D}-\mathcal{F}$ e ogni $\varphi\in L^2(\mathcal{F})$ possiamo dunque considerare l'integrale (6), che risulta al variare di P una funzione armonica in $\mathcal{D}-\mathcal{F}$ e di quadrato sommabile in $\mathcal{D}$. Otteniamo così al variare di φ in $L^2(\mathcal{F})$ una classe di funzioni che indicheremo con $\{u\}$.

Si ha inoltre che se φ è hölderiana su $\mathcal{F}$ allora $u(P)$ è di classe 1 in tutto $\mathcal{D}$ e risulta:

$$\lim_{P\to M}u(P)=\int_{\mathcal{F}}\varphi(Q)H(Q,M)\,d\sigma_Q \tag{11}$$

ed inoltre si comporta rispetto alla derivazione secondo l'asse l come il potenziale di semplice strato rispetto alla normale: precisamente

$$\lim_{P\to M(\mathrm{su}\,n_M)}\frac{du(P)}{dl_M}=-\varphi(M)+\int_{\mathcal{F}}\varphi(Q)K(Q,M)\,d\sigma_Q \tag{12}$$

con $K(Q,M)$ funzione continua per M e Q su $\mathcal{F}$ e $M\neq Q$ e tale che

$$|K(Q,M)|\leq C/\overline{MQ} \tag{13}$$

dove C è una costante opportuna indipendente da M e da Q. I nuclei $K(Q,M)$ e $H(Q,M)$ sono dunque sommabili su $\mathcal{F}$ e gli integrali nelle (11) e (12) sono integrali ordinari.

Orbene le (11) e (12) hanno significato anche se φ è di quadrato sommabile su $\mathcal{F}$: precisamente per quasi-tutti gli M di $\mathcal{F}$ esistono gli integrali

$$\int_{\mathcal{F}}\varphi(Q)H(Q,M)\,d\sigma_Q \quad\text{e}\quad \int_{\mathcal{F}}\varphi(Q)K(Q,M)\,d\sigma_Q$$

e valgono le (11), (12) quando $P\to M$ lungo n_M. Ciò può ottenersi in modo analogo a quello col quale si ottengono gli analoghi risultati per la teoria generalizzata del potenziale di semplice strato nel caso $l\equiv n$ su $\mathcal{F}$, tenendo presenti le proprietà del nucleo $H(Q,P)$ (si vedano le tecniche usate in [1] e [4]). Dunque possiamo dire che per ogni funzione $u(P)$ della classe $\{u\}$ esistono per quasi-tutti gli M di $\mathcal{F}$ i limiti

$$\lim_{P\to M(\text{su } n_M)} u(P) = \mu(M); \qquad \lim_{P\to M(\text{su } n_M)} \frac{du(P)}{dl_M} = \delta(M) \tag{14}$$

con

$$\mu(M) = \int_{\mathcal{F}} \varphi(Q) H(Q,M)\, d\sigma_Q; \qquad \delta(M) = -\varphi(M) + \int_{\mathcal{F}} \varphi(Q) K(Q,M)\, d\sigma_Q. \tag{15}$$

Inoltre per un noto lemma (cf. ad es. [4, teor. XIV]), in virtù delle (8) e (13) le funzioni μ e δ sono di quadrato sommabile su $\mathcal{F}$.

2. La classe Γ e la classe $\{u\}$ sono legate tra di loro dai seguenti due teoremi (cf. [6, teor. V e teor. VI]):

Teorema 2. *Per ogni funzione u di* $\{u\}$ *la coppia* (μ, δ) *data dalla* (15) *appartiene a* Γ.

Teorema 3. *Se* (μ, δ) *appartiene a* Γ *esiste una e una sola funzione u di* $\{u\}$ *per la quale le funzioni date dalla* (15) *coincidono rispettivamente con* μ *e* δ.

La dimostrazione del teorema 2 è semplice (cf. [6]). Più complessa (cf. sempre [6]) è invece quella del teorema 3; essa comporta tra l'altro l'uso dei risultati di S. G. Mihlin [7] sul prolungamento degli operatori integrali lineari singolari negli spazi L^2. Inoltre è proprio in questa dimostrazione che in [6] viene usato un teorema di unicità per il problema di Dirichlet nella classe $\{u\}$ e precisamente la seguente proposizione:

(16) *se u appartiene a* $\{u\}$ *e la funzione* μ *ad essa associata dalle* (14) *è* q.d. *nulla su* $\mathcal{F}$, *allora* $u \equiv 0$ *in* $\mathcal{D} - \mathcal{F}$.

La dimostrazione indicata nell'*Osservazione* di pag. 156 di [6] non è corretta. Vogliamo qui darne una corretta che si basa sulla validità in $\{u\}$ della relazione integrale seguente:

Teorema 4. *Se u appartiene a* $\{u\}$, *vale la relazione*

$$-\int_{\mathcal{F}} \frac{v\mu\delta}{\cos(l,n)}\, d\sigma = \int_{\mathcal{D}} v |\operatorname{grad} u|^2\, d\tau \tag{17}$$

dove μ *e* δ *sono date dalle* (15) *e v è l'autosoluzione continua e positiva in* $\mathcal{D}$ *del problema* (cf. [2]).

$$\Delta_2 v = 0 \quad \textit{in } \mathcal{D} - \mathcal{F}, \qquad [\cos(l,n)]^{-1} dv/dl^* + \beta^{(l)} v = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}. \tag{18}$$

Dimostrazione. Si osservi anzitutto che, se v e u sono funzioni armoniche in $\mathcal{D} - \mathcal{F}$ e di classe 1 in $\mathcal{D}$, dalla formula di Green (1), scritta per v e u^2, si ricava che vale la seguente relazione integrale:

$$(19)\quad -2\int_{\mathcal{F}} \frac{vu}{\cos(l,n)}\frac{du}{dl}\,d\sigma = -\int_{\mathcal{F}} u^2\left\{\frac{1}{\cos(l,n)}\frac{dv}{dl^*}+\beta^{(l)}v\right\}d\sigma + 2\int_{\mathcal{D}} v|\mathrm{grad}\,u|^2\,d\tau.$$

Sia ora u data in $\{u\}$ e dunque data da

$$(20)\qquad u(P)=\int_{\mathcal{F}} \varphi(Q)H(Q,P)\,d\sigma_Q, \qquad \text{con } \varphi\in L^2(\mathcal{F}).$$

Si consideri una successione di funzioni φ_k, $k=1,2,\ldots$ hölderiane su $\mathcal{F}$ e convergente a φ in $L^2(\mathcal{F})$; allora le funzioni

$$(21)\qquad u_k(P)=\int_{\mathcal{F}} \varphi_k(Q)H(Q,P)\,d\sigma_Q$$

sono di classe 1 in $\mathcal{D}$ e ad esse si può dunque applicare la (19), prendendo come v l'autosoluzione predetta di (18).

Si ottiene dunque

$$(22)\qquad -\int_{\mathcal{F}} \frac{v\mu_k\delta_k}{\cos(l,n)}\,d\sigma = \int_{\mathcal{D}} v|\mathrm{grad}\,u_k|^2\,d\tau$$

dove μ_k e δ_k sono le funzioni associate a φ_k mediante le (15). Si può passare al limite per $k\to\infty$ in (22), osservando che:

a) μ_k e δ_k convergono in $L^2(\mathcal{F})$ rispettivamente a μ e δ, in virtù della (15) e del lemma già ricordato (cf. ad es. [4, teor. XIV]);

b) $\mathrm{grad}\,u_k(P)$ converge a $\mathrm{grad}\,u(P)$ per ogni P in $\mathcal{D}-\mathcal{F}$;

c) accanto alle (22) valgono anche, per ogni k e h interi, le

$$-\int_{\mathcal{F}} \frac{v(\mu_k-\mu_h)(\delta_k-\delta_h)}{\cos(l,n)}\,d\sigma = \int_{\mathcal{D}} v|\mathrm{grad}\,(u_k-u_h)|^2\,d\tau.$$

Si ottiene così la (17). Si osservi inoltre che dalla (17) segue che $|\mathrm{grad}\,u|$ è di quadrato sommabile in $\mathcal{D}$.

Dal teorema 4 si ricava poi subito la (16). Risulta così completamente dimostrato anche il teorema 3 (cioè il teor. VI di [6]).

Ne segue poi facilmente, con ragionamenti adoperati in [6, pp. 157-158], il teorema 1, risultando in particolare

$$(23)\qquad w(P)=u(P)\quad \text{per ogni } P \text{ di } \mathcal{D}-\mathcal{F}$$

dove w è la funzione data dalla (3) e u è quella associata a (μ,δ) dal teorema 3.

Ed infine dai teoremi 3 e 4 e dalla (23) si ottiene il seguente risultato, da cui segue in particolare il teor. VII di [6].

TEOREMA 5. *Se* (μ, δ) *appartiene a* Γ *allora si ha*

$$-\int_{\mathcal{F}} \frac{v\mu\delta}{\cos(l,n)}\,d\sigma = \int_{\mathcal{D}} v|\operatorname{grad} w|^2\,d\tau$$

dove w *è data dalla* (3).

3. A questo punto i teoremi di «completezza» in $L^2(\mathcal{F})$, connessi con il problema di *d.o.r.* e con il problema misto di Dirichlet-*d.o.r.* si ottengono, come è indicato in [6, n. 6] seguendo i ragionamenti di Amerio [1] e Fichera [4] per il caso $l \equiv n$ su $\mathcal{F}$. Valgono dunque i teor. VIII, IX e X di [6]; in particolare, se $\boldsymbol{R}^3 - \mathcal{D}$ è anche connesso e indichiamo con $\{v_r\}$, $r = 1, 2, \dots$, il sistema dei polinomi armonici omogenei, otteniamo i due seguenti risultati:

TEOREMA 6. *Il sistema* $\{[\cos(l,n)]^{-1}\,dv_r/dl^*\}$ *non è hilbertianamente completo su* $\mathcal{F}$ *e solo la funzione* μ_0, *autosoluzione hölderiana dell'equazione integrale singolare* (cf. [2])

$$-2\pi\mu_0(P) + \int_{\mathcal{F}}^{*} \frac{\mu_0(Q)}{\cos(l_Q, n_Q)}\,\frac{dF(Q,P)}{dl_Q^*}\,d\sigma_Q = 0,$$

è ortogonale a tutte le funzioni del sistema.

TEOREMA 7. *Decomposto* $\mathcal{F}$ *in due insiemi* $\mathcal{F}_1$ *e* $\mathcal{F}_2$ *disgiunti e di misura positiva, il sistema dei vettori di componenti* $\{-v_r/\cos(l,n)\}$ *su* $\mathcal{F}_1$ *e* $\{[\cos(l,n)]^{-1}\,dv_r/dl^* + \beta^{(l)} v_r\}$ *su* $\mathcal{F}_2$ *è hilbertianamente completo nella totalità dei vettori a due componenti di quadrato sommabile rispettivamente su* $\mathcal{F}_1$ *e* $\mathcal{F}_2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. AMERIO, *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* Amer. Jour. of Math., t. 69, 1947, 447-489.

[2] G. BOULIGAND - G. GIRAUD - P. DELENS, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel.* Act. Sci. Ind., Hermann, Paris 1935.

[3] A. CIALDEA, *Sul problema della derivata obliqua per le funzioni armoniche e questioni connesse.* Memorie di Mat. della Acc. Naz. dei XL, 106°, vol. 12, 1989, 181-200.

[4] G. FICHERA, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* Ann. di Mat. pura e appl., s. 4, t. XXVII, 1948, 1-28.

[5] G. GIRAUD, *Nouvelle méthode pour traiter certaines problèmes rélatifs aux équations du type elliptique.* Jour. de Math. pures et appl., s. IX, t. XVIII, 1939, 111-143.

[6] E. MAGENES, *Sul problema di derivata obliqua regolare per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* Ann. di Mat. pura e appl., s. 4, t. XL, 1955, 143-160.

[7] S.G. MIHLIN, *Singular integral equations.* Uspehi Mat. Nausk., (N.S.), 3, n. 3 (25), 1948, 29-112. Trad. inglese nella «Translations» dell'Amer. Mat. Soc., n. 24.

[8] C. MIRANDA, *Partial differential equations of elliptic type.* 2nd revised edition, Springer, Berlin 1970.

[9] C.W. Oseen, *Contributions à la théorie analitique des marées.* Arkiv for Mat. Astr. Fys., b. 25 A. n. 24, 1937, 1-39.

[10] M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore.* Rondinella, Napoli 1940.

[11] M. Picone, *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 2, fasc. 4, 1947, 365-371.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pavia
Corso Strada Nuova, 65 - 27100 Pavia