Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Alberto Corigliano, Claudia Comi

Estensione a leggi costitutive a variabili interne dei teoremi di inadattamento in dinamica strutturale elastoplastica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.3, p. 265–273.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_3_265_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:265-273 (1990)

Meccanica dei solidi. — *Estensione a leggi costitutive a variabili interne dei teoremi di inadattamento in dinamica strutturale elastoplastica.* Nota di ALBERTO CORIGLIANO e CLAUDIA COMI, presentata (*) dal Corrisp. G. MAIER.

ABSTRACT. — *Extension to internal variables constitutive laws of inadaptation theorems in structural elastic-plastic dynamics.* The dynamic non shakedown problem for elastic-plastic nonlinear-hardening structures is dealt with. A necessary and a sufficient condition for shakedown not to occur (ratchetting or alternating plasticity) are proved. Thus earlier results are extended to internal-variable elastic-plastic models which allow for a general nonlinear hardening law.

KEY WORDS: Dynamic; Elastic-plastic; Inadaptation; Nonlinear programming.

RIASSUNTO. — Si considera il problema del mancato adattamento in campo dinamico per strutture elasto-plastiche incrudenti. Si dimostrano una condizione necessaria ed una sufficiente per il verificarsi di fenomeni di inadattamento (plasticità alternata o collasso incrementale) estendendo risultati precedenti ad un'ampia classe di modelli costitutivi a variabili interne in grado di rappresentare comportamenti incrudenti non lineari.

1. INTRODUZIONE

Strutture elastoplastiche soggette a carichi esterni variabili ripetuti possono raggiungere una situazione di crisi o per accumulo di deformazioni plastiche illimitato nel tempo (collasso incrementale, *ratchetting*) o per il ripetersi di deformazioni plastiche di segno opposto (plasticità alternata, *low cycle fatigue*). Entrambi i fenomeni, denominati con il termine di «inadattamento», sono caratterizzati dal tendere all'infinito nel tempo della energia dissipata. L'evenienza alternativa in cui la struttura, dopo sviluppo di deformazioni plastiche, si comporta elasticamente, viene denominata «adattamento» o *shakedown*. La teoria classica dello *shakedown* (cfr. ad esempio [1-3]) si fonda su teoremi che individuano condizioni «statiche» di adattamento [4] e condizioni «cinematiche» di inadattamento [5]. Varie estensioni di questi teoremi, formulati in origine per un continuo elastico-perfettamente plastico soggetto a forze variabili in modo quasi-statico, sono state ottenute con riferimento a legami costitutivi più generali [6-8] e per tenere conto di effetti dinamici [9-14]. In particolare i teoremi di inadattamento sono stati estesi alla dinamica da Corradi-Maier in [12] per continui elastici-perfettamente plastici ed in [13] per sistemi strutturali discreti con legame costitutivo ad incrudimento lineare e superficie di snervamento linearizzata a tratti. Altri importanti risultati sulle condizioni di inadattamento si ritrovano nei lavori di Polizzotto e collaboratori [14, 15].

Questa nota sviluppa un'estensione dei risultati in tema di inadattamento dinamico presentati in [12, 13] ad una più ampia classe di modelli a variabili interne, atti a

(*) Nella seduta del 10 marzo 1990.

descrivere un generico materiale elasto-plastico stabile [16, 17]. In questo ambito, con riferimento a sistemi discretizzati per elementi finiti e descritti in variabili generalizzate, si dimostrano una condizione necessaria ed una sufficiente per il mancato adattamento. Teoremi sull'adattamento dinamico con approccio «statico», allo stesso livello di generalità, sono stati presentati in [11].

NOTAZIONE. Si adotta la notazione matriciale indicando matrici e vettori in grassetto. Una t indica trasposizione ed un punto $\cdot$ derivazione rispetto al tempo.

2. FORMULAZIONE DISCRETIZZATA PER ELEMENTI FINITI DEL PROBLEMA DINAMICO ELASTO-PLASTICO

Si consideri una struttura discretizzata mediante elementi finiti, soggetta a carichi («equivalenti» nel senso della modellazione) variabili nel tempo $\boldsymbol{P}(t)$ ed a condizioni iniziali assegnate.

L'equilibrio dinamico, le condizioni iniziali e la congruenza, nell'ipotesi di piccole deformazioni (linearità geometrica), possono essere espresse nella forma:

$$\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) - \boldsymbol{V}\dot{\boldsymbol{u}}(t)\,, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0\,; \qquad \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0\,, \tag{2a, b}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}(t)\,. \tag{3}$$

Con $\boldsymbol{u}(t)$ si è indicato il vettore di spostamenti nodali; $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{V}$ rappresentano rispettivamente la matrice d'inerzia e la matrice di smorzamento viscoso; $\boldsymbol{C}$ è la matrice di congruenza.

Alle relazioni (1)-(3) si deve aggiungere la legge costitutiva, intesa come legame tra i vettori $\boldsymbol{\sigma}$ ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ di variabili generalizzate (rispettivamente sforzi e deformazioni totali) relativi all'intera struttura. Con il termine di «variabili generalizzate» si intendono variabili che governano attraverso interpolazioni i relativi valori puntuali all'interno degli elementi finiti; sono interpretabili come «medie pesate» dei valori puntuali ed infine sono tali da soddisfare eguaglianze di tipo energetico (si definiscono coppie di variabili generalizzate coniugate, il cui prodotto scalare eguaglia l'integrale sul volume del prodotto scalare dei campi puntuali). Generazione, proprietà ed implicazioni delle variabili generalizzate sono discusse in [18, 19].

Il legame costitutivo, espresso in variabili generalizzate nel senso cui si è sopra accennato, è descritto dalle relazioni che seguono:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{e}\,; \qquad \boldsymbol{\chi} = \partial W(\boldsymbol{\eta})/\partial\boldsymbol{\eta} \tag{5a, b}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \partial\boldsymbol{\phi}^t(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\chi})/\partial\boldsymbol{\sigma}\,\dot{\boldsymbol{\lambda}}\,; \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}} = -\,\partial\boldsymbol{\phi}^t(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\chi})/\partial\boldsymbol{\sigma}\,\dot{\boldsymbol{\lambda}} \tag{6a, b}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\chi}) \leq \boldsymbol{0}\,; \qquad \dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq \boldsymbol{0}\,; \qquad \boldsymbol{\phi}^t\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0 \tag{7a, b, c}$$

$$\dot{D} = \boldsymbol{\sigma}^t\dot{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\chi}^t\dot{\boldsymbol{\eta}} \geq 0\,. \tag{8a, b}$$

La (4) postula l'additività di deformazioni elastiche $\boldsymbol{e}$ e plastiche $\boldsymbol{p}$. L'equazione (5*a*) esprime il legame elastico in cui $\boldsymbol{E}$ è la matrice dei moduli elastici, simmetrica e definita positiva; la (5*b*) definisce le variabili interne statiche $\boldsymbol{\chi}$ come gradienti di un potenziale, funzione delle variabili interne cinematiche $\boldsymbol{\eta}$. Il potenziale $W(\boldsymbol{\eta})$ rappresenta l'energia di deformazione immagazzinata a causa di processi irreversibili avvenuti all'interno del materiale; si assumerà nel seguito che $W(\boldsymbol{\eta})$ sia una funzione convessa.

Le (6) definiscono le leggi evolutive delle variabili $\boldsymbol{p}$ ed $\boldsymbol{\eta}$, per il legame costitutivo associato qui assunto; $\boldsymbol{\lambda}$ è il vettore di moltiplicatori plastici, variabili scalari non decrescenti secondo la relazione (7*b*).

Il dominio elastico corrente è definito dalla (7*a*) che, insieme alle (7*b, c*), individua la condizione di «coerenza» nel senso di Prager della legge di scorrimento. Si ipotizza che le funzioni di snervamento $\phi_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})$, siano differenziabili e convesse negli sforzi e nelle variabili interne; vale pertanto la relazione seguente in cui i simboli con apice e senza indicano due punti generici dello spazio $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})$:

$$\phi_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) - \phi_i(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}') \geq \frac{\partial \phi_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}^t}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}')(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') + \frac{\partial \phi_i}{\partial \boldsymbol{\chi}^t}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}')(\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}') . \tag{9}$$

Le funzioni di snervamento ϕ_i possono essere espresse, senza perdita di generalità, come differenza tra una funzione positivamente omogenea del primo ordine $f_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})$ ed una costante Y_i (limite di snervamento); il teorema di Eulero consente di scrivere:

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) - \boldsymbol{Y} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^t}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})\, \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\chi}^t}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})\, \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{Y} . \tag{10a, b}$$

Le variabili generalizzate $\boldsymbol{\phi}$ e $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\chi}$ ed $\boldsymbol{\eta}$ come pure $\boldsymbol{\sigma}$ ed $\boldsymbol{\varepsilon}$, sono duali nel senso prima precisato.

L'equazione (8*a*) definisce la dissipazione $\dot{\boldsymbol{D}}$ come differenza tra lavoro plastico incrementale ed energia immagazzinata incrementale; la (8*b*) traduce in questo ambito il secondo principio della termodinamica [17]. Si osservi che per l'ipotesi assunta di convessità delle ϕ_i e di validità della legge di normalità (6), tenendo conto delle (7*b, c*), si può ricavare la diseguaglianza:

$$(\boldsymbol{\sigma} - \overline{\boldsymbol{\sigma}})^t \dot{\boldsymbol{p}} - (\boldsymbol{\chi} - \overline{\boldsymbol{\chi}})^t \dot{\boldsymbol{\eta}} \geq 0 \tag{11a}$$

valida per ogni punto $(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{\boldsymbol{\chi}})$ tale che:

$$\boldsymbol{\phi}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{\boldsymbol{\chi}}) \leq \boldsymbol{0} . \tag{11b}$$

Le relazioni precedenti esprimono la legge costitutiva del materiale in variabili generalizzate e quindi la impongono in medie pesate sugli elementi finiti e non localmente. Queste relazioni hanno gli stessi caratteri salienti (normalità, convessità) del legame costitutivo del materiale, elastoplastico, a variabili interne con incrudimento non lineare.

3. Considerazioni preliminari e richiami sull'adattamento

La risposta elasto-plastica dinamica del sistema in termini di tensioni (generalizzate) può essere interpretata come sovrapposizione di due effetti:

$$\sigma(t) = \sigma^e(t) + \sigma^p(t) = \sigma^e(t) + Zp(t) \tag{12a, b}$$

dove Z è una matrice che trasforma le distorsioni nel loro effetto tensionale autoequilibrato $\sigma^p(t)$ e risulta essere simmetrica e semidefinita negativa, dipendente solo dalla rigidezza elastica e dalla geometria del sistema; $\sigma^e(t)$ è definita dalla (12a) stessa e rappresenta la risposta tensionale elasto dinamica del sistema sia ai carichi esterni ed alle condizioni iniziali assegnate, sia alle incognite deformazioni plastiche variabili nell'evoluzione del sistema.

Per la classe di modelli costitutivi qui considerata il fenomeno di adattamento si può identificare con la limitatezza nel tempo dei moltiplicatori plastici λ_i:

$$\lambda_\infty = \lim_{t \to \infty} \lambda(t) < +\infty\,. \tag{13}$$

Questa condizione assicura la limitatezza nel tempo dell'integrale della dissipazione data dalla (8a). Tenendo conto delle (6), (10), (7c), ed assumendo $\lambda(0) = \mathbf{0}$, si ha infatti:

$$D(t) = \int_0^t (\sigma^t \dot{p} - \chi^t \dot{\eta})\, d\tau = \int_0^t f^t(\sigma, \chi)\, \dot{\lambda}\, d\tau = \int_0^t Y^t \dot{\lambda}\, d\tau = Y^t \lambda(t)\,. \tag{14}$$

In [11] si è dimostrato il seguente teorema sull'adattamento, interpretabile come una estensione del teorema di Ceradini [9] alla classe di modelli costitutivi qui considerata.

Condizione necessaria e sufficiente affinché la struttura si adatti quando è soggetta ad una assegnata storia di azioni esterne è che esista un insieme di variabili fittizie $u_0^*, \dot{u}_0^*, p^*, \chi^*$ costanti ed un istante di tempo t^* tali che risulti:

$$\phi(\sigma^{e^*}(t) + Zp^*, \chi^*) \leq \mathbf{0}\,, \qquad \forall t \geq t^*\,. \tag{15}$$

Nella (15) $\sigma^{e^*}(t)$ rappresenta la risposta elasto-dinamica della struttura ai carichi assegnati ed a condizioni iniziali fittizie $u_0^*, \dot{u}_0^*; Zp^*$ indica la risposta statica alle distorsioni costanti fittizie p^*. La dimostrazione di questo enunciato è sviluppata in [11] assumendo nulli gli effetti smorzanti; la proposizione vale inalterata anche in presenza di smorzamento se la matrice V è semidefinita positiva. La condizione sufficiente per l'adattamento si dimostra a partire da una diseguaglianza stretta nella relazione (15); tuttavia, considerando una variazione comunque piccola dei limiti di snervamento, si può assumere la (15) come condizione sufficiente per l'adattamento di una struttura che si discosti infinitamente poco da quella reale.

Si definisce fattore di carico α uno scalare non negativo che amplifica tutte le azioni esterne e le condizioni iniziali assegnate. Il fattore di sicurezza α_s è il massimo valore di α per cui si ha adattamento. In base alla condizione di adattamento enunciata, α_s può essere determinato risolvendo il seguente problema di massimo vincolato:

$$\alpha_s = \max_{\substack{\alpha, p^*, \chi^* \\ u_0^*, \dot{u}_0^*}} \{\alpha\} \tag{16a}$$

con in vincoli:

(16*b*) $$\boldsymbol{\phi}(\alpha\boldsymbol{\sigma}^{e*}(t) + \mathbf{Z}\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{\chi}^*) \le \mathbf{0}\,, \qquad \forall t \ge t^*.$$

Il problema che si ottiene dal (16) fissando le condizioni iniziali fittizie $\boldsymbol{u}_0^*, \dot{\boldsymbol{u}}_0^*$ fornisce un valore ottimale ω che rappresenta un confine inferiore del fattore di sicurezza α_s:

(17*a*) $$\omega = \max_{\alpha, \boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{\chi}^*} \{\alpha\}$$

con i vincoli:

(17*b*) $$\boldsymbol{\phi}(\alpha\boldsymbol{\sigma}^{e*}(t) + \mathbf{Z}\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{\chi}^*) \le \mathbf{0}\,, \qquad \forall t \ge t^*$$

(18) $$\alpha_s \ge \omega\,.$$

Si osserva che, per le ipotesi fatte sul legame costitutivo, il problema di massimo (17) è convesso.

4. Generalizzazione dei teoremi di inadattamento dinamico

Estendendo il concetto di *admissible plastic strain rate cycle* introdotto da Koiter in [5], si definisce come «ciclo di plasticizzazione ammissibile» ogni distribuzione di deformazioni plastiche e variabili interne incrementali $(\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge, \dot{\boldsymbol{\eta}}^\wedge)$ i cui integrali su un intervallo di tempo $t_1 \vdash t_2$ soddisfano le seguenti condizioni:

(19*a, b*) $$\Delta\boldsymbol{p}^\wedge = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{p}}^\wedge(t)\,dt = \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{u}^\wedge; \qquad \Delta\boldsymbol{\eta}^\wedge = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^\wedge(t)\,dt = \mathbf{0}\,.$$

La (19*a*) esprime la congruenza delle deformazioni plastiche $\Delta\boldsymbol{p}^\wedge$ sviluppate in un ciclo ammissibile. Questo implica che gli incrementi di sforzo residuo $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{p\wedge} = \mathbf{Z}\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge$, legati allo sviluppo di deformazioni plastiche incrementali, soddisfino la seguente relazione:

(20) $$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{p\wedge}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{Z}\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge(t)\,dt = \mathbf{0}\,.$$

Le quantità relative ad un ciclo ammissibile saranno nel seguito indicate col simbolo «^».

Nell'ambito di validità delle ipotesi assunte sul legame costitutivo (riconducibili a quelle di stabilità secondo Drucker), in base alla definizione data di «ciclo ammissibile», si forniscono qui di seguito una condizione sufficiente ed una necessaria per l'inadattamento.

Proposizione 1 (condizione sufficiente per l'inadattamento). Si ha inadattamento se per ogni $\boldsymbol{u}_0^*, \dot{\boldsymbol{u}}_0^*, t^*$ e per qualche ciclo ammissibile con $t_1 \ge t^*$ è verificata la diseguaglianza seguente:

(21) $$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^{e*t}(t)\,\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge(t)\,dt > \int_{t_1}^{t_2} \dot{D}(\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge, \dot{\boldsymbol{\eta}}^\wedge)\,dt\,.$$

Dimostrazione. Si supponga, per assurdo, che la struttura si adatti. La condizione necessaria di adattamento, enunciata nel paragrafo 3, assicura l'esistenza di un insieme di variabili fittizie $\boldsymbol{u}_0^*$, $\dot{\boldsymbol{u}}_0^*$, t^*, $\boldsymbol{p}^*$, $\boldsymbol{\chi}^*$ che soddisfano la relazione (15) per ogni $t \geq t^*$. Tale relazione coincide con la (11b) (ponendo $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{e^*}(t) + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^*$ e $\overline{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{\chi}^*$); in base alla (11$a$) si ha quindi per ogni ciclo ammissibile con $t_1 \geq t^*$:

$$(22) \qquad \dot{D}(\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge, \dot{\boldsymbol{\eta}}^\wedge) \geq \boldsymbol{\sigma}^{e^*t}\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge + \boldsymbol{p}^{*t}\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge - \boldsymbol{\chi}^{*t}\dot{\boldsymbol{\eta}}^\wedge .$$

Nella (22) e frequentemente nel seguito non viene indicata la dipendenza dal tempo per brevità di notazione.

Integrando la (22) sull'intervallo di tempo $t_1 \vdash\!\dashv t_2$ con $t_1 \geq t^*$, essendo $\boldsymbol{p}^*$ e $\boldsymbol{\chi}^*$ costanti, si ottiene:

$$(23) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \dot{D}(\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge, \dot{\boldsymbol{\eta}}^\wedge)\, dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^{e^*t}\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge\, dt + \boldsymbol{p}^{*t}\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge\, dt - \boldsymbol{\chi}^{*t}\int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^\wedge\, dt .$$

Gli ultimi due integrali nella (23) sono nulli in base alla definizione data di ciclo ammissibile, la diseguaglianza (23) risulta pertanto in contrasto con l'ipotesi (21) e ciò dimostra la proposizione 1.

Proposizione 2 (condizione necessaria per l'inadattamento). Se si verifica inadattamento, allora per ogni $\boldsymbol{u}_0^*$, $\dot{\boldsymbol{u}}_0^*$, t^* e per qualche ciclo ammissibile con $t_1 \geq t^*$, vale la diseguaglianza:

$$(24) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^{e^*t}(t)\,\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge(t)\, dt > \int_{t_1}^{t_2} \dot{D}(\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge, \dot{\boldsymbol{\eta}}^\wedge)\, dt .$$

Questa proposizione è equivalente al seguente enunciato:

Proposizione 2* (condizione sufficiente per l'adattamento). La struttura si adatta se esiste un insieme di variabili $\overline{\boldsymbol{u}}_0^*$, $\dot{\overline{\boldsymbol{u}}}_0^*$, $\overline{t}^*$ tali che valga la seguente diseguaglianza per ogni ciclo ammissibile con $t_1 \geq \overline{t}^*$:

$$(25) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^{e^*t}(t)\,\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge(t)\, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \dot{D}(\dot{\boldsymbol{p}}^\wedge, \dot{\boldsymbol{\eta}}^\wedge)\, dt .$$

Dimostrazione della proposizione 2*. La dimostrazione viene condotta provando che il fattore di sicurezza di una struttura per la quale sia verificata l'ipotesi (25) è superiore o uguale all'unità. Si consideri il problema di massimo vincolato non lineare convesso espresso dalle (17), relativo alla determinazione di un confine inferiore ω del fattore di sicurezza α_s, in cui le condizioni iniziali fittizie e l'istante di tempo t^* siano fissati ai valori $\overline{\boldsymbol{u}}_0^*$, $\dot{\overline{\boldsymbol{u}}}_0^*$, $\overline{t}^*$. Si ponga $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^{e^*}(t) + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{p}^*$. Il funzionale di Lagrange associato al problema in esame è:

$$(26) \qquad L = -\,\alpha k + \int_{\overline{t}^*}^{t} \boldsymbol{\mu}^t(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*) + \boldsymbol{b})\, d\tau .$$

Nella (26) k è uno scalare positivo, introdotto per ragioni dimensionali, che verrà assunto nel seguito pari all'unità, $\boldsymbol{\mu}$ è un vettore di moltiplicatori di Lagrange, $\boldsymbol{b}$ è un vettore di componenti non negative β_i^2, variabili aggiuntive che trasformano il vincolo (17*b*) in una eguaglianza.

Una soluzione del problema (17) è caratterizzata dall'annullamento della variazione prima di L per ogni variazione di α, p_i^*, χ_i^*, μ_i, β_i e dalla positività della variazione seconda di L, in particolare rispetto a β_i. Imponendo queste condizioni si ottengono le relazioni di Eulero-Lagrange:

$$(27a, b, c) \qquad \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*) \leq \mathbf{0}\,; \qquad \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}\,; \qquad \boldsymbol{\mu}^t \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*) = 0 \qquad \forall \tau \in \bar{t}^{*} \vdash\!\dashv t$$

$$(27d) \qquad \int_{\bar{t}^*}^{t} \boldsymbol{\sigma}^{e*t} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*)\, \boldsymbol{\mu}\, d\tau = 1$$

$$(27e) \qquad \int_{\bar{t}^*}^{t} Z \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*)\, \boldsymbol{\mu}\, d\tau = \mathbf{0}$$

$$(27f) \qquad \int_{\bar{t}^*}^{t} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^t}{\partial \boldsymbol{\chi}} (\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*)\, \boldsymbol{\mu}\, d\tau = \mathbf{0}$$

I vettori:

$$(28a, b) \qquad \dot{\boldsymbol{p}}^{\wedge} = \partial \boldsymbol{\phi}^t(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*)/\partial \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{\mu}; \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\wedge} = -\,\partial \boldsymbol{\phi}^t(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*)/\partial \boldsymbol{\chi}\, \boldsymbol{\mu}$$

definiscono un ciclo ammissibile con $t_1 = \bar{t}^*$, $t_2 = t$, infatti per le (27*e, f*) essi soddisfano la relazioni (19*b*) e (20).

Per ipotesi ogni ciclo ammissibile soddisfa la (25); per il particolare ciclo definito dalle (28*a, b*), tenendo conto delle (27*c*) e (14), la (25) può essere riscritta nel modo seguente:

$$(29) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^{e*t}(t)\, \dot{\boldsymbol{p}}^{\wedge}(t)\, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{Y}^t \boldsymbol{\mu}\, dt\,.$$

Si constata qui di seguito che il secondo membro della (29) può essere identificato (con opportune correzioni dimensionali) con il valore di α che soddisfa le condizioni di Eulero-Lagrange (27), e quindi con il valore ottimale ω del problema convesso (17). Infatti dalla (27*c*), integrata sull'intervallo $t_1 \vdash\!\dashv t_2$, tenendo conto della (10) e della definizione di $\boldsymbol{\sigma}^*$ si ottiene:

$$(30a, b) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\mu}^t \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*)\, dt = \omega \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^{e*t} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*)\, \boldsymbol{\mu}\, d\tau +$$

$$+ \boldsymbol{p}^{*t} \int_{t_1}^{t_2} Z \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*)\, \boldsymbol{\mu}\, d\tau + \boldsymbol{\chi}^{*t} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^t}{\partial \boldsymbol{\chi}} (\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\chi}^*)\, \boldsymbol{\mu}\, d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{Y}^t \boldsymbol{\mu}\, dt = 0\,.$$

Sostituendo nella (30*b*) le relazioni (27*d, e, f*), si ha:

$$(31) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{Y}^t \boldsymbol{\mu}\, dt = \omega\,.$$

Dalle (31), (29) e (27*d*) si deduce infine la seguente diseguaglianza sul valore ottimale del problema (17):

$$\omega \geq \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\sigma}^{e*t} \dot{\boldsymbol{p}}^{\wedge} \, d\tau = 1 \, . \tag{32}$$

Il valore ottimale ω rappresenta un confine inferiore del fattore di sicurezza α_s (relazione (18)) qualunque sia il valore assegnato alle condizioni iniziali fittizie, in particolare in corrispondenza dei valori $\overline{\boldsymbol{u}}_0^*$, $\dot{\overline{\boldsymbol{u}}}_0^*$ per i quali è valida la diseguaglianza (25). Assumendo tali condizioni iniziali fittizie, il valore ottimale del problema (17) soddisfa la (32), il fattore di sicurezza α_s risulta quindi non minore dell'unità e pertanto la struttura si adatta. Con questo viene dimostrata la proposizione 2*. Data l'equivalenza fra le proposizioni 2* e 2, anche quest'ultima (condizione necessaria per l'inadattamento) è provata.

5. Osservazioni conclusive

Relativamente ai risultati esposti, alcune osservazioni appaiono opportune.

(i) La proposizione 1, condizione sufficiente per l'inadattamento, può essere riformulata come condizione necessaria per l'adattamento, analogamente a quanto mostrato in relazione alle proposizioni 2 e 2*.

(ii) La diseguaglianza a cui si fa riferimento negli enunciati delle proposizioni 1 e 2 può essere trasformata, mediante applicazione del principio dei lavori virtuali (cfr. ad esempio [12]), nella forma seguente:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}^* - \boldsymbol{V}\dot{\boldsymbol{u}}^*)^t \, \dot{\boldsymbol{u}}^{p^\wedge} \, dt > \int_{t_1}^{t_2} \dot{D}(\dot{\boldsymbol{p}}^{\wedge}, \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\wedge}) \, dt \, . \tag{33}$$

In tal modo gli enunciati acquistano una forma simile a quella data da Koiter in [5] per il caso statico, qualora si annullino i termini inerziali e di smorzamento e da Corradi e Maier in [12] per il caso dinamico.

(iii) Il confine inferiore ω del fattore di sicurezza α_s può essere determinato anche mediante un problema duale del (17), con funzione obiettivo data dalla (26) e vincoli dalle (27*b, d, e, f*). Per quanto riguarda la dipendenza di α_s dalle condizioni iniziali fittizie (fissate per la determinazione di ω), si può trasferire al presente contesto più generale per leggi costitutive quanto esposto in [12, 13].

(iv) Per specializzazione di quanto esposto in questa nota si possono ritrovare risultati precedenti in tema di inadattamento dinamico:

— nel caso di legame costitutivo perfettamente plastico e facendo riferimento al continuo non discretizzato si ritrovano i teoremi dimostrati per altra via da Corradi-Maier in [12];

— assumendo funzioni di snervamento lineari a tratti ed incrudimento lineare ci si riconduce a quanto mostrato in [13].

Questo studio è parte di un programma di ricerca finanziato dal CNR-GNDT. Il secondo autore ringrazia la Fondazione Confalonieri.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. A. KÖNIG - G. MAIER, *Shakedown analysis of elastoplastic structures: a review of recent developments.* Nuclear Engineering Design, 66, 1981, 81-95.

[2] J. A. KÖNIG, *Shakedown of elastic-plastic structures.* Elsevier, Amsterdam 1987.

[3] C. POLIZZOTTO, *A unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques.* S. M. Archives, 7, 1982, 19-75.

[4] E. MELAN, *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums.* Ing. Arch., 9, 1938, 116-126.

[5] W. T. KOITER, *A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures.* Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet., B 59, 4, 1956, 24.

[6] G. MAIER, *A shakedown matrix theory allowing for work-hardening and second-order geometric effects.* In: A. SAWCZUK (ed.), *Foundation of Plasticity.* Noordhoff, Leyden, 1, 1973, 417-433.

[7] G. MAIER - G. NOVATI, *Deformation bounds for elastic-plastic discrete structures with piecewise linear yield locus and non linear hardening.* In: D. R. J. OWEN, E. HINTON and E. OÑATE (eds.), *Computational Plasticity.* Pineridge Press, Swansea (U.K.) 1987, 17-31.

[8] D. WEICHERT - J. GROSS-WEEGE, *The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition.* Int. J. Mech. Sci., 30, n. 10, 1988, 757-767.

[9] G. CERADINI, *Sull'adattamento dei corpi elastoplastici soggetti ad azioni dinamiche.* Giornale del Genio Civile, n. 415, 1969, 239-258.

[10] G. MAIER - G. NOVATI, *Dynamic shakedown and bounding theory for a class of nonlinear hardening discrete structural models.* Int. J. of Plasticity, in corso di stampa.

[11] C. COMI - A. CORIGLIANO, *Estensione di un teorema sull'adattamento in dinamica elasto-plastica.* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 1, fasc. 2, 1990, 151-159.

[12] L. CORRADI - G. MAIER, *Dynamic non-shakedown theorem for elastic perfectly-plastic continua.* J. of Mech. and Physics of Solids, 22, 1974, 401-413.

[13] L. CORRADI - G. MAIER, *Inadaptation theorems in the dynamics of elastic-workhardening structures.* Ingenieur Archiv., 43, 1973, 44-57.

[14] C. POLIZZOTTO, *Dynamic shakedown by modal analysis.* Meccanica, 19, 1984, 133-144.

[15] T. PANZECA - C. POLIZZOTTO, *On shakedown of elastic-plastic solids.* Meccanica, 23, 1988, 96-101.

[16] B. HALPHEN - Q. S. NGUYEN, *Sur les matériaux standards généralisés.* J. de Mécanique, 14, n. 1, 1975, 39-63.

[17] J. LEMAITRE - J. L. CHABOCHE, *Mécanique des matériaux solides.* Dunod, Paris 1985.

[18] L. CORRADI, *On compatible finite element models for elastic plastic analysis.* Meccanica, 13, 1978, 133-150.

[19] C. COMI - G. MAIER - U. PEREGO, *Generalized variables time integration and extremum theorems in elastoplasticity with internal variables.* In preparazione.

Dipartimento di Ingegneria Strutturale
Politecnico di Milano
Piazza L. da Vinci, 32 - 20133 MILANO