RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

CRISTIANA BONDIOLI

Iterati di operatori differenziali singolari e funzioni ultradifferenziabili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 1 (1990), n.4, p. 293-299.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_4_293_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Analisi matematica. — *Iterati di operatori differenziali singolari e funzioni ultradifferenziabili. I.* Nota di CRISTIANA BONDIOLI, presentata (*) dal Corrisp. E. MAGENES.

ABSTRACT. — *Iterates of singular differential operators and ultradifferentiable functions. I.* In the present paper we define spaces of ultradifferentiable functions of order $s > 1$ by iterating singular differential operators on $]0, +\infty[$ with C^∞ coefficients. A Paley-Wiener type theorem is proved and this allows us to obtain an algebraic isomorphism between these spaces and the space of even Gevrey functions of order $s > 1$ on $\mathbf{R}$.

KEY WORDS: Singular differential operators; Ultradifferentiable functions; Paley-Wiener type theorems.

RIASSUNTO. — In questa *Nota* (cui farà seguito una seconda) si definiscono, tramite iterazione di operatori differenziali singolari su $]0, +\infty[$ a coefficienti C^∞ , spazi di funzioni ultradifferenziabili di ordine $s > 1$. Un teorema di tipo Paley-Wiener qui dimostrato permette di concludere che i suddetti spazi sono algebricamente isomorfi allo spazio delle funzioni di Gevrey, di ordine s , pari su $\mathbf{R}$.

INTRODUZIONE

Il problema degli iterati di operatori differenziali lineari è stato ampiamente studiato nell'ambito di spazi di funzioni analitiche o di Gevrey e con operatori i cui coefficienti sono funzioni analitiche o di Gevrey (si confrontino, ad esempio, Lions - Magenes [8, Ch. 8]; Bolley, Camus e Rodino [3]).

In questo lavoro (suddiviso in una *Nota I* ed in una *Nota II*) si considerano, invece, operatori differenziali lineari singolari su $]0, +\infty[$, a coefficienti C^∞ , tramite i quali, per iterazione, si definiscono spazi funzionali analoghi a quelli di Gevrey di ordine $s > 1$. Gli operatori P in questione sono gli stessi studiati da J. L. Lions in [7], con il metodo delle trasmutazioni, e ripresi da K. Trimèche in [13, 14]; comprendono, come casi particolari, l'operatore di Bessel, l'operatore di Jacobi e la parte radiale dell'operatore di Laplace-Beltrami su uno spazio riemanniano simmetrico non compatto doppiamente transitivo. Nel presente lavoro si prova che ciascuno degli spazi $\mathcal{G}_*^s(P)$ qui introdotti è isomorfo (algebricamente e topologicamente) allo spazio $\mathcal{G}_*^s$ delle funzioni di Gevrey, di ordine s , pari su $\mathbf{R}$.

Più precisamente, nella *Nota I* si caratterizza, tramite un teorema di tipo Paley-Wiener, l'immagine di $\mathcal{G}_*^s(P)$ in una trasformazione di Fourier generalizzata associata all'operatore P (trasformazione introdotta da K. Trimèche in [13]) e si dimostra così che lo spazio di funzioni intere ottenuto coincide con l'immagine di $\mathcal{G}_*^s$ nell'usuale trasformazione di Fourier, immagine che è stata descritta da C. Roumieu in [9] e da H. Komatsu in [6]. Così la composizione di una trasformazione con l'inversa dell'altra fornisce l'isomorfismo cercato.

(*) Nella seduta del 14 giugno 1990.

Nella *Nota II*, con metodo diverso, si studierà questo isomorfismo anche dal punto di vista topologico.

1. — Per le definizioni e i risultati richiamati qui di seguito si fa riferimento ai lavori di K. Trimèche [13, 14], ai quali si rinvia per maggiori particolari.

Si considerano i seguenti spazi funzionali: $\mathcal{D}_* = \{\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}) \mid \varphi \text{ è pari}\}$; $\mathcal{O}_* = \{\varphi \in \mathcal{D}_* \mid \varphi \text{ è a supporto compatto}\}$; $H_*(\mathbf{C}) = \{G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \mid G \text{ è intera, pari ed } \exists R > 0 \text{ tale che } \forall m \in \mathbf{N} \sup_{z \in \mathbf{C}} (1 + |z|^2)^m |G(z)| \exp(-R|Im z|) < +\infty\}$.

Posto $D = d/dx$, sia P il seguente operatore differenziale singolare su $]0, +\infty[$:

$$(1.1) \quad P = (A(x))^{-1} D(A(x) D) - q(x)$$

con A funzione reale definita su $]0, +\infty[$ da $A(x) = x^{2\alpha+1} C(x)$, $C, q \in \mathcal{D}_*$, C strettamente positiva, α reale $> -1/2$ ⁽¹⁾.

Per ogni $z \in \mathbf{C}$ sia Φ_z l'unica autofunzione di P corrispondente all'autovalore $-z^2$ e soddisfacente a $\Phi_z(0) = 1$, $D\Phi_z(0) = 0$.

In [13, 14] K. Trimèche definisce la trasformazione di Fourier generalizzata $\mathcal{F}$, associata all'operatore P :

$$(1.2) \quad \forall z \in \mathbf{C}, \forall \varphi \in \mathcal{O}_* \quad \mathcal{F}\varphi(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) \Phi_z(x) A(x) dx$$

e dimostra che $\mathcal{F}$ è un'applicazione lineare bigettiva tra $\mathcal{O}_*$ e $H_*(\mathbf{C})$.

Per $G \in H_*(\mathbf{C})$, vale la formula di inversione:

$$(1.3) \quad \mathcal{F}^{-1}G(x) = \int_0^{+\infty} G(y) \Phi_y(x) d\mu_1(y) + \int_0^{+\infty} G(iy) \Phi_{iy}(x) d\mu_2(y),$$

essendo μ_1 una misura pari, positiva, temperata su $\mathbf{R}$, μ_2 una misura pari, positiva su $\mathbf{R}$, tale che, $\forall \beta > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \exp(\beta y) d\mu_2(y) < +\infty \quad (\text{cfr. [14, Ch. 4, IV.3, Th. IV.7]}).$$

Per le definizioni seguenti si confronti invece H. Komatsu [6].

Data la successione $k^!^s$ con s reale > 1 , sia $\mathcal{G}^s$ lo spazio delle funzioni φ di $C^\infty(\mathbf{R})$, a supporto compatto, per le quali esistono costanti $\gamma, \Lambda > 0$ (dipendenti da φ) tali che $\forall k \in \mathbf{N}$, vale $\sup_{x \in \mathbf{R}} |D^k \varphi(x)| \leq \gamma \Lambda^k k^!^s$.

In corrispondenza alla successione $k^!^s$, si definisce su $]0, +\infty[$ la funzione associata

⁽¹⁾ Si noti che, per opportuna scelta di $C(x)$ e di $q(x)$, si ottengono l'operatore di Bessel, l'operatore di Jacobi e la parte radiale dell'operatore di Laplace-Beltrami su uno spazio simmetrico di tipo non compatto e rango 1. In quest'ultimo caso, la trasformazione di Fourier generalizzata, definita poco avanti in (1.2), coincide con la trasformazione di Fourier sferica.

$M_s(r) = \sup_{k \in \mathbf{N}} \log(r^k/k!^s)$. Vale allora

$$(1.4) \quad k!^s = \sup_{r>0} r^k \exp(-M_s(r)).$$

L'importanza della funzione associata sta, ad esempio, in un teorema di tipo Paley-Wiener, caratterizzante l'immagine di $\mathcal{G}^s$ nella usuale trasformazione di Fourier $\mathcal{F}_0$ (cfr. [6, Lemma 3.3 e Th. 9.1]; [9, Th. 3]).

2. - Definisco ora, per ogni operatore P del tipo (1.1) e per ogni s reale > 1 , lo spazio delle funzioni ultradifferenziabili rispetto a P , di ordine s :

$$\mathcal{G}_*^s(P) = \{f \in \mathcal{O}_* \mid \exists c, L > 0 \text{ tali che } \forall k \in \mathbf{N} \sup_{x>0} |P^k f(x)| \leq cL^{2k} (2k)!^s\}.$$

Dimostro il seguente teorema di tipo Paley-Wiener per le funzioni di $\mathcal{G}_*^s(P)$.

TEOREMA 2.1. *Una funzione $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ intera pari è la trasformata di Fourier generalizzata (associata all'operatore P) di una funzione f di $\mathcal{G}_*^s(P)$, con $\text{supp } f \subseteq [-R, R]$, se e solo se esistono costanti positive C, b tali che*

$$(2.1) \quad |F(z)| \leq C \exp\{-M_s(|z|b^{-1}) + R|\text{Im } z|\}.$$

DIMOSTRAZIONE. (i) Sia $f \in \mathcal{G}_*^s(P)$, con $\text{supp } f \subseteq [-R, R]$; poiché $f \in \mathcal{O}_*$, f possiede una trasformata di Fourier generalizzata $\mathcal{F}f$ appartenente ad $H_*(\mathbf{C})$.

Verifichiamo che $F = \mathcal{F}f$ soddisfa pure a (2.1). Poiché, $\forall z \in \mathbf{C}$, $\Phi_z \in \delta_*$ (cfr. [7, Ch. XII, Rem.2.2]), per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ottiene $\mathcal{F}P^k f(z) = (-z^2)^k \mathcal{F}f(z)$ (cfr. [13, 6, Lemma 6.1]).

Dunque, se $z \in \mathbf{C}$ con $|z| > 1$, $\forall k \in \mathbf{N}$ si ha:

$$|\mathcal{F}f(z)| = |z|^{-2k} |\mathcal{F}P^k f(z)| \leq |z|^{-2k} \int_0^{+\infty} |P^k f(x) \Phi_z(x) A(x)| dx.$$

Poiché, $\forall x \geq 0$, $\forall z \in \mathbf{C}$

$$(2.2) \quad |\Phi_z(x)| \leq K(x) \exp(|\text{Im } z|x) \quad \text{con } K \in C^0([0, +\infty[)$$

(cfr. [13, 1, Th. 1.1]), si ricava

$$|\mathcal{F}f(z)| \leq |z|^{-2k} \int_0^R cL^{2k} (2k)!^s K(x) \exp(x|\text{Im } z|) A(x) dx \leq |z|^{-2k} BcL^{2k} (2k)!^s \exp(R|\text{Im } z|).$$

Supponendo $L \geq 1$, si ottiene anche

$$|\mathcal{F}f(z)| \leq |z|^{-(2k+1)} BcL^{2k+1} |z|(2k+1)!^s \exp(R|\text{Im } z|).$$

Essendo $|z| > 1$, dalle precedenti disuguaglianze segue:

$$|\mathcal{F}f(z)| \leq c' |z|(L|z|^{-1})^k k!^s \exp(R|\text{Im } z|) \quad \forall k \in \mathbf{N}$$

e dunque

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(z)| &\leq c' |z| \inf_{k \in \mathbf{N}} \{ (|z|L^{-1})^k / k!^s \}^{-1} \exp(R|\operatorname{Im} z|) = \\ &= c' \exp \{ \log |z| - \log \sup_k (|z|L^{-1})^k / k!^s + R|\operatorname{Im} z| \} = \\ &= c' \exp \{ \log |z| - M_s(|z|L^{-1}) + R|\operatorname{Im} z| \}. \end{aligned}$$

Poiché esistono costanti $b > 0$, $d > 1$ tali che $\forall r > 0 \log(rb^{-1}d^{-1}) - M_s(r) \leq -M_s(rd^{-1})$ (cfr. [6, Prop. 3.4]), con semplici calcoli si deduce che per $|z| > 1$ vale

$$|\mathcal{F}f(z)| \leq c'' \exp \{ -M_s(|z|L^{-1}d^{-1}) + R|\operatorname{Im} z| \}.$$

Poiché per $|z| \leq 1 \exp \{ M_s(|z|L^{-1}d^{-1}) - R|\operatorname{Im} z| \}$ è limitata, si può concludere che esistono costanti C e b tali che $\forall z \in \mathbf{C} |\mathcal{F}f(z)| \leq C \exp \{ -M_s(|z|b^{-1}) + R|\operatorname{Im} z| \}$, che è quanto si voleva.

(ii) Viceversa, sia F una funzione intera pari verificante (2.1). Allora F verifica pure

$$\sup_{z \in \mathbf{C}} (1 + |z|^2)^m |F(z)| \exp(-R|\operatorname{Im} z|) < +\infty, \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Pertanto $f = \mathcal{F}^{-1}F$ è un elemento di $\mathcal{O}_*$, con $\operatorname{supp} f \subseteq [-R, R]$. Si tratta di dimostrare che f appartiene pure a $\mathcal{G}_*^s(P)$.

Per (1.3)

$$f(x) = \int_0^{+\infty} F(y) \Phi_y(x) d\mu_1(y) + \int_0^{+\infty} F(iy) \Phi_{iy}(x) d\mu_2(y)$$

e dunque

$$\begin{aligned} P^k f(x) &= \int_0^{+\infty} F(y) P^k \Phi_y(x) d\mu_1(y) + \int_0^{+\infty} F(iy) P^k \Phi_{iy}(x) d\mu_2(y) = \\ &= \int_0^{+\infty} F(y) (-y^2)^k \Phi_y(x) d\mu_1(y) + \int_0^{+\infty} F(iy) y^{2k} \Phi_{iy}(x) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

Valuto separatamente i due integrali. Per (2.2) si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} F(y) (-y^2)^k \Phi_y(x) d\mu_1(y) \right| &\leq CK(x) \int_0^{+\infty} \exp \{ -M_s(yb^{-1}) \} y^{2k} d\mu_1(y) = \\ &= CK(x) \int_0^{+\infty} \exp \{ -1/2 M_s(yb^{-1}) \} \exp \{ -1/2 M_s(yb^{-1}) \} y^{2k} d\mu_1(y). \end{aligned}$$

Poiché esistono (cfr. [6, Prop. 3.6]) costanti $b, d > 0$ tali che $-1/2 M_s(yb^{-1}) \leq$

$\leq -M_s(yd^{-1}b^{-1}) + 1/2 \log b$, si ottiene

$$\left| \int_0^{+\infty} F(y)(-y^2)^k \Phi_y(x) d\mu_1(y) \right| \leq C' K(x)(db)^{2k} \int_0^{+\infty} (yd^{-1}b^{-1})^{2k} \exp\{-M_s(yd^{-1}b^{-1})\} \cdot \\ \cdot \exp\{-1/2 M_s(yb^{-1})\} d\mu_1(y) \leq C' K(x)(db)^{2k} \sup_{y>0} (yd^{-1}b^{-1})^{2k} \exp\{-M_s(yd^{-1}b^{-1})\} \cdot \\ \cdot \int_0^{+\infty} \exp\{-1/2 M_s(yb^{-1})\} d\mu_1(y) \leq C'' K(x)(db)^{2k} (2k)!^s.$$

L'ultima disuguaglianza segue da (1.4) e dal fatto che

$$\int_0^{+\infty} \exp\{-1/2 M_s(yb^{-1})\} d\mu_1(y) < +\infty,$$

essendo μ_1 una misura temperata.

Si ha pure:

$$\left| \int_0^{+\infty} F(iy)y^{2k} \Phi_{iy}(x) d\mu_2(y) \right| \leq CK(x) \int_0^{+\infty} \exp\{-M_s(yb^{-1}) + Ry\} y^{2k} \exp(xy) d\mu_2(y) \leq \\ \leq CK(x) b^{2k} \sup_{y>0} (yb^{-1})^{2k} \exp\{-M_s(yb^{-1})\} \int_0^{+\infty} \exp((R+x)y) d\mu_2(y) = \\ = C \left(\int_0^{+\infty} \exp((R+x)y) d\mu_2(y) \right) K(x) b^{2k} (2k)!^s.$$

Ricordando che $\text{supp } f \subseteq [-R, R]$ e che

$$\int_0^{+\infty} \exp(\beta y) d\mu_2(y) < +\infty, \quad \forall \beta > 0,$$

si conclude

$$\sup_{x>0} |P^k f(x)| \leq \sup_{x \in [-R, R]} \left\{ C'' K(x)(db)^{2k} (2k)!^s + \right. \\ \left. + C \left(\int_0^{+\infty} \exp((R+x)y) d\mu_2(y) \right) K(x) b^{2k} (2k)!^s \right\} \leq cL^{2k} (2k)!^s,$$

che è la disuguaglianza che si voleva ottenere.

Confrontando l'enunciato del teorema 2.1 con quello dell'analogo teorema caratterizzante l'immagine di $\mathcal{G}^s$ nell'usuale trasformazione di Fourier (cfr., ad es., [6, Th. 9.1]), si ha che $\mathcal{G}_*^s(P)$ è algebricamente isomorfo allo spazio $\mathcal{G}_*^s$ costituito dalle funzioni pari di $\mathcal{G}^s$: un isomorfismo è la composizione della trasformazione di Fourier ge-

neralizzata $\mathcal{F}$ con l'inversa dell'usuale trasformazione di Fourier $\mathcal{F}_0$. Più precisamente, se $f \in \mathcal{G}_*^s(P)$ con $\text{supp } f \subseteq [-R, R]$, esiste una e una sola $\varphi \in \mathcal{G}_*^s$ con $\text{supp } \varphi \subseteq [-R, R]$ tale che $\mathcal{F}f = \mathcal{F}_0\varphi$.

OSSERVAZIONE 2.1. È immediato, dal teorema 2.1, che se $f \in \mathcal{G}_*^s(P)$, anche $Pf \in \mathcal{G}_*^s(P)$.

OSSERVAZIONE 2.2. La successione $k!^s$ può essere sostituita con una qualsiasi successione M_k soddisfacente a:

$$(i) \quad M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(ii) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} M_{k-1}/M_k < +\infty$$

$$(iii) \quad \text{esistono costanti } A, H \text{ tali che } M_k \leq AH^k \min_{0 \leq l \leq k} M_l M_{k-l} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Poiché (cfr. [5, Ch. II, Appendix 6.3]) la misura μ_1 , che compare nella formula di inversione (1.3), è temperata, cioè verifica (cfr. [10, Ch. VII, §4]): $\exists p > 0$ tale che

$$\int_0^{+\infty} (1+y^2)^{-p} d\mu_1(y) < +\infty,$$

la condizione (iii) può essere sostituita con la condizione più debole

$$(iv) \quad \text{esistono costanti } A, H \text{ tali che } M_{k+1} \leq AH^k M_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lavoro eseguito con contributo del M.U.R.S.T.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC, *Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés: applications*. J. Funct. Anal., 9, 1972, 208-248.
- [2] C. BONDIOLI, *Un teorema di Paley-Wiener per funzioni ultradifferenziabili su uno spazio simmetrico*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 73, 1982, 89-96.
- [3] P. BOLLEY - J. CAMUS - L. RODINO, *Hypoellipticité analytique-Gevrey et itérés d'opérateurs*. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 45, 1987, 1-61.
- [4] J. FARAUT, *Analyse harmonique sur les paires de Guelfand et les espaces hyperboliques*. In: *Analyse Harmonique*. CIMPA, Nice 1982, ch. IV.
- [5] I. M. GELFAND - N. YA. VILENKIN, *Generalized Functions*, vol. 4, *Applications of Harmonic Analysis*. Academic Press, New York - London 1964.
- [6] H. KOMATSU, *Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization*. J. Fac. Sci. Univ. Tokio, Sec. IA, 20, 1973, 25-105.
- [7] J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer Verlag, Berlin 1961.
- [8] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. vol. III. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
- [9] C. ROUMIEU, *Ultradistributions définies sur $\mathbf{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables*. J. Analyse Math., 10, 1962, 153-192.
- [10] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. tome II. Hermann, Paris 1951.

- [11] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*. Rend. Mat. Univ. Roma, 14, 1955, 388-410.
- [12] F. TREVES, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, New York - London 1967.
- [13] K. TRIMÈCHE, *Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley-Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur $]0, +\infty[$* . J. Math. Pures et Appl., 60, 1981, 51-98.
- [14] K. TRIMÈCHE, *Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators*. Harwood Academic Publishers, Chur-London 1988.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pavia
Strada Nuova, 65 - 27100 PAVIA