Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Pasquale Giovine

Sulla dinamica di una miscela di due fluidi comprimibili e non miscibili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **1** (1990), n.4, p. 377–385.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1990_9_1_4_377_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1990.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 1:377-385 (1990)

Fisica matematica. — *Sulla dinamica di una miscela di due fluidi comprimibili e non miscibili.* Nota di PASQUALE GIOVINE, presentata (*) dal Corrisp. G. CAPRIZ.

ABSTRACT. — *On the dynamics of a mixture of two compressible immiscible fluids.* A complete specification is given of the dynamic balance equations for a mixture of two compressible immiscible fluids.

KEY WORDS: Mixtures; Immiscible fluids; Balance equations; Virtual inertia.

RIASSUNTO. — Si dà un ulteriore contributo alla specificazione delle equazioni dinamiche di bilancio per una miscela di due fluidi non miscibili ma comprimibili.

1. INTRODUZIONE

La questione della scelta della corretta espressione dei termini di inerzia nelle equazioni di bilancio per una miscela di due fluidi non miscibili (quindi in presenza di inerzia virtuale) è stata a lungo dibattuta; nelle applicazioni si ricorre di solito ad ipotesi *ad hoc* [1]. La questione è stata affrontata in [2] in modo da assicurare la validità del bilancio dell'energia meccanica. Si è fatto ricorso ad un principio variazionale a partire da una hamiltoniana opportuna; più precisamente si è ricorsi ad un principio in forma locale (piuttosto che referenziale), un principio dunque meno usuale, ma l'unico adatto a circostanze nelle quali l'introduzione di un piazzamento di riferimento sarebbe indubbiamente una forzatura. D'altra parte la deduzione delle relazioni locali dal principio globale si presta ad alcune obiezioni non banali (si vedano, in proposito, ad esempio il § 4 di [3], oppure [4]).

Sulla questione è tornato Virga in [5] con una deduzione che evita i punti soggetti a critica. Virga ammette la comprimibilità dei due fluidi costituenti la miscela e di conseguenza le equazioni a cui perviene sono un po' diverse da quelle ottenute in [2] per una miscela di liquidi.

In particolare c'è un'equazione aggiuntiva (la (3.27) di p. 56) che sorprende perché non ha l'aspetto tipico di una equazione di bilancio. Si pone dunque la questione di darne una interpretazione; in questo lavoro osservo innanzitutto che, in corrispondenza all'ipotesi di comprimibilità, non solo sembra opportuno accettare una espressione della densità di energia cinetica più completa di quella assunta da Virga, ma anche l'espressione della densità di energia potenziale delle azioni interne necessita di una opportuna generalizzazione, in accordo con [6]. Seguendo poi il suo procedimento variazionale, faccio vedere che l'equazione aggiuntiva assume ora anch'essa la forma tipica di un'equazione di bilancio. Verifico anche che i miei risultati sono allineati con quelli indicati in un'ampia memoria di Bedford e Drumheller [7].

(*) Nella seduta del 21 aprile 1990.

2. Principio variazionale

Il principio variazionale su cui si basano gli sviluppi di questo lavoro differisce da quello proposto da Virga in [5] solo nelle espressioni delle densità di energia cinetica e potenziale. Per la prima espressione si accetta qui una forma più completa (in accordo del resto con una proposta di Drumheller e Bedford in [8]) comprendente il contributo derivante dalle microvariazioni locali di volume dei fluidi costituenti la miscela; mentre, in corrispondenza dell'ipotesi di comprimibilità, occorre introdurre per la seconda la dipendenza da ulteriori variabili costitutive (si veda [9] per considerazioni analoghe).

Sia $\mathcal{E}$ lo spazio euclideo tridimensionale e $\mathcal{V}$ il suo spazio delle traslazioni. Sia $\mathcal{B}$ una regione fissata di $\mathcal{E}$ che è occupata da una miscela composta da due fluidi non miscibili e che non si separano totalmente mai nell'intervallo di tempo $[\tau_0, \tau_1]$ (con $\tau_1 \in]\tau_0, +\infty]$) durante il quale si osserva il moto. I campi che descrivono la miscela sono le velocità v_i, le densità effettive γ_i ed apparenti ρ_i $(i = 1, 2)$ dei costituenti. γ_i è la massa dell'i-esimo costituente per unità di volume dell'i-esimo costituente, mentre ρ_i quella per unità di volume della miscela. Le frazioni di volume dei costituenti sono i rapporti fra le densità di massa

$$\beta_i := \rho_i / \gamma_i \tag{2.1}$$

e soddisfano il vincolo

$$\beta_1 + \beta_2 = 1. \tag{2.2}$$

Su $\mathcal{B}$ si supporrà che sia un insieme aperto la cui frontiera è una superficie chiusa di classe $\mathcal{C}^1$, con normale esterna n. Poniamo $\Omega := \overline{\mathcal{B}} \times [\tau_0, \tau_1]$ ed assumiamo anche che i campi ammissibili di velocità v_i siano funzioni di classe $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{V})$ tali che

$$v_i(x, \tau) \cdot n = 0, \qquad \forall x \in \partial\mathcal{B} \text{ e } \tau \in [\tau_0, \tau_1]. \tag{2.3}$$

Per ogni scelta delle funzioni v_1 e v_2, definiamo la linea di flusso passante per x dell'i-esimo costituente come la funzione $s_i^x : [\tau_0, \tau_1] \to \mathcal{B}$ che risolve la seguente equazione differenziale ordinaria ai valori iniziali:

$$\begin{cases} ds_i^x(\tau)/d\tau = v_i(s_i^x(\tau), \tau), \\ s_i^x(\tau_0) = x. \end{cases} \tag{2.4}$$

Il tubo di flusso dell'i-esimo costituente è la funzione $y_i : \Omega \to \mathcal{B}$ definita da

$$y_i(x, \tau) := s_i^x(\tau), \qquad \forall (x, \tau) \in \Omega. \tag{2.5}$$

Dalle equazioni (3) e (4) segue che

$$y_i(\mathcal{B}, \tau) = \mathcal{B}, \qquad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1]. \tag{2.6}$$

La conservazione della massa di ciascun costituente richiede che

$$\frac{d}{d\tau} \int_{y_i(\mathcal{P}, \tau)} \rho_i(\cdot, \tau) \equiv 0, \qquad \forall \mathcal{P} \subset \mathcal{B}. \tag{2.7}$$

Nell'appendice di [5], in ipotesi di regolarità $\mathcal{C}^1$ per ρ_i (che saranno intese valide qui anche per le γ_i), Virga dimostra che tale equazione è equivalente all'equazione di continuità

$$\partial \rho_i / \partial \tau + \operatorname{div}(\rho_i v_i) = 0. \tag{2.8}$$

Dall'equazione (1) segue che anche β_i è di classe $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{R}^{\times})$, dove $\mathcal{R}^{\times}$ indica l'insieme dei numeri reali positivi, e dunque, per gli sviluppi seguenti, conviene considerare come campi fondamentali ρ_i e β_i, piuttosto che ρ_i e γ_i, ed anzi porre $\beta := \beta_2$; allora l'equazione (2) e l'ipotesi che i costituenti della miscela non si separano mai implicano che

$$0 < \beta(x, \tau) < 1, \qquad \forall (x, \tau) \in \Omega, \tag{2.9}$$

e

$$\beta_1 = 1 - \beta. \tag{2.10}$$

L'espressione per la densità $\varkappa$ di energia cinetica per unità di volume della miscela qui proposta tiene conto, oltre che del contributo dovuto all'effetto dell'inerzia virtuale di traslazione, anche di quello associato con le espansioni e contrazioni dei costituenti, supposti comprimibili. Precisamente $\varkappa$ è definita così

$$\begin{aligned} \varkappa(\rho_1, \rho_2, \beta, v_1, v_2) := {} & 2^{-1} \rho_1 [v_1^2 + \mu_1(\beta)(\partial(1-\beta)/\partial\tau + (\operatorname{grad}(1-\beta)) \cdot v_1)^2] + \\ & + 2^{-1} \rho_2 [v_2^2 + \mu_2(\beta)(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta) \cdot v_2)^2] + 2^{-1} \psi(\beta)(v_2 - v_1)^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Un'espressione esplicita, proposta in [2], per la funzione ψ della frazione di volume β è la seguente

$$\psi(\beta) = 2^{-1} \beta (1 + 2\beta)(1 - \beta)^{-1}. \tag{2.12}$$

In una breve appendice viene indicata una valutazione esplicita delle funzioni μ_1 e μ_2. Entrambe le valutazioni sono basate su un modello dei micromoti, intorno a ciascuna goccia, di un liquido perfetto. Il caso più delicato in cui si considerassero gli effetti di viscosità sui micromoti potrebbe condurre a termini dei tipi detti di trascinamento e di Basset [1, (3.36) e segg.].

Indichiamo con ω e σ, rispettivamente, la densità per unità di massa dell'energia potenziale delle forze di massa esterne e quella per unità di volume dell'energia potenziale delle azioni interne; la prima è una funzione del posto definita in $\mathcal{B}$, mentre la seconda è supposta dipendere oltre che da β, come imposto in [2] e [5], anche dalle densità apparenti $\rho_i (i = 1, 2)$ (si veda [6] per una descrizione delle variabili costitutive per le miscele). Il funzionale Hamiltoniano, per il quale si andranno a determinare le condizioni di stazionarietà, è definito nel seguente modo:

$$\mathcal{H}[\rho_1, \rho_2, \beta, v_1, v_2] := \int_{\Omega} [\varkappa(\rho_1, \rho_2, \beta, v_1, v_2) - (\rho_1 + \rho_2)\omega - \sigma(\rho_1, \rho_2, \beta)]. \tag{2.13}$$

Sia $\pi := (\rho_1, \rho_2, \beta, v_1, v_2)$ una quintupla di funzioni soddisfacenti le equazioni (3), (7) e (9) ed $\mathcal{A}$ la classe di tutte le quintuple π i cui elementi sono funzioni assegnate ai tempi τ_0 e τ_1. Il principio variazionale asserisce che, nella classe $\mathcal{A}$, il moto della miscela è descritto dalle quintuple per le quali $\mathcal{H}$ è stazionario.

3. Equazioni dinamiche di bilancio

Ci interessa calcolare la variazione prima del funzionale $\mathcal{H}$ su una opportuna quintupla π per imporne poi l'annullamento. Allo scopo seguiremo da vicino gli sviluppi di [5]. Cominciamo con l'introdurre una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, $u_i : \Omega \to \mathcal{V}$, tale che, $\forall (x, \tau) \in \partial\Omega$, si abbia

$$u_i(x, \tau) = 0, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{grad} u_i(x, \tau) = 0 \tag{3.2}$$

e

$$\partial(u_i(x, \tau))/\partial\tau = 0. \tag{3.3}$$

Sia $\varepsilon \in \mathcal{R}^{\times}$ tale da rendere la funzione $f_i^{\varepsilon} : \Omega \to \mathcal{E}$ definita da

$$f_i^{\varepsilon}(x, \tau) := x + \varepsilon u_i(x, \tau), \qquad \forall (x, \tau) \in \Omega, \tag{3.4}$$

un diffeomorfismo $\mathcal{C}^1$ da $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}$, per ogni $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ e per ogni τ fissato in $[\tau_0, \tau_1]$; in [5] Virga dimostra che la funzione $y_i^{\varepsilon} : \Omega \to \mathcal{B}$, definita così

$$y_i^{\varepsilon}(x, \tau) := f_i^{\varepsilon}(y_i(x, \tau), \tau), \qquad (x, \tau) \in \Omega, \tag{3.5}$$

è il tubo di flusso dell'i-esimo costituente corrispondente al seguente campo di velocità v_i^{ε}, definito su Ω, appartenente ad una quintupla di $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} v_i^{\varepsilon}(f_i^{\varepsilon}(x, \tau), \tau) &:= F_i^{\varepsilon}(x, \tau) v_i(x, \tau) + \partial f_i^{\varepsilon}(x, \tau)/\partial\tau = \\ &= (I + \varepsilon \operatorname{grad} u_i(x, \tau)) v_i(x, \tau) + \varepsilon \partial u_i(x, \tau)/\partial\tau, \end{aligned} \tag{3.6}$$

dove

$$F_i^{\varepsilon} := \operatorname{grad} f_i^{\varepsilon} = I + \varepsilon \operatorname{grad} u_i \tag{3.7}$$

ed I è il tensore identità. Dalle equazioni (2), (3) e $(6)_2$ segue che v_i^{ε} appartiene ad una quintupla di $\mathcal{A}$ ogniqualvolta v_i vi appartiene e, quando $\varepsilon = 0$, si ha

$$v_i^0 \equiv v_i. \tag{3.8}$$

Il campo scalare $\rho_i^{\varepsilon} : \Omega \to \mathcal{R}^{\times}$ definito da

$$\rho_i^{\varepsilon}(f_i^{\varepsilon}(x, \tau), \tau) := \rho_i(x, \tau)[\det F_i^{\varepsilon}(x, \tau)]^{-1}, \qquad \forall (x, \tau) \in \Omega, \tag{3.9}$$

appartiene alla stessa quintupla di $\mathcal{A}$ a cui appartiene v_i^{ε}, poiché, per la (5),

$$\int_{y_i^{\varepsilon}(\mathcal{P}, \tau)} \rho_i^{\varepsilon}(\cdot, \tau) = \int_{y_i(\mathcal{P}, \tau)} \rho_i(\cdot, \tau), \qquad \forall \mathcal{P} \subset \mathcal{B}, \tag{3.10}$$

e dunque la (2.7) vale per ρ_i^{ε} ogniqualvolta vale per ρ_i. Quando $\varepsilon = 0$, segue dalle (4), (7) e (9) che

$$\rho_i^0 \equiv \rho_i. \tag{3.11}$$

Infine, entrambe le funzioni $\beta_i^{\varepsilon} : \Omega \to]0, 1[$,

$$\beta_i^{\varepsilon}(f_i^{\varepsilon}(x, \tau), \tau) := \beta(x, \tau), \qquad (x, \tau) \in \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{3.12}$$

appartengono alla stessa quintupla di $\mathcal{A}$ delle coppie ρ_1^{ε}, v_1^{ε} e ρ_2^{ε}, v_2^{ε}. Inoltre, se $\alpha : \Omega \to \mathcal{R}^{\times}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\alpha(x, \tau_0) = \alpha(x, \tau_1) = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{B}, \tag{3.13}$$

e tale che, per ogni $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, la funzione $\beta_0^\varepsilon : \Omega \to \mathcal{R}^\times$,

$$\beta_0^\varepsilon(x,\tau) := \beta(x,\tau) + \varepsilon\alpha(x,\tau), \qquad (x,\tau) \in \Omega, \tag{3.14}$$

soddisfi $\beta_0^\varepsilon(\Omega) \subset]0,1[$, allora anche β_0^ε appartiene ad una quintupla di $\mathcal{A}$. Quando $\varepsilon = 0$, dalle (12) e (14), segue

$$\beta_0^0 \equiv \beta_1^0 \equiv \beta_2^0 \equiv \beta. \tag{3.15}$$

Per ogni $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, le tre quintuple

$$\pi_0^\varepsilon := (\rho_1, \rho_2, \beta_0^\varepsilon, v_1, v_2), \quad \pi_1^\varepsilon := (\rho_1^\varepsilon, \rho_2, \beta_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon, v_2), \quad \pi_2^\varepsilon := (\rho_1, \rho_2^\varepsilon, \beta_2^\varepsilon, v_1, v_2^\varepsilon) \tag{3.16}$$

appartengono ad $\mathcal{A}$, e quando $\varepsilon = 0$, dalle (8), (11) e (15), segue

$$\pi_0^0 = \pi_1^0 = \pi_2^0 = \pi. \tag{3.17}$$

Allora le applicazioni $\varepsilon \mapsto \pi_j^\varepsilon$ $(j = 0, 1, 2)$ definiscono tre traiettorie differenti in $\mathcal{A}$ che partono da π. Virga in [5] definisce la variazione prima di $\mathcal{H}$ lungo queste traiettorie nel seguente modo

$$\delta_j \mathcal{H}(\pi) := \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{H}[\pi_j^\varepsilon]\big|_{\varepsilon=0}, \tag{3.18}$$

per $j = 0$, 1, 2. $\delta_0 \mathcal{H}(\pi)$ è un funzionale lineare di α, mentre $\delta_i \mathcal{H}(\pi)$ è un funzionale lineare di u_i, per $i = 1$, 2. Per calcolare $\delta_0 \mathcal{H}(\pi)$, esprimiamo il valore di $\mathcal{H}$ in π_0^ε, tenuto conto delle (2.11), (2.13) e (14), nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[\pi_0^\varepsilon] = &\int_\Omega \rho_1 (2^{-1} v_1^2 - \omega) + \int_\Omega \rho_2 (2^{-1} v_2^2 - \omega) + \\ &+ \int_\Omega \{2^{-1} \rho_1 \mu_1 (\beta + \varepsilon\alpha)[\partial(\beta + \varepsilon\alpha)/\partial\tau + (\operatorname{grad}(\beta + \varepsilon\alpha)) \cdot v_1]^2 + \\ &+ 2^{-1} \rho_2 \mu_2 (\beta + \varepsilon\alpha)[\partial(\beta + \varepsilon\alpha)/\partial\tau + (\operatorname{grad}(\beta + \varepsilon\alpha)) \cdot v_2]^2 + \\ &+ 2^{-1} \psi(\beta + \varepsilon\alpha)(v_2 - v_1)^2 - \sigma(\rho_1, \rho_2, \beta + \varepsilon\alpha)\}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Poiché solo l'ultimo integrale dipende da ε, si ha

$$\begin{aligned}\delta_0 \mathcal{H}(\pi) = &\int_\Omega \{[2^{-1} \rho_1 \mu_1'(\beta)(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta) \cdot v_1)^2 + \\ &+ 2^{-1} \rho_2 \mu_2'(\beta)(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta) \cdot v_2)^2 + 2^{-1} \psi'(\beta)(v_2 - v_1)^2 - \partial\sigma(\rho_1, \rho_2, \beta)/\partial\beta]\alpha + \\ &+ \rho_1 \mu_1(\beta)(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta) \cdot v_1)(\partial\alpha/\partial\tau + (\operatorname{grad}\alpha) \cdot v_1) + \\ &+ \rho_2 \mu_2(\beta)(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta) \cdot v_2)(\partial\alpha/\partial\tau + (\operatorname{grad}\alpha) \cdot v_2)\},\end{aligned} \tag{3.20}$$

dove si è indicato con un'apice la differenziazione rispetto a β. Integrando per parti la (20) ed usando la (2.8) e la (13), si ha

$$\begin{aligned}\delta_0 \mathcal{H}(\pi) = &\int_\Omega \{-\{\rho_1 \mu_1(\beta)\{\partial(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta) \cdot v_1)/\partial\tau + \\ &+ [\operatorname{grad}(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta) \cdot v_1)] \cdot v_1\} + 2^{-1} \rho_1 \mu_1'(\beta)(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta) \cdot v_1)^2 +\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$+2^{-1}\rho_2\mu_2'(\beta)(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_2)^2+\rho_2\mu_2(\beta)\{\partial(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_2)/\partial\tau+$$
$$+[\operatorname{grad}(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_2)]\cdot v_2\}\}+2^{-1}\psi'(\beta)(v_2-v_1)^2-\partial\sigma(\rho_1,\rho_2,\beta)/\partial\beta\Big\}\alpha.$$

Per calcolare le altre due variazioni occorre calcolare $\mathcal{H}$ in π_1^ε e π_2^ε; il primo calcolo dà

$$\mathcal{H}[\pi_1^\varepsilon]=\int_\Omega \rho_2(2^{-1}v_2^2-\omega)+ \tag{3.22}$$
$$+\int_\Omega\{\{\rho_1^\varepsilon[2^{-1}(v_1^\varepsilon)^2+2^{-1}\mu_1(\beta_1^\varepsilon)(\partial\beta_1^\varepsilon/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta_1^\varepsilon)\cdot v_1^\varepsilon)^2-\omega]\}+$$
$$+[2^{-1}\rho_2\mu_2(\beta_1^\varepsilon)(\partial\beta_1^\varepsilon/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta_1^\varepsilon)\cdot v_2)^2+2^{-1}\psi(\beta_1^\varepsilon)(v_2-v_1^\varepsilon)^2-\sigma(\rho_1^\varepsilon,\rho_2,\beta_1^\varepsilon)]\}$$

ed il secondo è analogo.

Applicando gli sviluppi di Virga in [5] al caso qui considerato, si ricavano le equazioni di moto della miscela eguagliando a zero le tre variazioni prime $\delta_0\mathcal{H}(\pi)$, $\delta_1\mathcal{H}(\pi)$ e $\delta_2\mathcal{H}(\pi)$ per qualsiasi funzione α, u_1 ed u_2, rispettivamente. Dalle (21), (22) e l'analoga per l'indice 2 si ottengono le seguenti equazioni

$$\rho_1\mu_1(\beta)[\partial^2\beta/\partial\tau^2+(\operatorname{grad}\beta)\cdot a_1+2(\operatorname{grad}\partial\beta/\partial\tau)\cdot v_1+(\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\beta))\cdot(v_1\otimes v_1)]+ \tag{3.23}$$
$$+\rho_2\mu_2(\beta)[\partial^2\beta/\partial\tau^2+(\operatorname{grad}\beta)\cdot a_2+2(\operatorname{grad}\partial\beta/\partial\tau)\cdot v_2+(\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\beta))\cdot(v_2\otimes v_2)]+$$
$$+2^{-1}\rho_1\mu_1'(\beta)(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_1)^2+2^{-1}\rho_2\mu_2'(\beta)(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_2)^2=$$
$$=\underline{2^{-1}\psi'(\beta)(v_2-v_1)^2}-\underline{\partial\sigma(\rho_1,\rho_2,\beta)/\partial\beta},$$

dove

$$a_i:=\partial v_i/\partial\tau+(\operatorname{grad}v_i)v_i,\qquad i=1,2, \tag{3.24}$$

$$\underline{\rho_1 a_1}-\underline{\partial(\psi(\beta)(v_2-v_1))/\partial\tau}+ \tag{3.25}$$
$$+\rho_1\{\mu_1(\beta)[\partial^2\beta/\partial\tau^2+(\operatorname{grad}\beta)\cdot a_1+2(\operatorname{grad}\partial\beta/\partial\tau)\cdot v_1+(\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\beta))\cdot(v_1\otimes v_1)]+$$
$$+\mu_1'(\beta)(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_1)^2\}\operatorname{grad}\beta+$$
$$+\rho_1\mu_1(\beta)(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_1)[\operatorname{grad}\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\beta))v_1]=$$
$$=\underline{\operatorname{div}(\psi(\beta)(v_2-v_1)\otimes v_1)}+\underline{\operatorname{grad}(\sigma(\rho_1,\rho_2,\beta)-2^{-1}\psi(\beta)(v_2-v_1)^2)}-\underline{\rho_1\operatorname{grad}\omega}+$$
$$+\underline{(\operatorname{grad}v_2)^T}[\underline{\psi(\beta)(v_2-v_1)}+\rho_2\mu_2(\beta)(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_2)\operatorname{grad}\beta]-$$
$$-2^{-1}\rho_2\operatorname{grad}[\mu_2(\beta)(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_2)^2]-$$
$$-\operatorname{grad}(\rho_1\partial\sigma(\rho_1,\rho_2,\beta)/\partial\rho_1)-[\partial\sigma(\rho_1,\rho_2,\beta)/\partial\rho_2]\operatorname{grad}\rho_2$$

e

$$\underline{\rho_2 a_2}+\underline{\partial(\psi(\beta)(v_2-v_1))/\partial\tau}+ \tag{3.26}$$
$$+\rho_2\{\mu_2(\beta)[\partial^2\beta/\partial\tau^2+(\operatorname{grad}\beta)\cdot a_2+2(\operatorname{grad}\partial\beta/\partial\tau)\cdot v_2+(\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\beta))\cdot(v_2\otimes v_2)]+$$
$$+\mu_2'(\beta)(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_2)^2\}\operatorname{grad}\beta+$$
$$+\rho_2\mu_2(\beta)(\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}\beta)\cdot v_2)[\operatorname{grad}\partial\beta/\partial\tau+(\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\beta))v_2]=$$

$$= -\underline{\operatorname{div}\,(\psi(\beta)(v_2 - v_1)\otimes v_2)} + \underline{\operatorname{grad}\,(\sigma(\rho_1,\rho_2,\beta) - 2^{-1}\psi(\beta)(v_2 - v_1)^2)} - \underline{\rho_2 \operatorname{grad}\omega} -$$

$$-\underline{(\operatorname{grad} v_1)^T}[\underline{\psi(\beta)(v_2 - v_1)} - \rho_1\mu_1(\beta)(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta)\cdot v_1)\operatorname{grad}\beta] -$$

$$-2^{-1}\rho_1 \operatorname{grad}[\mu_1(\beta)(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta)\cdot v_1)^2] -$$

$$-\operatorname{grad}(\rho_2\,\partial\sigma(\rho_1,\rho_2,\beta)/\partial\rho_2) - [\partial\sigma(\rho_1,\rho_2,\beta)/\partial\rho_1]\operatorname{grad}\rho_1 .$$

Le equazioni di moto della miscela ricavate da Virga in [5], supponendo σ dipendente al più da β, comprendono solamente i termini sottolineati che compaiono nelle equazioni (23), (25) e (26), mentre gli effetti delle microvariazioni locali di volume dei fluidi costituenti la miscela appaiono evidenti nelle equazioni qui ricavate; in particolare, l'equazioni (23) lega la variazione lagrangiana della microinerzia dovuta a tali effetti con le sorgenti che contribuiscono a tale variazione.

I campi fondamentali della teoria ρ_1, ρ_2, β, v_1 e v_2, sono determinati dalle equazioni (2.8), (23), (25) e (26).

Bedford e Drumheller, in [7-9], considerano come campi fondamentali, nel caso di due costituenti, γ_1 e γ_2 al posto di β_1 e β_2 e di conseguenza esprimono la densità di energia cinetica suppletiva in termini di $(\partial\gamma_1/\partial\tau + (\operatorname{grad}\gamma_1)\cdot v_1)$ e $(\partial\gamma_2/\partial\tau + (\operatorname{grad}\gamma_2)\cdot v_2)$. La differenza formale con l'espressione fornita in questo lavoro dipende essenzialmente dal differente modello considerato per gli elementi del continuo e dalle ipotesi poste, ma in sostanza le espressioni sono analoghe a causa della relazione (2.1) (a questo proposito si veda [10, pp. 317-321] per una discussione sull'argomento; in particolare vi si fa notare che le motivazioni per una scelta a discapito dell'altra non sono univoche). Le equazioni dinamiche di bilancio ricavate in [7], in un contesto più generale, sembrano consistenti con quelle qui proposte, tenuto conto anche del vincolo (2.2).

I tre principi metafisici di Truesdell per le miscele ordinarie [11, p. 83] si applicano anche alla miscela descritta in questo articolo; in particolare la validità del terzo principio si potrebbe dimostrare attraverso un procedimento perfettamente analogo a quello seguito da Virga in [5, pp. 56-58].

Appendice

Si immagini il continuo come formato da elementi sferici di raggio ζ contenenti un'inclusione sferica concentrica di raggio variabile ζ_2, che si espande o contrae omogeneamente, e per il quale, dunque, è possibile fissare un piazzamento di riferimento $\mathcal{B}_*$; in tal caso le coordinate radiali locali ξ_i dei costituenti, con origine nel centro delle sfere, dipendono dalla coordinata ξ_* nel piazzamento di riferimento e sono espresse dalle seguenti relazioni

$$\text{(A.1)}\quad \begin{aligned} &\xi_1 = \zeta + (\xi_* - \zeta)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_{2*})^{-1}, && \text{se } \xi_* > \zeta_{2*}, \\ &\xi_2 = \xi_*\,\zeta_2\,(\zeta_{2*})^{-1}, && \text{se } \xi_* < \zeta_{2*}; \end{aligned}$$

mentre la frazione di volume è

$$\beta = (\zeta_2/\zeta)^3 . \tag{A.2}$$

Dunque la densità media di energia cinetica per unità di volume associata a ciascun elemento, come conseguenza di espansioni e contrazioni omogenee dell'inclusione, vale

$$2^{-1}\left\{3(4\pi\zeta^3)^{-1}\left[\int_{\zeta_2}^{\zeta}\gamma_1(\partial\xi_1/\partial\tau + (\operatorname{grad}\xi_1)\cdot v_1)^2\,4\pi\xi_1^2\,d\xi_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^{\zeta_2}\gamma_2(\partial\xi_2/\partial\tau + (\operatorname{grad}\xi_2)\cdot v_2)^2\,4\pi\xi_2^2\,d\xi_2\right]\right\};$$

tale espressione è uguale a

$$2^{-1}\rho_1\zeta^2(1+3\beta^{1/3}+6\beta^{2/3})[90\beta^{4/3}(1+\beta^{1/3}+\beta^{2/3})]^{-1}(\partial(1-\beta)/\partial\tau +$$
$$+(\operatorname{grad}(1-\beta))\cdot v_1)^2 + 2^{-1}\rho_2\zeta^2(15\beta^{4/3})^{-1}(\partial\beta/\partial\tau + (\operatorname{grad}\beta)\cdot v_2)^2 ,$$

dunque si ha

$$\mu_1(\beta) = \zeta^2(1+3\beta^{1/3}+6\beta^{2/3})[90\beta^{4/3}(1+\beta^{1/3}+\beta^{2/3})]^{-1}, \quad \mu_2(\beta) = \zeta^2(15\beta^{4/3})^{-1} . \tag{A.3}$$

Ringraziamenti

Lavoro eseguito con il contributo finanziario del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (fondi 40% e 60% - 1989). Ringrazio il Prof. G. Capriz per i suoi commenti e suggerimenti.

Bibliografia

[1] D. Y. Hsieh, *On Dynamics of Bubbly Liquids.* Adv. in Appl. Mech., 26, 1988, 63-133.

[2] G. Capriz - P. Giovine, *On Effects of Virtual Inertia during Diffusion of a Dispersed Medium in a Suspension.* Arch. Rat. Mech. Anal., 98, 1987, 115-122.

[3] F. Bampi - A. Morro, *The Inverse Problem of the Calculus of Variations Applied to Continuum Physics.* J. Math. Phys., 23-II, 1982, 2312-2321.

[4] F. Bampi - A. Morro, *The Connection between Variational Principles in Eulerian and Lagrangian Descriptions.* J. Math. Phys., 25, 1984, 2418-2421.

[5] E. G. Virga, *On the Variation of the Hamiltonian Functional for an Immiscible Mixture.* Arch. Rat. Mech. Anal., 103, 1989, 51-59.

[6] R. M. Bowen, *Diffusion Models Implied by the Theory of Mixtures.* In: C. Truesdell (ed.), *Rational Thermodynamics.* 2nd ed., Springer Verlag, New York 1984, Appendice 5A, 237-263.

[7] A. Bedford - D. S. Drumheller, *Theories of Immiscible and Structured Mixtures.* Int. J. Engng. Sci., 21, 1983, 863-960.

[8] D. S. Drumheller - A. Bedford, *A Thermomechanical Theory for Reacting Immiscible Mixtures.* Arch. Rat. Mech. Anal., 73, 1980, 257-284.

[9] A. Bedford - D. S. Drumheller, *A Variational Theory of Immiscible Mixtures.* Arch. Rat. Mech. Anal., 68, 1978, 37-51.

[10] S. L. PASSMAN - J. W. NUNZIATO - E. K. WALSH, *A Theory of Multiphase Mixtures*. In: C. TRUESDELL (ed.), *Rational Thermodynamics*. 2nd ed., Springer Verlag, New York 1984, Appendice 5C, 286-325.
[11] C. TRUESDELL, *Rational Thermodynamics*. McGraw-Hill, New York 1969, Lettura 5, 81-99.

Istituto del biennio di Ingegneria
Università degli Studi di Reggio Calabria
Via E. Cuzzocrea, 48 - 89128 REGGIO CALABRIA