Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Paolo De Bartolomeis, Luca Migliorini,
Antonella Nannicini

Propriétés globales de l'espace de twisteurs

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **2** (1991), n.2, p. 147–153.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1991_9_2_2_147_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1991.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 2:147-153 (1991)

Geometria differenziale. — *Propriétés globales de l'espace de twisteurs.* Nota di

PAOLO DE BARTOLOMEIS, LUCA MIGLIORINI e ANTONELLA NANNICINI, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

ABSTRACT. — *Global properties of twistor spaces.* We study global properties of the twistor space over an even dimensional conformally flat manifold, proving that the twistor space is Kähler if and only if the manifold is conformally equivalent to the standard $2n$-dimensional sphere ($n>2$).

KEY WORDS: Twistors; Kähler manifolds; Conformally flat manifolds.

RIASSUNTO. — *Proprietà globali dello spazio dei twistori.* Si studiano le proprietà globali dello spazio dei twistori di una varietà conformalmente piatta di dimensione pari, si dimostra che tale spazio è kähleriano se e solo se la varietà è conformalmente equivalente alla sfera $2n$-dimensionale con la metrica standard ($n>2$).

0. INTRODUCTION

Soit (M,g) une variété Riemannienne orientée de dimension $2n$ et soit $P(M,SO(2n))$ le fibré principal des répères orthonormaux orientés de M.

On appelle *espace de twisteurs de* M le fibré $\mathcal{Z}(M)=P(M,SO(2n))/U(n)$; $\mathcal{Z}(M)$ est donc un fibré de base M à fibre standard $\mathcal{Z}(n)=SO(2n)/U(n)$ et groupe structural $SO(2n)$. Soit r: $\mathcal{Z}(n)\to M$ la projection de ce fibré; si $x\in M$, on a:

$$\mathcal{Z}_x=r^{-1}(x)=\{P\in SO(T_xM,g(x))|P=-{}^tP,\ \text{donnant l'orientation fixée}\}$$

i.e. $P\in\mathcal{Z}(n)$ représente une structure complexe sur $T_{r(P)}M$, compatible avec la métrique et l'orientation.

La connexion de Levi-Civita sur $P(M,SO(2n))$ permet de définir, en tout point $P\in\mathcal{Z}(M)$ la décomposition en composantes horizontales et verticales

$$T_p\,Z(M)=H_P\oplus F_P \text{ où, si } \mathrm{x}=\mathrm{r(P)}\text{: } \mathrm{F_P}=\mathrm{T_P}\mathcal{Z}_{\mathrm{x}}=\{\mathrm{X}\in \mathrm{so}(\mathrm{T_x M},\mathrm{g(x)})|\mathrm{P}\circ\mathrm{X}=-\mathrm{X}\circ\mathrm{P}\}.$$

On peut alors définir sur $\mathcal{Z}(M)$ une structure presque complexe $\mathbf{J}$ de la manière suivante: si $X\in T_P\mathcal{Z}(M)$ et $X=X_h+X_v$ avec $X_h\in H_P$ et $X_v\in F_P$, l'on pose:

$$\mathbf{J}[P]X=r_*^{-1}\circ P\circ r_*(X_h)+P\circ X_v.$$

On note tout de suite que $\mathbf{J}$ induit sur les fibres la structure Kählerienne standard de $\mathcal{Z}(n)$.

On a (cf. [3, 10]):

PROPOSITION 0.1.

1. $\mathbf{J}$ *ne dépend que de la classe conforme de* g.

(*) Nella seduta del 10 novembre 1990.

2. *$\mathbf{J}$ est intégrable si et seulement si: a) pour $n=2$, (M,g) est anti-auto-duale; b) pour $n>2$, (M,g) est conformément plate.*

3. *Soit $U\subset M$ un ouvert et soit σ: $U\to\mathcal{Z}(M)$ une section locale sur U, les faits suivant sont équivalents: a) σ, comme structure presque complexe sur U est intégrable; b) $\sigma(U)$ est une sous-variété presque complexe (locale) de $\mathcal{Z}(M)$; c) $\sigma(U)$ est une sous-variété complexe (locale) de $\mathcal{Z}(M)$.*

On peut définir sur $\mathcal{Z}(M)$ une structure presque Hermitienne, par rapport à $\mathbf{J}$, $\mathbf{G}$ de la manière suivante: si X, $Y\in T_P\mathcal{Z}(M)$ et $X=X_h+X_v$, $Y=Y_h+Y_v$, avec X_h, $Y_h\in H_P$, X_v, $Y_v\in F_P$, on pose $\mathbf{G}[P]=g[r(P)](r_*X_h, r_*Y_h)+\tilde{g}[P](X_v, Y_v)$ où $\tilde{g}$ est la metrique Kählérienne standard sur $\mathcal{Z}(n)$.

On note tout de suite que:

1. $\mathbf{G}$ induit sur les fibres la structure Hermitienne standard de $\mathcal{Z}(n)$.

2. r: $(\mathcal{Z}(M),\mathbf{G})\to(M,g)$ est une submersion Riemannienne à fibres totalment géodésiques.

3. La classe conforme de $\mathbf{G}$ n'est pas un invariant conforme de M.

On a la proposition suivante (cf. [3]):

PROPOSITION 0.2. *La metrique $\mathbf{J}$-Hermitienne $\mathbf{G}$ est Kählerienne si et seulement si: a) pour $n=2$, $\mathcal{R}_{|\Lambda^2_+}=I$; b) pour $n>2$, $\mathcal{R}=I$. $\mathcal{R}$: $\Lambda^2(M)\to\Lambda^2(M)$ étant l'opérateur de courbure de M, $\Lambda^2=\Lambda^2_+\oplus\Lambda^2_-$ étant (pour $n=2$) la décomposition spectrale par rapport à $*$.*

En particulier donc, pour $n>2$, $\mathbf{G}$ est Kählérienne si et seulement si g est la métrique standard de la sphere S^{2n}.

EXAMPLE 0.3. Soit $(M,g)=(S^{2n},\text{std.})$, alors: $\mathcal{Z}(S^{2n})=SO(2n+1)/U(n)=$
$=SO(2n+2)/U(n+1)=\mathcal{Z}(n+1)=\{P\in SO(2n+2)|P=-{}^tP\}$,

$\mathbf{J}$ et $\mathbf{G}$ sont les structures standard; si

$$S^{2n}=\left\{\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_{2n+2}\end{bmatrix}\;\middle|\; x_{2n+2}=0,\ \sum_{h=1}^{2n+1}x_h^2=1\right\}$$

alors r: $\mathcal{Z}(n+1)\to S^{2n}$ est donnée par $r(P)=Pe_{2n+2}$: fibration de Penrose généralisée; enfin: $\mathcal{Z}(1)=\{P\}$; $\mathcal{Z}(2)=\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$; $\mathcal{Z}(3)=\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$; $\mathcal{Z}(4)=Q_6$.

1. UN RÉSULTAT PRÉLIMINAIRE GÉNÉRAL

On a la proposition suivante:

PROPOSITION 1.1. *Pour toute variété Riemannienne (N,h) orientée de dimension $2n$, il n'existe pas de fonction plurisousharmonique non constante sur $\mathcal{Z}(N)$.*

DÉMONSTRATION. Pour toute variété presque complexe (S, J) on a:

$$(\#) \qquad 2\partial\bar{\partial}f(X,Y) = \sqrt{-1}\left\{XJY - YJX - J[X,Y] - \frac{1}{4}JT(X,Y)\right\}f$$

T étant le tenseur de Nijenhuis; si l'on calcule le tenseur de Nijenhuis T de $\mathbf{J}$ on obtient en particulier (cf. [3]) que T est horizontal et à valeurs verticales, c'est-à-dire: $T[P](X,Y) = 0$ si $X \in F_P$, $T[P](X,Y) \in F_P$; donc si $f\colon \mathcal{Z}(N) \to \mathbf{R}$ est plurisousharmonique, en particulier, elle est constante sur les fibres et donc $f = \hat{\lambda} = \lambda \circ r$ pour $\lambda\colon N \to \mathbf{R}$; si $X \in T_P\mathcal{Z}$, $X = X_h + X_v$, on a: $0 \leqslant \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f(X, \mathbf{J}Y) = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f(X_h, \mathbf{J}X_h) + 2\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f(X_h, \mathbf{J}X_v)$ mais, d'après $(\#)$ $\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f(X_h, \mathbf{J}X_v) = \mathbf{J}X_v(r_* X_h)\,\lambda/2$ et donc $\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}f \geqslant 0$ entraine $\lambda \equiv$ const. $\square$

2. VARIÉTÉS CONFORMÉMENT PLATES

On est intéressé à l'étude des espaces de twisteurs intégrables sur des variétés de dimension $2n$, avec $n > 2$: on est donc ramené à l'investigation des variétés conformément plates. Voilà quelques préliminaires sur les variétés conformément plates:

DÉFINITION 2.1. Une variété différentiable M de dimension m est dite *conformément plate* si elle admet un atlas de coordonnées locales $\mathcal{U} = (U_\alpha, \phi_\alpha)$, $\phi_\alpha : U_\alpha \to S^m$ tel que, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, alors $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}\colon \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ est un difféomorphisme conforme.

Bien sûr, si $m > 2$, il découle du théorème de Liouville que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$, sur toute composante connexe de $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ est la restriction d'une transformation de Moebius de S^m *i.e.* un élément du groupe $O(1, m+1)/\pm I$, agissant à gauche sur S^m de la manière suivante: si

$$A = \begin{bmatrix} a & {}^t\xi \\ \eta & K \end{bmatrix} \in O(1, m+1)$$

(et donc η, $\xi \in \mathbf{R}^{m+1}, k \in \mathbf{R}(m+1)$, $a \in \mathbf{R}$ avec $\|\eta\|^2 = a^2 - 1$; ${}^tK = a\xi$; ${}^tKK = I + \xi\,{}^t\xi$) alors $L_A(x) = (\eta + Kx)/(a + \langle x, \xi \rangle)$.

DÉFINITION 2.2. Soit M une variété conformément plate: une metrique Riemannienne g est dite *compatible avec la structure conformément plate*, si pour tout α, $\phi_\alpha\colon (U_\alpha, g) \to (S^m, \text{std})$ est une application conforme.

On a

PROPOSITION 2.3. *Soit M une variété simplement connexe, conformément plate de dimension $m \geqslant 3$: alors il existe une immersion $\Phi\colon M \to S^m$ qui est unique des transformations de Moebius près et qui est conforme par rapport à toute métrique Riemannienne compatible sur M.*

Il s'ensuit que, pour une variété conformément plate quelconque de dimension $m \geqslant 3$, on a l'immersion $\Phi\colon \tilde{M} \to S^m$, $\tilde{M}$ étant le revêtement universel de M; de plus, il existe un homomorphisme τ: $\pi_1(M) \to O(1, m+1)$, dit la représentation d'holonomie de la structure conforme, définie par la relation $\Phi \circ \gamma = \tau(\gamma) \circ \Phi$. On a que ker (τ) est un sousgroupe normal de $\pi_1(M)$ et Φ est définie sur $\hat{M} = \tilde{M}/\ker(\tau)$, c'est-à-dire que si $\Gamma =$ $= \pi_1(M)/\ker(\tau)$ alors:

1. $M = \hat{M}/\Gamma$;
2. Γ peut être identifié avec un sousgroupe de $O(1, m+1)/\pm I$.

En particulier donc, si l'on fixe sur M une métrique Riemannienne compatible g, en la relevant à $\hat{M}$, on obtient: Φ: $(\hat{M}, g) \to (S^m, \mathrm{std})$ est conforme donc $g =$ $= e^{2\sigma} \Phi^*(\mathrm{std}) = e^{2\sigma} g_0$ et, évidemment Γ agit par des g-isométries et donc par des difféomorphismes g_0-conformes.

Si $m = 2n$, à niveau des espaces de twisteurs, on a la situation suivante (v. prop. 0.1 1.): $\mathcal{Z}(M) = \mathcal{Z}(\hat{M})/\hat{\Gamma}$, où $\hat{\Gamma}$ peut être identifié avec un sousgroupe de $\mathrm{Aut}\,\mathcal{Z}(S^{2n}) =$ $= SO(2n+2, \mathbf{C})/\pm I$; l'action réelle à gauche de $\underline{SO}(2n+2, \mathbf{C})$ sur $\mathcal{Z}(S^{2n}) = \mathcal{Z}(n+1)$ est donnée par $P \to (A + BP)\, P\, (A + BP)^{-1}$, $A + \sqrt{-1}\, B \in SO(2n+2, \mathbf{C})$.

D'après prop. 0.2 on a que $\mathcal{Z}(\tilde{M})$ et $\mathcal{Z}(\hat{M})$ sont des variétés Kählériennes.

Enfin, l'action induite par $O(1, 2n+1)$ sur $\mathcal{Z}(S^{2n})$ est donnée par l'immersion $O(1, 2n+1) \to SO(2n+2, \mathbf{C})$

$$\begin{bmatrix} a & {}^t\xi \\ \eta & K \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & \sqrt{-1}\,{}^t\xi \\ -\sqrt{-1}\,\eta & K \end{bmatrix}.$$

3. Résultats sur $\mathcal{Z}(M)$

Soit, dorénavant, (M, g) une variété Riemannienne orientée, de dimension $2n$ $(n > 2)$, conformément plate.

Soit $\mathbf{B}^{2n}$ la boule unitaire de $\mathbf{R}^{2n}$ munie de la métrique euclidienne; alors, d'après prop. 0.1 1., $\mathcal{Z}(\mathbf{B}^{2n})$ est un modèle local de $\mathcal{Z}(M)$.

La proposition suivante nous donne des informations sur la cohomologie des modeles locaux de $\mathcal{Z}(M)$.

Proposition 3.1 *Soit $n > 2$ et soit $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ un domaine tel quel $H^1(U, \mathbf{R}) = 0$: alors si $\mathcal{O}$ est le faisceau des germes des fonctions holomorphes sur $\mathcal{Z}(U)$ on a: $H^1(\mathcal{Z}(U), \mathcal{O}) = 0$.*

Démonstration.

1. $U = \mathbf{R}^{2n} = S^{2n} - \{p\}$: alors $\mathcal{Z}(U) = \mathcal{Z}(n+1) - \mathcal{Z}(n)$ et $H^1(\mathcal{Z}(n+1) -$ $- \mathcal{Z}(n), \mathcal{O}) = 0$ est une conséquence de la suite de cohomologie locale et du théorème de Bott sur les groupes de cohomologie des fibrés homogènes. Il faut noter que, pour $n = 2$ on a $\dim_{\mathbf{C}} H^1(\mathbf{P}^3(\mathbf{C}) - \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathcal{O}) = \infty$.

2. $U \subsetneq \mathbf{R}^{2n}$: soit $\alpha \in \Lambda^{0,1}(\mathcal{Z}(U))$ avec $\bar{\partial}\alpha = 0$: on cherche $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{Z}(U))$ telle que $\bar{\partial} f = \alpha$; on va construire f en trois étapes:

a) puisque $H^1(\mathcal{Z}(n), \mathcal{O}) = 0$ il suffit de considérer le cas α horizontale *i.e.* $\alpha(X) = 0$ pour tout X vertical;

b) si l'on fixe $x_0 \in U$, on peut trouver $\hat{\alpha} \in \Lambda^{0,1}(\mathcal{Z}(\mathbf{R}^{2n}))$ telle que: *i*) $\hat{\alpha} = \alpha$ sur $\mathcal{Z}_{x_0}$, *ii*) $\bar{\partial}\hat{\alpha} = 0$, *iii*) $\hat{\alpha}$ est horizontale: on peut donc trouver $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{Z}(\mathbf{R}^{2n}))$ telle que $\bar{\partial}h = \hat{\alpha}$; il s'ensuit que *iv*) $h = \hat{\lambda} = \lambda \circ r$ pour $\lambda \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, *v*) $\hat{\alpha} = [r^*(d\lambda)]^{0,1}$;

c) on obtient donc que, sur $\mathcal{Z}(U)$, $\alpha = [r^*(\gamma)]^{0,1}$ pour $\gamma \in \Lambda^1(U)$ et la condition $\bar{\partial}\alpha = 0$ implique $d\gamma = 0$: donc $\gamma = d\mu$ et $\alpha = [r^*(d\mu)]^{0,1} = [d\hat{\mu}]^{0,1} = \bar{\partial}\hat{\mu}$. $\square$

En utilisant la prop. 3.1 on obtient

PROPOSITION 3.2. $\dim_{\mathbf{C}} H^{1,1}(\mathcal{Z}(M)) = 1$.

DÉMONSTRATION.

1. Le théoreme de Leray-Hirsch nous dit que:

$$H^2(\mathcal{Z}(M), \mathbf{C}) = H^2(M, \mathbf{C}) \oplus \mathbf{C}\, c_1(\mathcal{Z}(M)),$$

$c^1(\mathcal{Z}(M))$ étant la première classe de Chern de $\mathcal{Z}(M)$ et donc il suffit de démontrer que si $a \in H^{1,1}(\mathcal{Z}(M))$ est de la forme $a = r^*(\hat{a})$ pour $\hat{a} \in H^2(M, \mathbf{C})$, alors $a = 0$.

2. Soit donc $\hat{a} \in \Lambda^2(M)$ telle que $r^*(\hat{a}) = a + db$ pour $a \in \Lambda^{1,1}(\mathcal{Z}(M))$ et $da = 0$; soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M tel que, pour tout $i \in I$ U_i est conformément équivalent à la boule $\mathbf{B}^{2n}$ de $\mathbf{R}^{2n}$; alors il existe, pour tout $i \in I$, $c_i \in \Lambda^1(U_i)$ telle que $dc_i = \hat{a}$ sur U_i et donc $a = d(r^*(\hat{c}_i)) - db = ds_i$ sur $r^{-1}(U_i)$.

3. Pour tout $i \in I$ on peut construire $\lambda_i \in \mathcal{C}^\infty(r^{-1}(U_i))$ de telle façon que $\partial\bar{\partial}\lambda_i = a$ sur $r^{-1}(U_i)$: en effet, $s_i = s_i^{1,0} + s_i^{0,1}$, avec $\partial s_i^{1,0} = 0$ et $\bar{\partial}s_i^{0,1} = 0$; puisque $r^{-1}(U_i)$ est biholomorphiquement équivalent à $\mathcal{Z}(\mathbf{B}^{2n})$, en employant la prop. 3.1, on peut trouver $f_i, h_i \in \mathcal{C}^\infty(r^{-1}(U_i))$ telles que $\partial f_i = s_i^{1,0}$ et $\bar{\partial}h_i = s_i^{0,1}$ et donc $\lambda_i = h_i - f_i$ satisfait à $\partial\bar{\partial}\lambda_i = a$ sur $r^{-1}(U_i)$.

4. Si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, $k, j \in I$, alors $\lambda_j - \lambda_k$ est pluriharmonique et donc constante sur les composantes connexes de $r^{-1}(U_j \cap U_k)$: il s'ensuit que $\bar{\partial}\lambda_i = \eta$ est une $(0,1)$-forme globale et donc $\alpha = d\eta$. $\square$

Il faut noter que, bien que $\mathcal{Z}(\mathbf{B}^{2n})$ soit une variété Kählérienne, d'après Diederich-Pflug (cf. [4]) il n'existe pas de métrique Kählérienne complète sur $\mathcal{Z}(\mathbf{B}^{2n})$.

De la proposition 3.1 on peut deduire le résultat suivant:

THÉORÈME 3.3 ([2]). *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte connexe orientée de dimension $2n$, $n > 2$: alors l'espace de twisteurs de M est Kählérien si et seulement si (M, g) est conformement équivalente à la sphere S^{2n}.*

Le théorème 3.3 généralise les résultats de Hitchin ([6]) pour $n = 2$ (les seules variétés compactes connexes orientées de dimension 4 ayant un espace de twisteurs Kählérien sont S^4, avec $\mathcal{Z}(S^4) = \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ et $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ avec $\mathcal{Z}(\mathbf{P}^2(\mathbf{C})) = \mathbf{F}_3(\mathbf{C})$, variété de drapeaux dans $\mathbf{C}^3$) et étend ceux de Slupinski ([12]) pour $n = 2k$, $k > 1$.

DÉMONSTRATION. Puisque $\dim_{\mathbf{C}} H^{1,1}(\mathcal{Z}(M)) = 1$, la première classe de Chern de $\mathcal{Z}(M)$ est proportionelle à une classe de Kähler et donc, puisque $c_1(\mathcal{Z}(M)) \neq 0$, en particulier $kc_1(\mathcal{Z}(M)) > 0$ pour $k \in \mathbf{R}$; en considérant la restriction à une fibre, on a

$kc_1(\mathcal{Z}(M))_{|Z_x} > 0$ et puisque on sait que $c_1(\mathcal{Z}(M))_{|Z_x} = \lambda\, c_1(\mathcal{Z}_x) > 0$ on obtient $k > 0$ et donc $\mathcal{Z}(M)$ a une première classe de Chern positive.

On peut donc construire sur $\mathcal{Z}(M)$, en employant la solution de la conjecture de Calabi, une métrique Kählérienne à corbure de Ricci positive et par un résultat de Kobayashi [8], on obtient que $\mathcal{Z}(M)$ est simplement connexe; les fibres étant connexes, il s'ensuit que $\pi_1(M) = 0$ et donc $\phi\colon M \to S^{2n}$ est une équivalence conforme. $\square$

REMARQUE 3.4. F. Campana ([1]), par des méthodes tout à fait différentes a obtenu un résultat un peu plus fin, en remplaçant l'hypothèse $\mathcal{Z}(M)$ Kählérienne, par l'hypothèse $\mathcal{Z}(M)$ biméromorphe à une variété Kählérienne.

4. APPLICATIONS ET PROBLÈMES

1. Le théorème 3.3 permet de donner des nouveaux examples de variétés non Kählériennes, avec la possibilité d'en calculer la cohomologie; en effet si M et N sont conformément plates alors $M \# N$ est encore conformément plate et $\mathcal{Z}(M \# N)$ est non Kählériénne.

Encore, les variétés suivantes sont conformément plates:

i) $S^1 \times E$ avec $R_E = \lambda I$,

ii) $E \times F$ avec $R_F = -\lambda I$ *e.g.* $[\mathbf{P}^{2n}(\mathbf{R}) \# \dots \# \mathbf{P}^{2n}(\mathbf{R})]^{\sim}$, ($^{\sim}$revêtement d'orientation).

2. On peut considerer l'étude des variétés conformément plates de dimension paire, en employant la richesse de la structure complexe de leurs éspaces de twisteurs.

PROBLÈMES.

1. Un des invariants fondamentaux d'une variété conformément plate compacte est le signe de la courbure scalaire d'une métrique compatible: comment traduire ça en propriétés complexes de son espace de twisteurs?

2. Quelles sont les variétés compactes conformément plates dont le revêtement universel (résp. d'holonomie) admet un espace de twisteurs possedant une métrique Kählérienne complète?

3. Plus en général, quelles sont les ouverts $\Omega \subset \mathbf{R}^{2n}$ telles que $\mathcal{Z}(\Omega)$ possède une métrique Kählérienne complète?

(Si $\mathcal{Z}(\tilde{M})$ admet une métrique Kählérienne complète on s'attend (courbure scalaire de M) ≥ 0 et, (cf. [11]), donc $\tilde{M} = \hat{M}$, $\phi\colon \tilde{M} \to S^{2n}$ $1-1$ et $S^{2n} - \Phi(\tilde{M})$ a dimension de Hausdorff $\leq n-1$).

Questo lavoro è stato svolto con il contributo del M.U.R.S.T. fondi 40% e 60%.

Références

[1] F. Campana, *Espaces de twisteurs dont l'espace de cycles a ses composantes irréductibles compactes.* C.R.A.S., 308, s. I, 1989, 565-568.

[2] P. de Bartolomeis - L. Migliorini - A. Nannicini, *Espace de twisteurs Kähleriens.* C.R.A.S., 307, s. I, 1988, 259-261.

[3] P. de Bartolomeis - A. Nannicini, *Handbook of twistor geometry.* A paraître.

[4] K. Diederich - P. Pflug, *Ubër Gebiete mit vollständiger Kählermetrik.* Math. Ann., 257, 1981, 191-198.

[5] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of Algebraic varieties.* Lecture Notes in Math., 156, 1970.

[6] N. Hitchin, *Kählerian twistor spaces.* Proc. London Math. Soc., (3), 43, 1981, 133-150.

[7] S. Kobayashi, *On compact Kähler manifolds with positive Ricci tensor.* Ann. Math., 74, 1961, 570-574.

[8] N. Kuiper, *On conformally flat spaces in the large.* Ann. Math., 50, 1949, 916-924.

[9] S. Salamon, *Harmonic and holomorphic maps.* Lecture Notes in Math., 1164, 1985, 161-224.

[10] R. Schoen - S. T. Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature.* Inv. Math., 92, 1988, 47-71.

[11] M. Slupinski, *Espaces de twisteurs Kähleriens en dimension 4k, $k > 1$.* J. London Math. Soc., (2), 33, 1986, 535-542.

Dipartimento di Matematica Applicata «G. Sansone»
Università degli Studi di Firenze
Via S. Marta, 3 - 50139 Firenze