Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Virgilio Pannone

Sulle partizioni dei p-gruppi finiti. II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **2** (1991), n.3, p. 197–201.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1991_9_2_3_197_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1991.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 2:197-201 (1991)

Teoria dei gruppi. — *Sulle partizioni dei* p-*gruppi finiti. II.* Nota di VIRGILIO PANNONE, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

ABSTRACT. — *On the partitions of finite* p-*groups. II.* Partitions of finite p-groups are investigated, especially partitions with many components of a given order. A necessary condition is obtained (Theorem 1) for the existence of such partitions in terms of degrees of the irreducible characters. Some corollaries are then deduced, and an application is given to the groups of unitriangular matrices (Proposition 3).

KEY WORDS: Partition; p-group; Character.

RIASSUNTO. — Si studiano le partizioni dei p-gruppi finiti e, in particolare, quelle con molti componenti di un dato ordine. Si deriva una condizione necessaria (Teorema 1) per l'esistenza di tali partizioni in termini di gradi dei caratteri irriducibili. Si deducono quindi alcuni corollari e si dà un'applicazione ai gruppi di matrici unitriangolari (Proposizione 3).

1. INTRODUZIONE

La presente *Nota* prosegue lo studio delle partizioni dei p-gruppi finiti cominciato nella *Nota* [7]. Da essa richiamiamo alcune definizioni.

Una *partizione* di un gruppo finito G è una famiglia $\Pi = \{H_1, \dots, H_t\}$ di sottogruppi di G, nessuno dei quali è il gruppo $\{1\}$, tali che ogni elemento di G diverso dalla identità appartiene a uno ed un solo H_i. I sottogruppi H_i sono i *componenti* di Π. La partizione $\{G\}$ è detta *banale*. Una partizione è *abeliana* se tutti i sottogruppi componenti sono abeliani, ed è una *equipartizione di ordine h* se tutti i componenti hanno ordine h.

Diremo inoltre, per un p-gruppo G d'ordine $|G| = p^n$, che una partizione Π di G ha *ordine tipico* $\geqslant p^k$ [rispettivamente $= p^k$] se esiste un intero positivo k tale che almeno p^{n-k} componenti hanno ordine $\geqslant p^k$ [rispettivamente $= p^k$]. Tali componenti sono detti *tipici* e il loro insieme è denotato con Π_k. La nozione di partizione d'ordine tipico è evidentemente una generalizzazione di quella di equipartizione, e nel seguito sarà osservato che esistono p-gruppi che ammettono partizioni d'ordine tipico p^k ma non equipartizioni d'ordine p^k.

Un componente d'ordine p sarà anche detto *atomico*, e se $exp\ G = p$, l'equipartizione i cui componenti sono i sottogruppi di G d'ordine p sarà chiamata *atomica* (o *elementare*). È chiaro che, se $exp\ G = p$, da una partizione d'ordine tipico $\geqslant p^k$ se ne può ricavare una d'ordine tipico $= p^k$.

È immediato verificare che una partizione Π d'ordine tipico $\geqslant p^k$ soddisfa la disuguaglianza $|\Pi| \leqslant 1 + p + \dots + p^{n-k}$: questa giustifica l'uso del termine «tipico» per i componenti di Π_k. Si noti infine che se Π ha ordine tipico $\geqslant p^k$ ed esiste un intero $k' \geqslant k$ tale che ogni componente tipico ha ordine $\geqslant p^{k'}$, allora Π ha pure ordine tipico $\geqslant p^{k'}$. Invece, per un intero $k'' < k$, Π non ha necessariamente ordine tipico $\geqslant p^{k''}$: per

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1991.

esempio, se $n \geqslant 4$, un'equipartizione d'ordine p^2 ha più di p^{n-2} componenti d'ordine $\geqslant p^2$, ma non ha p^{n-1} componenti d'ordine $\geqslant p$.

Il Teorema 1 di questa *Nota* generalizza in parte il Teorema 1 di [7], nel quale si afferma tra l'altro che un p-gruppo G dotato di un'equipartizione non atomica non può avere classe massimale. Generalizzazioni del Teorema 1 sono possibili.

2. L'ipotesi $exp\, G = p$

Considereremo nel seguito partizioni di un p-gruppo G nell'ipotesi che sia $exp\, G = p$. È noto che nel caso delle equipartizioni tale ipotesi è superflua [4, Theorem 6]. Nel caso generale, se il *sottogruppo di Hughes* $H_p(G) = \langle x \in G \colon |x| \neq p \rangle$ è diverso da $\{1\}$, allora esso deve essere contenuto in un solo componente della partizione Π: ciò si ricava facilmente dal ben noto

Lemma di Baer-Kontorovich [1, p. 337; 5, p. 60]. *In un gruppo finito dotato di partizione, due elementi non identici, permutabili e appartenenti a componenti distinti hanno lo stesso ordine, e questo è un numero primo.*

Orbene, nella «maggior parte» dei p-gruppi, il sottogruppo $H_p(G)$, se $\neq \{1\}$, ha indice «piccolo» in G (1). In tale caso o Π ha almeno un componente «grande», oppure $exp\, G = p$. Non potendo qui approfondire il problema della relazione tra $|G \colon H_p(G)|$ e $|G|$, ci accontenteremo di osservare che vale la seguente

Proposizione 1. *Se $\Pi = \{H_i\}$ è una partizione di un p-gruppo finito G, con $|H_i| \leqslant \sqrt{|G|}$ per ogni i, allora $exp\, G = p$.*

Dimostrazione. Per assurdo, sia $exp\, G \neq p$ e sia $y \in G$ d'ordine $|y| > p$. Sia H_i un componente di Π che interseca $Z(G)$ non banalmente. Dal Lemma di Baer-Kontorovich segue subito che $exp\, H_j = p$, per ogni $j \neq i$, e quindi gli elementi d'ordine $\neq p$ appartengono tutti ad H_i (e così $H_p(G) \leqslant H_i$, $Z(G) \leqslant H_i$). In particolare, avendo i coniugati di y ordine $\neq p$ si ha: $|y^G| < |H_i|$. Dal lemma di Baer-Kontorovich si ha pure $C_G(y) \subsetneq H_i$, da cui $|y^G| \geqslant |H_i|^{-1} \cdot |G|$. Segue $|H_i|^2 > |G|$. Q.E.D.

3. Partizioni e gradi dei caratteri irriducibili

Sia G un gruppo finito. Denoteremo con $irr(G)$ l'insieme dei caratteri complessi irriducibili di G. Diremo che $\chi \in irr(G)$ è *lineare* se $\chi(1) = 1$. Denoteremo inoltre con d_G il minimo dei gradi dei caratteri irriducibili non lineari. Non è difficile dimostrare che se H è un sottogruppo di G con $G' \not\subseteq H$ allora vale la disuguaglianza

$$d_G < |G \colon H| \tag{1}$$

[2, p. 484; 3, p. 75]. Se G è un p-gruppo non abeliano, allora vale pure

$$d_G^2 < |G \colon G'| \tag{2}$$

(1) Vedasi la letteratura sul «Problema di Hughes».

[8, p. 330]. La seguente proposizione generalizza un'osservazione di I. M. Isaacs sulle partizioni abeliane [3, p. 30]. Una dimostrazione può effettuarsi come in [8, p. 329].

PROPOSIZIONE 2. *Sia L un gruppo finito non abeliano e* $\Sigma = \{K_i\}$ *una partizione di L. Sia* $\chi \in irr(G)$ *non lineare e tale che, per ogni i, la restrizione* χ_{K_i} *abbia tutti i costituenti lineari. Allora si ha:* $|\Sigma| > \chi(1)^{-1} \cdot |L|$.

Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA 1. *Sia G un p-gruppo finito non abeliano di ordine* p^n *ed esponente p, e sia* Π *una sua partizione non banale, abeliana o non, di ordine tipico* $\geqslant p^k$, *con* $k \geqslant 2$.
Allora $d_G \geqslant p^2$.

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, sia $\chi \in irr(G)$, $\chi(1) = p$. La restrizione χ_{H_i} al generico componente H_i è allora irriducibile oppure, evidentemente, si decompone come combinazione lineare di costituenti lineari. Se fosse $\chi_{H_i} \notin irr(H_i)$ per ogni i, dalla Proposizione 2 seguirebbe $|\Pi| > p^{-1}|G|$, il che contraddice la disuguaglianza per $|\Pi|$ data nell'Introduzione. Esiste pertanto $H_{i'} \in \Pi$ tale che $\chi_{H_{i'}} \in irr(H_{i'})$.

Per le proprietà dei normalizzanti dei sottogruppi di p-gruppi finiti esiste un sottogruppo I con $H_{i'} \leqslant I \leqslant G$ e $|I| = p^{n-k+2}$. Si noti che $\chi_I \in irr(I)$, $\chi_I(1) = p$, e così che I non è abeliano. Essendo $|G\colon I| = p^{k-2}$, ogni componente tipico interseca I in almeno p^2 elementi.

Sia Φ l'insieme dei componenti di Π che intersecano I in almeno p^3 elementi, Ψ l'insieme dei componenti di Π che intersecano I in esattamente p^2 elementi, $\Psi_I = \{H \cap I\colon H \in \Psi\}$ ($|\Psi_I| = |\Psi|$), e sia infine Ω_I l'insieme dei sottogruppi d'ordine p di I non contenuti in alcun elemento di Ψ_I. Le seguenti relazioni sono di verifica immediata:

$$|\Phi| \leqslant (|I| - 1) \cdot (p^3 - 1)^{-1}, \tag{3}$$

$$|\Omega_I| = (|I| - 1 - |\Psi_I|(p^2 - 1)) \cdot (p - 1)^{-1}, \tag{4}$$

$$|\Psi_I| \geqslant |\Pi_k| - |\Phi|. \tag{5}$$

Usando le (3), (4), (5) ed il fatto che $|I| = p^{n-k+2}$ nonché $|\Pi_k| \geqslant p^{n-k}$ otteniamo la seguente maggiorazione per la cardinalità della partizione $\Psi_I \cup \Omega_I$ di I:

$$\begin{aligned}
|\Psi_I \cup \Omega_I| &= |\Psi_I| + |\Omega_I| = |\Psi_I| + (|I| - 1 - |\Psi_I|(p^2 - 1))(p - 1)^{-1} = \\
&= -|\Psi_I| \cdot p + (|I| - 1)(p - 1)^{-1} \leqslant -|\Pi_k| \cdot p + |\Phi| \cdot p + (|I| - 1)(p - 1)^{-1} \leqslant \\
&\leqslant -|\Pi_k| \cdot p + (|I| - 1)(1 + p(1 + p + p^2)^{-1})(p - 1)^{-1} \leqslant \\
&\leqslant -p^{n-k+1} + (p^{n-k+2} - 1)(p - 1)^{-1}(1 + p(1 + p + p^2)^{-1}) = \\
&= -p^{n-k+1} + (1 + p + \ldots + p^{n-k+1})(1 + p(1 + p + p^2)^{-1}) < \\
&< 1 + \ldots + p^{n-k} + p^{-1} + 1 + \ldots + p^{n-k} = 2(p - 1)^{-1}(p^{n-k+1} - 1) + p^{-1} < p^{n-k+1}
\end{aligned}$$

avendo pure usato il fatto che, essendo G non abeliano, è $p \geqslant 3$.

D'altra parte, essendo $\Psi_I \cup \Omega_I$ una partizione *abeliana* del gruppo non abeliano I, dalla Proposizione 2 segue che $|\Psi_I \cup \Omega_I| > p^{-1} \cdot |I| = p^{n-k+1}$. Q.E.D.

COROLLARIO 1. *Un p-gruppo finito G con $\exp G = p$ e $|G\colon G'| = p^2$ (in particolare con $\exp G = p$ e classe massimale) non ammette partizioni non banali di ordine tipico $\geqslant p^k$, per ogni $k \geqslant 2$.*

DIMOSTRAZIONE. Se G è abeliano, il Corollario è immediato. Diversamente, da $|G\colon G'| = p^2$ e dalla (2) segue $d_G = p$. Il risultato segue allora dal Teorema 1. Q.E.D.

COROLLARIO 2. *Sia G un p-gruppo finito con $\exp G = p$, dotato di una partizione non banale di ordine tipico $\geqslant p^k$, $k \geqslant 2$. Se H è un sottogruppo di G con $|G\colon H| = p^2$, allora si ha $H \supseteq G'$, e quindi $H \triangleleft G$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $H \not\supseteq G'$, allora dalla (1) segue $d_G < |G\colon H| = p^2$, contro l'asserto del Teorema 1. Q.E.D.

COROLLARIO 3. *Sia G un p-gruppo finito di esponente p dotato di una partizione non banale di ordine tipico $\geqslant p^k$, $k \geqslant 2$. Allora, per ogni massimale $M < G$ si ha $M' = G'$.*

DIMOSTRAZIONE. Vale $G' = \Phi G$, $M' = \Phi M$, $|G\colon M| = p$. Essendo ΦM intersezione di sottogruppi di indice p in M (quindi di indice p^2 in G) dal Corollario 2 si ha $\Phi M \supseteq G'$. Q.E.D.

È noto [4, Theorem 10] che il gruppo $T_n(p^a)$ delle matrici unitriangolari (p. es. superiori) con entrate nel campo $GF(p^a)$ ammette, se $n \leqslant p$, equipartizioni d'ordine p^a, per ogni $a \geqslant 1$, i componenti essendo, in un certo senso, «copie del campo» (cfr. [8, p. 325]). È allora naturale chiedersi se esistano equipartizioni non atomiche di $T_n(p)$, $n \leqslant p$, gruppo le cui matrici hanno entrate variabili nel campo «atomico» $GF(p)$. Vale la

PROPOSIZIONE 3. *Per ogni primo p ed ogni intero positivo n, il gruppo $T_n(p)$ non ammette equipartizioni non banali non atomiche.*

La Proposizione 3 segue subito dal Corollario 2 per un'opportuna scelta di un sottogruppo $H \leqslant T_n(p)$. È anche possibile dimostrare la non esistenza di equipartizioni non banali di $T_n(p^a)$ d'ordine p^k con $k > a$, quando è $a > 1$.

Concludiamo questa *Nota* osservando che esistono p-gruppi che ammettono partizioni d'ordine tipico p^k ma non equipartizioni d'ordine p^k. Per esempio, il gruppo abeliano elementare di ordine p^5 ammette una partizione con un componente di ordine p^3 e tutti gli altri di ordine p^2. Ciò deriva da un risultato di B. Lindström [6, Theorem 1].

Parzialmente finanziato dal M.U.R.S.T.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER, *Partitionen endlicher Gruppen*. Math. Zeit., 75, 1961, 333-373.

[2] I. M. ISAACS - D. S. PASSMAN, *A characterization of groups in terms of the degrees of their characters. II*. Pac. J. Math., 24, 1968, 467-510.

[3] I. M. ISAACS, *Character theory of finite groups*. New York 1976.

[4] I. M. ISAACS, *Equally partitioned groups.* Pac. J. Math., 49, 1973, 109-116.
[5] P. KONTOROVICH, *Gruppi con base di decomposizione.* Mat. Sb., T. 12(54), N. 1, 1943, 56-70 (in russo).
[6] B. LINDSTRÖM, *Group partitions and mixed perfect codes.* Can. Math. Bull., (1) 18, 1975, 57-60.
[7] V. PANNONE, *Sulle partizioni dei p-gruppi finiti.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 82, fasc. 1, 1988, 1-5.
[8] V. PANNONE, *On the equipartitions of finite groups.* Ann. Mat. Pura e Appl., s. 4, 156, 1990, 323-339.

Dipartimento di Matematica «Ulisse Dini»
Università degli Studi di Firenze
Via Morgagni, 67/a - 50134 FIRENZE