Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Donato Passaseo

Su alcune successioni di soluzioni positive di problemi ellittici con esponente critico

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **3** (1992), n.1, p. 15–21.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_1_15_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 3:15-21 (1992)

Calcolo delle variazioni. — *Su alcune successioni di soluzioni positive di problemi ellittici con esponente critico.* Nota (*) di DONATO PASSASEO, presentata dal Socio E. De Giorgi.

ABSTRACT. — *On some sequences of positive solutions of elliptic problems with critical Sobolev exponent.* We present some existence and multiplicity results of positive solutions of the equation $\Delta u + u^{2^*-1} = 0$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$, where Ω is a bounded domain of $\boldsymbol{R}^n$ with $n \geqslant 3$ and $2^* = 2n/(n-2)$. We show that suitable perturbations of Ω give the existence of positive solutions which converge to zero as the capacity of the perturbations goes to zero. In particular, we obtain existence and multiplicity results of positive solutions in some bounded contractible domains, without any simmetry assumption.

KEY WORDS: Nonlinear elliptic equations; Critical Sobolev exponent; Positive solutions; Capacity.

RIASSUNTO. — Si presentano alcuni risultati di esistenza e molteplicità di soluzioni positive per l'equazione $\Delta u + u^{2^*-1} = 0$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$, dove Ω è un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$ con $n \geqslant 3$ e $2^* = 2n/(n-2)$. Si mostra che opportune perturbazioni di Ω comportano l'esistenza di soluzioni positive, che convergono a zero quando la capacità delle perturbazioni tende a zero. In particolare, si ottengono risultati di esistenza e molteplicità di soluzioni positive in alcuni aperti limitati e contrattili, non necessariamente simmetrici.

INTRODUZIONE

Sia Ω un aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$ con $n \geqslant 3$; poniamo $2^* = 2n/(n-2)$ (2^* è l'esponente critico per l'immersione di Sobolev). Consideriamo il seguente problema:

$$P(\Omega) \qquad \begin{cases} \Delta u + u^{2^*-1} = 0, \quad u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

le cui soluzioni, a meno di una costante moltiplicativa, sono evidentemente i punti critici u, con $u(x) > 0$ in Ω, del funzionale energia $f(u) = \int_\Omega |Du|^2\, dx$, vincolato sulla varietà $V = \{u \in H_0^{1,2}(\Omega) : \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1\}$ A causa della presenza dell'esponente critico 2^*, tale funzionale non soddisfa la ben nota condizione di compattezza di Palais-Smale e questo rende complicata la ricerca dei suoi punti critici: per esempio, qualunque sia il dominio limitato Ω, non esiste il minimo di f su V; è anzi ben noto che (vedi [6, 21]) tale minimo esiste soltanto per $\Omega = \boldsymbol{R}^n$; inoltre l'estremo inferiore di f su V è una costante positiva S (costante di Sobolev), la quale non dipende dall'aperto Ω ma soltanto dalla dimensione n dello spazio. Questo fatto è una conseguenza della ben nota identità di Pohozaev (vedi [18]). Dalla stessa identità si deduce anche che non esistono soluzioni del problema $P(\Omega)$ se l'aperto limitato Ω è stellato rispetto ad un punto. D'altra parte, se per esempio $\Omega = \{x \in \boldsymbol{R}^n : 0 < r_1 < |x| < r_2\}$, allora è facile verificare (vedi [12]) che esistono soluzioni radiali.

Inoltre, un importante risultato di Bahri-Coron (vedi [1, 8]) assicura che il problema $P(\Omega)$ ha almeno una soluzione in ogni aperto limitato Ω con topologia non bana-

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1991.

le (in un senso opportuno). L'esistenza di soluzioni di $P(\Omega)$ appare quindi strettamente legata alla forma di Ω; in [4] Brezis ha richiamato l'attenzione su tale questione. Successivamente sono stati ottenuti sia risultati di non esistenza in alcuni aperti limitati contrattili non stellati (vedi [7]), sia risultati di esistenza e molteplicità in aperti limitati contrattili ([10, 9, 14]) opportunamente vicini ad aperti non contrattili. In particolare, in [14] si trova per ogni intero p un aperto limitato contrattile Ω, con simmetria rotazionale rispetto ad un asse, in cui il problema $P(\Omega)$ ha almeno p soluzioni.

In questo lavoro si prosegue lo studio iniziato in [14], inteso a collegare l'esistenza e la molteplicità delle soluzioni di $P(\Omega)$ alla forma di Ω; alcuni dei risultati qui esposti erano stati preannunciati in [14] (si veda remark (28) di [14]). I Teoremi (1.3) e (2.1), in particolare, consentono di estendere i risultati di [14] provando analoghi teoremi di esistenza e molteplicità di soluzioni di $P(\Omega)$ per alcuni aperti Ω limitati e contrattili, che, a differenza di quelli considerati in [14], possono non avere alcuna proprietà di simmetria (vedi Esempio (1.5) e Osservazione (2.4)).

I principali risultati esposti in questo lavoro sono i Teoremi (1.3), (2.1) e (2.2).

Come è messo in evidenza anche mediante alcuni semplici esempi, questi risultati mostrano in sostanza che opportune perturbazioni di un aperto limitato $\tilde{\Omega}$, effettuate togliendo insiemi K_i di capacità infinitesima, comportano l'esistenza di una soluzione u_i del problema $P(\tilde{\Omega}\setminus K_i)$, che converge a zero per $i \to \infty$. Si noti che le soluzioni trovate in questo lavoro sono diverse da quelle ottenute in [9] e [10]: infatti, a differenza di quanto accade in [9] e [10], le soluzioni u_i non convergono a soluzioni del problema limite $P(\tilde{\Omega})$ e la loro esistenza non è legata alla risolubilità di $P(\tilde{\Omega})$.

Infine, i Teoremi (2.1) e (2.2) mostrano che, se si effettuano più perturbazioni con insiemi di capacità infinitesima, ognuna di queste influenza il numero delle soluzioni, consentendo quindi di ottenere aperti limitati in cui il numero delle soluzioni è arbitrariamente elevato.

Le dimostrazioni dei risultati presentati in questa *Nota* (insieme ad ulteriori sviluppi) sono esposte nel lavoro [17].

1. Risultati di esistenza

Utilizzeremo nel seguito le seguenti notazioni:

$$B(x,\rho) = \{y \in \boldsymbol{R}^n : |y-x| < \rho\} \qquad \text{dove} \qquad x \in \boldsymbol{R}^n \ \text{ e } \rho > 0.$$

Se A e B sono due sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}^n$, diciamo che A è strettamente contenuto in B ($A \subset\subset B$) se la chiusura di A è contenuta nella parte interna di B. Inoltre, per ogni aperto Ω di $\boldsymbol{R}^n$ considereremo $H_0^{1,2}(\Omega)$ immerso in $H_0^{1,2}(\boldsymbol{R}^n)$ intendendo ogni funzione di $H_0^{1,2}(\Omega)$ prolungata col valore 0 in $\boldsymbol{R}^n \setminus \Omega$.

(1.1) Definizione. Sia K un sottoinsieme di $\boldsymbol{R}^n$, tale che $K \subset\subset B(0,R)$. Diciamo capacità di K in $B(0,R)$ il seguente numero:

$$\operatorname{cap} K = \inf\left\{ \int_{B(0,R)} |Du|^2\,dx : u \in H_0^{1,2}(B(0,R)),\ \ u \geq 1 \text{ in } K \text{ nel senso di } H^1 \right\}$$

(nel seguito considereremo in $\boldsymbol{R}^n$ una fissata palla $B(0,R)$).

(1.2) Definizione. Siano H, W, Z sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}^n$ con H e W contenuti in Z. Diremo che H non si può deformare in Z ad un sottoinsieme di W se non esiste una funzione continua $h: H \times [0,1] \to Z$ tale che $h(x,0) = x$ e $h(x,1) \in W$ $\forall x \in H$.

(1.3) Teorema. *Supponiamo verificate le seguenti ipotesi*:

1) *siano* $\tilde{\Omega}$ *un aperto limitato regolare di* $\boldsymbol{R}^n$ *e* $\tilde{\Omega}^+$ *un insieme tale che* $\tilde{\Omega} \subset\subset \tilde{\Omega}^+ \subset\subset B(0,R)$; *siano* $H \subset \tilde{\Omega}$ *un insieme chiuso e* $(K_i)_i$, $(\Sigma_i)_i$ *due successioni di insiemi chiusi tali che* $\Sigma_i \subset\subset K_i \subset\subset B(0,R)$ *per ogni i e valga* $\lim_{i\to\infty} \operatorname{cap} K_i = 0$; *gli insiemi* K_i *abbiano frontiera regolare*;

2) *per ogni* $i \in N$ *l'insieme* H *non sia deformabile in* $\tilde{\Omega}^+$ *ad un sottoinsieme di* $\tilde{\Omega}^+ \setminus \Sigma_i$ *nel senso della definizione* (1.2).

Allora:

a) *Esiste* $\overline{m}$ *tale che per ogni* $i > \overline{m}$ *il problema* $P(\tilde{\Omega} \setminus K_i)$ *ha almeno una soluzione* u_i.

b) *Inoltre la successione* $(u_i)_i$ *converge debolmente a* 0 *in* $H_0^{1,2}(\boldsymbol{R}^n)$ (u_i *si intende prolungata con* 0) *ed esiste una successione* $(x_i)_i$ *di punti di* $\tilde{\Omega}$ *tale che, posto* $\overline{u}_i(x) = u_i(x + x_i)$, *si ha che le successioni* $(\overline{u}_i^{2^*})_i$ *e* $(|D\overline{u}_i|^2)_i$ *convergono in misura a* $S^{n/2}\delta_0$, *dove* δ_0 *è la misura di Dirac in* 0 *e* S *è la costante di Sobolev.*

(1.4) Corollario. *Valga l'ipotesi* 1) *del Teorema* (1.3); *se ora supponiamo che* H *non sia contrattile in* $\tilde{\Omega}^+$ *e che* $(\tilde{\Omega}^+ \setminus \Sigma_i)$ *sia contrattile in* $\tilde{\Omega}^+$ *per ogni* $i \in N$, *allora vale la tesi del Teorema* (1.3).

Semplici applicazioni dei risultati precedenti sono illustrate negli esempi che seguono. In particolare, mediante il Corollario (1.4) è facile costruire degli aperti limitati contrattili Ω, non necessariamente simmetrici come in [14], nei quali il problema $P(\Omega)$ ha soluzione.

(1.5) Esempio. Siano $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ e $r > 0$ tali che $B(x_0, r) \subset\subset B(0,1)$. Poniamo $\tilde{\Omega} = B(0,1) \setminus \overline{B(x_0, r)}$. Siano y_0 e y_1 due punti di $\boldsymbol{R}^n$, y_0 interno a $B(x_0, r)$ e y_1 esterno a $B(0,1)$; indichiamo con $[y_0, y_1]$ il segmento di estremi y_0 e y_1: $[y_0, y_1] = \{\lambda y_1 + (1-\lambda) y_0 : \lambda \in [0,1]\}$. Per ogni i poniamo $\Sigma_i = [y_0, y_1]$ e $K_i = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \operatorname{dist}(x, \Sigma_i) \leq 1/i\}$.

Allora il problema $P(\Omega_i)$ ha almeno una soluzione u_i negli aperti limitati e contrattili $\Omega_i = \tilde{\Omega} \setminus K_i$, per i sufficientemente grande. Infatti esiste $\varepsilon > 0$ tale che, posto $H = \partial B(x_0, r + \varepsilon)$ e $\tilde{\Omega}^+ = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \operatorname{dist}(x, \tilde{\Omega}) < \varepsilon\}$, risultano verificate le condizioni del Corollario (1.4).

Si noti che $P(\tilde{\Omega})$ ammette una soluzione per il teorema di Bahri-Coron ([1]) e che evidentemente le u_i non tendono a questa.

(1.6) ESEMPIO. Siano x_1 e x_2 in $\mathbf{R}^n$ e r_1, r_2 in $\mathbf{R}^+$ tali che $B(x_i, r_i) \subset\subset B(0,1)$ per $i = 1,2$ e inoltre $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{B(x_2, r_2)} = \emptyset$. Poniamo $\tilde{\Omega} = B(0,1) \setminus \bigcup_{i=1}^{2} \overline{B(x_i, r_i)}$. Sia $[y_1, y_2]$ un segmento con estremo y_1 interno a $B(x_1, r_1)$ e y_2 interno a $B(x_2, r_2)$; poniamo per ogni i $\Sigma_i = [y_1, y_2]$ e $K_i = \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, \Sigma_i) \leq 1/i\}$.

Allora $P(\tilde{\Omega} \setminus K_i)$ ha almeno una soluzione u_i per i sufficientemente grande.

Infatti esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per $H = \partial B(x_1, r_1 + \varepsilon)$ e $\tilde{\Omega}^+ = \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, \tilde{\Omega}) < \varepsilon\}$, risultano verificate le condizioni del Teorema (1.3).

Anche in questo caso si può notare che $P(\tilde{\Omega})$ ha almeno una soluzione $\tilde{u}$ per il teorema di Bahri-Coron ([1]) e che le u_i non tendono a $\tilde{u}$.

(1.7) ESEMPIO. Supponiamo $n \geqslant 4$ e poniamo

$$C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_i = 0 \text{ per } i = 3, \ldots, n\};$$

$$\Sigma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_i = 0 \text{ per } i = 3, \ldots, n\};$$

(si noti che risulta $\operatorname{cap} \Sigma = 0$ per $n \geq 4$);

$$T = \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, C) \leq 1/3\}; \quad \tilde{\Omega} = B(0,2) \setminus T; \quad K_i = \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, \Sigma) \leq 1/i\}.$$

Allora il problema $P(\tilde{\Omega} \setminus K_i)$ ha almeno una soluzione u_i per i abbastanza grande.

Infatti, posto $H = \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, C) = 1/2\}$, $\Sigma_i = \Sigma$ per ogni i e $\tilde{\Omega}^+ = \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, \tilde{\Omega}) < 1/4\}$, risultano verificate le condizioni del Teorema (1.3).

Anche in questo caso $P(\tilde{\Omega})$ ha almeno una soluzione $\tilde{u}$ per il teorema di Bahri-Coron ([1]) ma $\tilde{u}$ non è limite delle u_i.

Altri significativi esempi di applicazione del Teorema (1.3) in situazioni più generali sono riportati in [17].

2. MOLTEPLICITÀ DI SOLUZIONI POSITIVE

I seguenti teoremi estendono i risultati precedenti al caso in cui si effettuano più perturbazioni del dominio $\tilde{\Omega}$.

(2.1) TEOREMA. *Siano $\tilde{\Omega}$ e $\tilde{\Omega}^+$ come nel Teorema (1.3); siano $H_1, \ldots, H_p$ p insiemi chiusi contenuti in $\tilde{\Omega}$. Per ogni $s = 1, \ldots, p$ siano $(K_i^s)_i$ e $(\Sigma_i^s)_i$ due successioni di insiemi chiusi tali che $\Sigma_i^s \subset\subset K_i^s \subset\subset B(0, R)$ per ogni i e sia $\lim_{i \to \infty} \operatorname{cap} K_i^s = 0$. Supponiamo che gli insiemi K_i^s abbiano frontiera regolare e che per ogni i l'insieme H_s non sia deformabile in $\tilde{\Omega}^+$ ad un sottoinsieme di $\tilde{\Omega}^+ \setminus \Sigma_i^s$ nel senso della definizione (1.2). Infine richiediamo che gli insiemi $\overline{\bigcup_{i \in N} K_i^s}$ $(s = 1, \ldots, p)$ siano tra loro disgiunti e che risuli $H_r \cap \left(\overline{\bigcup_{i \in N} K_i^s}\right) = \emptyset$ per $r \neq s$ $(r, s = 1, \ldots, p)$.*

Allora:

a) Esistono p sottosuccessioni $(K_{i_j(1)}^1)_j, \ldots, (K_{i_j(p)}^p)_j$, rispettivamente estratte da

$(K_i^1)_i, \ldots, (K_i^p)_i$, *tali che per ogni* $j \in N$ *il problema* $P\left(\tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{s=1}^{p} K_{i_j(s)}^s\right)$ *ha almeno p soluzioni* $u_j^1, \ldots, u_j^p$, *aventi energie*

$$\int_{R^n} |Du_j^s|^2 \, dx \qquad (s = 1, \ldots, p)$$

tra loro distinte (qui si intende che le funzioni u_j^s *sono prolungate a tutto* R^n *col valore* 0).

b) Inoltre le successioni $(u_j^s)_j$ *convergono debolmente a* 0 *in* $H_0^{1,2}(R^n)$ *per ogni* $s = 1, \ldots, p$ *ed esistono delle successioni* $(x_j^s)_j$ *di punti di* $\tilde{\Omega}$ *tali che, posto* $\bar{u}_j^s(x) = u_j^s(x + x_j^s)$, *le successioni* $((\bar{u}_j^s)^{2^*})_j$ *e* $(|D\bar{u}_j^s|^2)_j$ *convergono in misura a* $S^{n/2}\delta_0$, *dove* δ_0 *è la misura di Dirac in* 0 *e S è la costante di Sobolev.*

(2.2) Teorema. *Siano* $\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}^+, H_s, (K_i^s)_i, (\Sigma_i^s)_i$, *con* $s = 1, \ldots, p$ *e* $i \in N$, *come nelle ipotesi del Teorema* (2.1). *Sia q un intero con* $0 < q < p$. *Allora*:

a) esistono q interi $i(1), \ldots, i(q)$ *(grandi quanto si vuole) ed esistono* $p - q$ *sottosuccessioni* $(K_{i_j(s)}^s)_j$ *per* $s = q + 1, \ldots, p$ *tali che, posto* $\Omega_j = \left(\tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{s=1}^{q} K_{i(s)}\right) \setminus \bigcup_{s=q+1}^{p} K_{i_j(s)}^s$, *il problema* $P(\Omega_j)$ *ha per ogni j almeno p soluzioni* $u_j^1, \ldots, u_j^p$ *con energie* $\int_{\Omega_j} |Du_j^s|^2 \, dx$ *diverse tra loro*;

b) inoltre le successioni $(u_j^1)_j, \ldots, (u_j^q)_j$ *convergono in* $H_0^{1,2}(R^n)$ *a soluzioni* $u_1, \ldots, u_q$ *(di diversa energia) di* $P\left(\tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{s=1}^{q} K_{i(s)}^s\right)$;

c) per $s = q + 1, \ldots, p$, *invece, le successioni* $(u_j^s)_j$ *convergono debolmente a* 0 *in* $H_0^{1,2}(R^n)$ *ed esistono delle successioni* $(x_j^s)_j$ *di punti di* $\left(\tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{s=1}^{q} K_{i(s)}^s\right)$ *tali che, posto* $\bar{u}_j^s(x) = u_j^s(x + x_j^s)$, *le successioni* $((\bar{u}_j^s)^{2^*})_j$ *e* $(|D\bar{u}_j^s|^2)_j$ *convergono in misura a* $S^{n/2}\delta_0$.

Una semplice applicazione dei Teoremi (2.1) e (2.2) è illustrata nell'esempio seguente; altri esempi più generali sono riportati in [17].

(2.3) Esempio. Siano $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$ p segmenti chiusi, tra loro disgiunti, ognuno dei quali abbia almeno un estremo interno a $B(0,1)$. Supponiamo anche, per semplicità, che $\partial B(0,1)$ non contenga alcun estremo dei segmenti $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$. Detti $x_1, \ldots, x_m$ i punti di $B(0,1)$ che sono estremi di tali segmenti, siano $r_1, \ldots, r_m$ in R^+ tali che gli insiemi $\overline{B(x_j, r_j)}$ $(j = 1, \ldots, m)$ siano tra loro disgiunti, tutti contenuti in $B(0,1)$ e inoltre risulti $\overline{B(x_j, r_j)} \cap \Sigma_s = \emptyset$ se x_j non è estremo di Σ_s. Poniamo $\tilde{\Omega} = B(0,1) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \overline{B(x_j, r_j)}$ e, per μ abbastanza grande, $K_i^s = \{x \in R^n : \operatorname{dist}(x, \Sigma_s) \le (\mu + i)^{-1}\}$.

Allora vale la tesi del Teorema (2.1) e, per ogni intero q con $0 < q < p$, la tesi del Teorema (2.2).

Infatti, per ogni $s = 1, \ldots, p$ sia $x_{j(s)}$ un estremo di Σ_s contenuto in $B(0,1)$; per μ abbastanza grande risultano allora soddisfatte le ipotesi dei Teoremi (2.1) e (2.2) se per ogni $s = 1, \dots, p$ si pone $H_s = \partial B(x_{j(s)}, r_{j(s)} + 1/\mu)$, $\tilde{\Omega}^+ = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \operatorname{dist}(x, \tilde{\Omega}) < 1/\mu\}$ e $\Sigma_i^s = \Sigma_s$ per ogni $i \in N$.

(2.4) Osservazione. Si noti in particolare che, se nell'esempio precedente si assume che ognuno dei segmenti $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$ abbia un estremo interno a $B(0, 1)$ e l'altro esterno, allora gli aperti limitati $\left(\tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{s=1}^{p} K_{i_j(s)}^s\right)$ e Ω_j considerati nei Teoremi (2.1) e (2.2) sono contrattili e non presentano in generale alcuna proprietà di simmetria.

Quindi, mediante i Teoremi (2.1) e (2.2) è possibile costruire per ogni p un aperto limitato contrattile Ω, non necessariamente simmetrico come in [14], in cui il problema $P(\Omega)$ ha almeno p soluzioni.

(2.5) Osservazione. Per avere p soluzioni distinte, associate a p perturbazioni di Ω, nei Teoremi (2.1) e (2.2) si è fatto in modo da avere p distinti livelli critici del funzionale f sul vincolo V. Tuttavia è naturale aspettarsi che le soluzioni restino distinte anche quando i corrispondenti livelli critici coincidono. Nelle ipotesi del Teorema (2.1) dovrebbe valere cioè un risultato di questo tipo: esiste $\overline{m} > 0$ tale che, se $i(s) \geq \overline{m}$ per ogni $s = 1, \dots, p$, allora il problema $P\left(\tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{s=1}^{p} K_{i(s)}^s\right)$ ha almeno p soluzioni distinte $u_1, \dots, u_p$ (corrispondenti a livelli critici di f su V non necessariamente distinti), tali che per ogni $s = 1, \dots, p$ la soluzione u_s converge debolmente a 0 in $H_0^{1,2}(\boldsymbol{R}^n)$ per $i(s) \to \infty$ e

$$\int_{\tilde{\Omega}} |Du_s|^2 \, dx \to S^{n/2} .$$

Segnaliamo infine che, in analogia con alcuni recenti risultati (si veda [19]), è ragionevole ritenere che il numero delle soluzioni del problema $P\left(\tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{s=1}^{p} K_{i(s)}^s\right)$ sia almeno $(2^p - 1)$.

Bibliografia

[1] A. Bahri - J. M. Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain.* Comm. Pure Appl. Math., 41, 1988, 253-294.

[2] V. Benci - G. Cerami, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems.* Arch. Rat. Mech. Anal., in corso di stampa.

[3] V. Benci - G. Cerami - D. Passaseo, *On the number of the positive solutions of some nonlinear elliptic problems.* In: A. Ambrosetti e A. Marino (eds.), *Nonlinear Analysis. A Tribute in Honour of G. Prodi.* Scuola Norm. Sup. di Pisa, 1991, 93-107.

[4] H. Brezis, *Elliptic equations with limiting Sobolev exponent - The impact of Topology.* In: *Proceedings 50th Anniv. Courant Inst.* Comm. Pure Appl. Math., 39, 1986.

[5] H. Brezis - E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals.* Proc. Amer. Math. Soc., 88, 1983, 486-490.

[6] H. Brezis - L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure Appl. Math., 36, 1983, 437-477.

[7] A. Carpio Rodriguez - M. Comte - R. Levandowski, *A nonexistence result for a nonlinear equation involving critical Sobolev exponent.* Ann. Ist. H. Poincaré, Analyse non linéaire, in corso di stampa.

[8] J. M. Coron, *Topologie et cas limite des injections de Sobolev.* C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 299, 1984, 209-212.

[9] E. N. Dancer, *A note on an equation with critical exponent.* Bull. London Math. Soc., 20, 1988, 600-602.

[10] W. Ding, *Positive solutions of $\Delta u + u^{(n+2)/(n-2)} = 0$ on contractible domains.* In corso di stampa.

[11] B. Gidas - W. M. Ni - L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\boldsymbol{R}^N$.* In: L. Nachbin (ed.), *Mathematical Analysis and Applications.* Academic Press, Orlando 1981, Part A, 370-401.

[12] J. Kazdan - F. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math., 28, 1975, 567-597.

[13] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations: the limit case.* Rev. Mat. Iberoamericana, 1, 1985, 45-121, 145-201.

[14] D. Passaseo, *Multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent in some contractible domains.* Manuscripta Math., 65, 1989, 147-166.

[15] D. Passaseo, *Problemi ellittici con esponente critico. Forma del dominio e molteplicità di soluzioni positive.* Dip. di Mat. di Pisa, n. 564, 1990, in corso di stampa.

[16] D. Passaseo, *Esistenza e molteplicità di soluzioni positive per l'equazione $-\Delta u + a(x)u = u^{2^*-1}$ in domini limitati.* Dip. di Mat. di Pisa, n. 563, 1990, in corso di stampa.

[17] D. Passaseo, *Elliptic equations with critical nonlinearity. The effect of the domain shape on the number of positive solutions.* In preparazione.

[18] S. I. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$.* Sov. Math. Dokl., 6, 1965, 1408-1411.

[19] O. Rey, *Sur un problème variationnel non compact: l'effect de petits trous dans le domaine.* C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 308, 1989, 349-352.

[20] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities.* Math. Z., 187, 1984, 511-517.

[21] G. Talenti, *Best constants in Sobolev inequality.* Ann. Mat. Pura Appl., 110, 1976, 353-372.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pisa
Via F. Buonarroti, 2 - 56127 Pisa