Arrigo Bonisoli, Giorgio Faina

Sulla famiglia dei flocks lineari di una quadrica iperbolica assolutamente irriducibile di uno spazio proiettivo finito

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **3** (1992), n.2, p. 121–124.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_2_121_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 3:121-124 (1992)

Geometrie finite. — *Sulla famiglia dei flocks lineari di una quadrica iperbolica assolutamente irriducibile di uno spazio proiettivo finito.* Nota di ARRIGO BONISOLI e GIORGIO FAINA, presentata (*) dal Socio G. Zappa.

ABSTRACT. — *On the family of linear flocks of an absolutely irreducible hyperbolic quadric in a finite projective space.* In this *Note* we give a characterization of the set of all linear flocks of the absolutely irreducible hyperbolic quadric in $PG(3, q)$.

KEY WORDS: Finite projective spaces; Quadrics; Linear flocks.

RIASSUNTO. — In questa *Nota* diamo una caratterizzazione dell'insieme di tutti i flocks lineari della quadrica iperbolica assolutamente irriducibile in $PG(3, q)$.

1. In [4], Peter Dembowski ha introdotto il concetto di flock con riferimento alle famiglie di partizioni dell'insieme dei punti di un piano inversivo finito. Successivamente, tale concetto è stato esteso agli altri piani a cerchi (piani di Laguerre e di Minkowski) in modo del tutto naturale. L'idea si è dimostrata assai utile in molteplici applicazioni (cfr., ad es., [5]) ed è all'origine di numerosissime ricerche sotto l'impulso della sua stretta connessione con la Teoria dei Codici (cfr., ad es., [6, 10]).

Scopo di questo lavoro è quello di fornire una caratterizzazione della famiglia dei flocks lineari di una quadrica iperbolica assolutamente irriducibile di $PG(3, q)$.

Per quanto concerne le definizioni e le principali proprietà delle quadriche di $PG(3, q)$, dei piani di Minkowski ed i risultati di Teoria dei Gruppi usati in questa *Nota* rinviamo il lettore a [7, 12] e [8, 13], rispettivamente.

2. D'ora in avanti denoteremo con H la quadrica iperbolica assolutamente irriducibile di $PG(3, q)$. Ricordiamo che un piano di $PG(3, q)$ o è tangente ad H (cioè interseca H lungo una coppia di rette incidenti) oppure interseca H in una conica non degenere che diremo anche, per brevità, un *cerchio* di H. I punti ed i cerchi di H definiscono in modo naturale un piano di Minkowski ovoidale ed è ben noto che se q è pari, allora ogni piano di Minkowski è ottenibile in questo modo; esistono invece, se q è dispari, piani di Minkowski non ovoidali (cfr. [12]).

Si definisce flock di H ogni insieme massimale di cerchi disgiunti di H. Se $\mathcal{F}$ è un flock di H, allora $|\mathcal{F}| = q + 1$ ed $\mathcal{F}$ è una partizione di H. La famiglia dei cerchi di H ottenuta mediante i piani di un fascio di asse una retta esterna ad H stessa si dice anche *flock lineare* (di H). Vale al riguardo il seguente

TEOREMA 1. [5]. Se q è pari, allora ogni flock di H è lineare. Se q è dispari, allora esiste almeno un flock non-lineare di H.

(*) Nella seduta del 16 novembre 1991.

Recentemente è stato ottenuto uno dei risultati più importanti nell'ambito del progetto di classificazione dei flocks delle quadriche di $PG(3,q)$, quello della determinazione di tutti i possibili tipi di flocks di una quadrica iperbolica.

Teorema 2 [1, 11]. Un flock di H o è un flock lineare, o un flock di Thas oppure uno dei cosidetti flocks eccezionali che esistono per $q = 11, 23, 59$.

La famiglia $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_s\}$ dei flocks lineari di H è una famiglia di $s = q^2(q-1)^2/2$ partizioni tale che posto $\mathcal{B} = \bigcup_i F_i$ si abbia:

(a) $\mathcal{B}$ costa di tutti e soli i cerchi di H;

(b) per ogni coppia di cerchi disgiunti di $\mathcal{B}$ esiste una ed una sola $F_i \in \mathcal{F}$ che li contiene entrambi.

Scopo di questa *Nota* è di provare che le proprietà (a) e (b) sono sufficienti per caratterizzare la famiglia dei flocks lineari di H. Tale risultato viene a colmare una lacuna nell'ambito della teoria dei flocks lineari che il Teorema 2 aveva messo in evidenza. Proveremo infatti che vale il seguente

Teorema 3. Sia $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_t\}$ una qualsiasi famiglia di partizioni di H. Se $\mathcal{F}$ soddisfa le proprietà (a) e (b), allora ogni $F_i \in \mathcal{F}$ è un flock lineare e $t = q^2(q-1)^2/2$ (*i.e.* $\mathcal{F}$ coincide con la famiglia F dei flocks lineari di H).

3. Per dimostrare il Teorema 3, osserviamo innanzitutto che dalle due proprietà discende immediatamente che la famiglia $\mathcal{B}$ coincide con l'insieme di tutti i cerchi di H. In virtù di [11], è noto che se q è pari, allora gli unici flocks di H sono i flocks lineari. Pertanto, se q è pari, l'asserto è provato.

Supponiamo, d'ora in avanti, che q sia dispari.

Il piano di Minkowski che si costruisce naturalmente dalla famiglia dei cerchi di una quadrica iperbolica di $PG(3,q)$ può essere anche descritto come il piano di Minkowski associato al gruppo di permutazioni $PGL(2,q)$ nella sua azione naturale strettamente 3-transitiva sui punti della retta proiettiva $\mathcal{L} \equiv PG(1,q) = GF(q) \cup \{\infty\}$ (cfr. [9]). In questa descrizione un flock di H corrisponde ad un sottoinsieme strettamente transitivo di $PGL(2,q)$ (cfr. [3]). Alla luce di queste osservazioni, il problema della ricerca di una famiglia $\mathcal{F}$ soddisfacente le proprietà richieste può essere riformulato nel modo seguente:

(i) $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_t\}$ è una famiglia di sottoinsiemi strettamente transitivi di $PGL(2,q)$;

(ii) $\bigcup_i F_i = PGL(2,q)$;

(iii) prese due qualsiasi permutazioni $\varphi, \gamma \in PGL(2,q)$ tali che $\varphi\gamma^{-1}$ sia priva di punti fissi su $\mathcal{L}$, esiste uno ed un solo sottoinsieme F_i in $\mathcal{F}$ che contiene sia φ che γ.

Sulla base della classificazione dei flocks della quadrica iperbolica di $PG(3,q)$ con q dispari ricordata nel Teorema 2, si può affermare che ogni sottoinsieme strettamente transitivo di $PGL(2,q)$ è laterale destro di un sottogruppo regolare di $PGL(2,q)$

(cfr. [3]). Possiamo, pertanto, porre $F_i \equiv R_i h_i$ per $i = 1, \ldots, t$, dove R_i è un sottogruppo regolare di $PGL(2, q)$ ed $h_i \in PGL(2, q)$.

I sottogruppi regolari di $PGL(2, q)$ si suddividono in cinque famiglie:

(1) gruppi ciclici o cicli di Singer; (2) gruppi diedrici; (3) A_4 per $q = 11$; (4) S_4 per $q = 23$; (5) A_5 per $q = 59$.

Vogliamo dimostrare che $\mathcal{F}$ coincide necessariamente con la famiglia di tutti i laterali destri di tutti i cicli di Singer di $PG(1, q)$: poiché i laterali destri dei cicli di Singer corrispondono esattamente ai flocks lineari della quadrica iperbolica di $PG(3, q)$ (cfr. [2], pag. 43), si ha l'asserto.

Sfruttando la partizione del gruppo $PGL(2, q)$, sappiamo che la permutazione $\varphi\gamma^{-1} \in PGL(2, q)$ risulta priva di punti fissi su $\mathcal{L}$ se, e soltanto se, il suo ordine è un divisore di $q + 1$, nel qual caso esiste uno ed un solo ciclo di Singer che la contiene.

Dimostriamo che se R è un ciclo di Singer ed $h \in PGL(2, q)$, allora il laterale $Rh \in \mathcal{F}$.

Sia $\mu \in R$ una permutazione di ordine $q + 1$ e poniamo $\varphi = \mu h$. La permutazione $\varphi h^{-1} = \mu$ è priva di punti fissi, pertanto esiste uno ed un solo $F_i = R_i h_i \in \mathcal{F}$ tale che φ, $h \in F_i$. Abbiamo $\mu = \varphi h^{-1} \in R_i$ e poiché μ ha ordine $q + 1$ il sottogruppo R_i non può essere A_4 (poiché in A_4 esistono soltanto elementi di ordine 2 e 3), non può essere S_4 (poiché in S_4 esistono soltanto elementi di ordine 2, 3, e 4 il che implica $q = 3$, mentre sappiamo che un sottogruppo di $PGL(2, 3)$ isomorfo a S_4 non è regolare), non può essere A_5 (poiché in A_5 esistono soltanto elementi di ordine 2, 3 e 5) e non può essere diedrico (in quanto l'ordine di un elemento in un gruppo diedrico d'ordine $q + 1$ può essere soltanto 2 oppure un divisore di $(q + 1)/2$).

Dunque R_i deve necessariamente coincidere con l'unico ciclo di Singer contenente μ, cioè $R_i = R$.

Essendo $h \in F_i = R_j h_j$ e $R_j = R$, si ha $F_i = R_j h = Rh$ e $Rh \in \mathcal{F}$.

Abbiamo dimostrato che la famiglia $\mathcal{F}$ contiene necessariamente tutti i laterali destri di tutti i cicli di Singer.

Se $\mathcal{F}$ contenesse anche un laterale $R_j h_j$ dove R_j non è un ciclo di Singer, allora prese due permutazioni distinte $\varphi, \gamma \in R_j h_j$ esisterebbe, poiché $\varphi\gamma^{-1}$ è priva di punti fissi, un laterale Rh di un ciclo di Singer R tale che $\varphi, \gamma \in Rh$, il che violerebbe la (*iii*).

Il Teorema è dunque provato.

Questo lavoro è stato eseguito con il contributo del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica e del GNSAGA del CNR.

Bibliografia

[1] L. Bader - G. Lunardon, *On the flocks of* $Q^+(3, q)$. Geom. Ded., 29, 1989, 177-183.

[2] A. Bonisoli, *Insiemi di permutazionii e (B)-geometrie.* Tesi di Dottorato, Università di Modena, 1988.

[3] A. Bonisoli, *On the sharply 1-transitive subsets of* $PGL(2, p^m)$. J. Geometry, 31, 1988, 32-41.

[4] P. Dembowski, *Finite geometries.* Springer, Berlin 1968.
[5] J. Fisher - J. Thas, *Flocks in PG(3, q).* Math. Z., 169, 1979, 1-11.
[6] H. Halder - W. Heise, *Einführung in die Kombinatorik.* Hanser Verlag, München 1976.
[7] J. P. W. Hirschfeld, *Finite Projective Spaces of Three Dimensions.* Oxford Univ. Press, Oxford 1985.
[8] B. Huppert, *Endliche Gruppen I.* Springer, Berlin 1967.
[9] B. Segre, *Istituzioni di Geometria Superiore.* Vol. III, Istituto Matematico «G. Castelnuovo» dell'Università, Roma 1965.
[10] G. Tallini, *The theory of k-sets in a Galois space. The theory of error correcting codes.* Dip. Mat. Univ. Roma, 1985.
[11] J. Thas, *Flocks of non-singular ruled quadrics in PG(3,q).* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 59, 1975, 83-85.
[12] J. Thas, *Circle Geometries and Generalized Quadrangles.* Finite Geometries, L.N. Pure Appl. Math., 103, Dekker, New York 1985, 327-352.
[13] G. Zappa, *Fondamenti di Teoria dei Gruppi.* Voll. I e II, Cremonese, Roma 1965[1], 1970[2].

A. Bonisoli: Dipartimento di Matematica
Università degli Studi della Basilicata
Via N. Sauro, 85 - 85100 Potenza

G. Faina: Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Perugia
Via Vanvitelli, 1 - 06100 Perugia