Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Aldo Maceri

Un problema di ostacolo elastico non lineare per la piastra incastrata

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **3** (1992), n.2, p. 125–129.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_2_125_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 3:125-129 (1992)

Meccanica dei solidi. — *Un problema di ostacolo elastico non lineare per la piastra incastrata.* Nota (*) di Aldo Maceri, presentata dal Socio E. Giangreco.

Abstract. — *The clamped plate with non-linear elastic obstacle.* We modelize the problem of a linear elastic plate resting on elastic subgrade in the case of a non-linear response of this obstacle. In particular, we assume a unilateral nature of the contact and a cubic force-displacement relationship to describe the constitutive law of the subgrade. This model is a generalization of Winkler's one and is very useful to describe in some approximate way many technical cases. We prove existence and uniqueness results for this problem in the appropriate analytical framework, by using the functional analysis methods and the variational inequalities theory results.

Key words: Unilateral problems; Plates; Obstacle problems.

Riassunto. — Si formula il problema della piastra su mezzo elastico con riferimento ad una particolare modellazione del comportamento di tale mezzo. Si ipotizza infatti una natura unilaterale del contatto tra la piastra, supposta sottile e linearmente elastica, ed il mezzo di fondazione (od ostacolo), per il quale si ipotizza un legame cubico tra spostamenti e reazioni. Tale modello costituisce una generalizzazione di quello ben noto di Winkler e si presta alla descrizione approssimata di numerosi casi della tecnica. In un quadro analitico preciso, per il problema così formulato si dimostrano esistenza ed unicità della soluzione. I metodi impiegati sono quelli dell'Analisi funzionale classica e della teoria delle disequazioni variazionali.

Si studia il problema di determinare la configurazione deformata di una piastra sottile, non omogenea e non necessariamente isotropa, linearmente elastica ed incastrata al contorno. La piastra occupa nel suo piano medio x_1, x_2 la regione limitata e connessa Ω, che ipotizziamo essere un aperto di classe $\mathcal{R}^{(0)}$ [6]. Si orienta l'asse x_3, ortogonale al piano x_1, x_2, in modo che la terna x_1, x_2, x_3 è destrorsa. I carichi applicati agiscono secondo x_3 e consistono in forze $F_1, \ldots, F_m$ concentrate nei punti $y_1, \ldots, y_m$ di Ω nonché in forze q_0 distribuite su Ω ed essenzialmente limitate su Ω. Poniamo

$$\forall v \in H^2(\Omega) \qquad \langle q, v \rangle = \int_\Omega q_0 \, v \, dx + \sum_{j=1}^{m} F_j v(y_j)$$

sicché $q \in H^{-2}(\Omega)$.

La piastra è forzata od ostacolata da un mezzo elastico unilaterale di equazione $\psi = \psi(x_1, x_2)$, con $\psi \in L^2(\Omega)$. La reazione r esplicata dall'ostacolo agisce secondo x_3, è positiva nel verso di x_3 ed ha forma $r = -K_1(u-\psi)^+ - K_2((u-\psi)^+)^2 - K_3((u-\psi)^+)^3$, nella quale u denota lo spostamento trasversale, positivo nel verso di x_3; $K_1, K_2, K_3 \in L^\infty(\Omega)$; $K_1 \geqslant 0$ q.o. su Ω, $K_2 \geqslant 0$ q.o. su Ω, $K_3 \geqslant 0$ q.o. su Ω.

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1991.

Il caso particolare $K_2 = K_3 = 0$ q.o. su Ω e

(1)
$$r = -K(u-\psi)^+$$

è già stato analizzato in [5]. In questo lavoro l'indagine viene estesa al caso di ostacoli unilaterali per i quali la (1) costituisce una simulazione insoddisfacente.

Siano inoltre

$$A = \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} D^r(a_{rs}D^s),$$

con $a_{rs} \in L^\infty(\Omega)$ e $a_{rs} = a_{sr}$, un operatore differenziale del quarto ordine e $a_0 \in]0, +\infty[$ tali che

$$\sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s v\, D^r v\, dx \geq a_0 \sum_{|r|=2} \int_\Omega |D^r v|^2\, dx \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Il problema di determinare la configurazione di equilibrio della piastra, formulato per via distribuzionale, conduce al seguente problema ai limiti [1]

(2) $u \in H^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} D^r(a_{rs}D^s u) + K_1(u-\psi)^+ + K_2((u-\psi)^+)^2 + K_3((u-\psi)^+)^3 - q = 0 & \text{su } \Omega \\ u = 0 \quad s\text{-q.o. su } \partial\Omega, \\ du/dn = 0 \quad s\text{-q.o. su } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. Esistenza e unicità della soluzione

Osserviamo anzitutto che

Teorema 1. Le proposizioni seguenti sono equivalenti

1-1) u è soluzione del problema (2).

1-2) u è soluzione dell'equazione variazionale dei lavori virtuali

(3)
$$u \in H_0^2(\Omega): \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s u\, D^r v\, dx + \int_\Omega K_1 v(u-\psi)^+\, dx +$$
$$+ \int_\Omega K_2 v((u-\psi)^+)^2\, dx + \int_\Omega K_3 v((u-\psi)^+)^3\, dx - \langle q, v\rangle = 0 \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

[1] Si denota con s la misuta curvilinea [6] su $\partial\Omega$ e con $d\cdot/dn$ la derivata di $\cdot$ secondo la direzione ed il verso della normale esterna a $\partial\Omega$.

1-3) u è soluzione della disequazione variazionale di tipo misto

$$(4)\quad u \in H_0^2(\Omega): \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s u\, D^r(v-u)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega K_1((v-\psi)^+)^2\,dx +$$

$$+\frac{1}{3}\int_\Omega K_2((v-\psi)^+)^3\,dx + \frac{1}{4}\int_\Omega K_3((v-\psi)^+)^4\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega K_1((u-\psi)^+)^2\,dx -$$

$$-\frac{1}{3}\int_\Omega K_2((u-\psi)^+)^3\,dx - \frac{1}{4}\int_\Omega K_3((u-\psi)^+)^4\,dx - \langle q, v-u\rangle \geqslant 0 \qquad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

1-4) u è soluzione del problema di minimo dell'energia

$$(5)\quad u \in H_0^2(\Omega): \frac{1}{2}\sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s u\, D^r u\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega K_1((u-\psi)^+)^2\,dx + \frac{1}{3}\int_\Omega K_2((u-\psi)^+)^3\,dx + \frac{1}{4}\int_\Omega K_3((u-\psi)^+)^4\,dx -$$

$$-\langle q, u\rangle \leqslant \frac{1}{2}\sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s v\, D^r v\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega K_1((v-\psi)^+)^2\,dx +$$

$$+\frac{1}{3}\int_\Omega K_2((v-\psi)^+)^3\,dx + \frac{1}{4}\int_\Omega K_3((v-\psi)^+)^4\,dx - \langle q, v\rangle \qquad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Dimostrazione. 1-1) $\Rightarrow$ 1-2). Ovvio.

1-2) $\Rightarrow$ 1-3). Sia u soluzione del problema (3). Evidentemente qualunque sia $v \in H_0^2(\Omega)$ riesce (2)

$$0 = \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s u\, D^r(v-u)\,dx + \int_\Omega K_1(v-u)(u-\psi)^+\,dx + \int_\Omega K_2(v-u)((u-\psi)^+)^2\,dx +$$

$$+\int_\Omega K_3(v-u)((u-\psi)^+)^3\,dx - \langle q, v-u\rangle \leqslant \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s u\, D^r(v-u)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega K_1((v-\psi)^+)^2\,dx + \frac{1}{3}\int_\Omega K_2((v-\psi)^+)^3\,dx + \frac{1}{4}\int_\Omega K_3((v-\psi)^+)^4\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega K_1((u-\psi)^+)^2\,dx - \frac{1}{3}\int_\Omega K_2((u-\psi)^+)^3\,dx - \frac{1}{4}\int_\Omega K_3((u-\psi)^+)^4 - \langle q, v-u\rangle.$$

(2) Risulta $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$ $ab^+ - (b^+)^2 \leqslant (a^+)^2/2 - (b^+)^2/2$, $a(b^+)^2 - (b^+)^3 \leqslant (a^+)^3/3 - (b^+)^3/3$, $a(b^+)^3 - (b^+)^4 \leqslant (a^+)^4/4 - (b^+)^4/4$.

1-3) $\Rightarrow$ 1-4). Si procede come in [8].

1-4) $\Rightarrow$ 1-1). Poiché 1-2) $\Rightarrow$ 1-1) banalmente, basta provare che 1-4) $\Rightarrow$ 1-2). Sia dunque u soluzione del problema (5). Consideriamo il funzionale dell'energia J

$$v \in H_0^2(\Omega) \to \frac{1}{2} \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s v\, D^r v\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega K_1((v-\psi)^+)^2\, dx +$$

$$+ \frac{1}{3} \int_\Omega K_2((v-\psi)^+)^3\, dx + \frac{1}{4} \int_\Omega K_3((v-\psi)^+)^4\, dx - \langle q, v\rangle .$$

Siano $\{t_n\}$ una successione infinitesima tale che $0 < |t_n| \leqslant 1$ $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $v \in H_0^2(\Omega)$. Risultando

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u(x)+t_n v(x) - \psi(x)| - |u(x)-\psi(x)|}{t_n} = \begin{cases} v(x) & \text{se } u(x)-\psi(x) \geqslant 0 \\ -v(x) & \text{se } u(x)-\psi(x) < 0 \end{cases};$$

$$(((u+t_n v-\psi)^+)^3 - ((u-\psi)^+)^3)/3t_n = (v/6 + (|u+t_n v-\psi| - |u-\psi|)/6t_n)\cdot$$
$$\cdot(((u+t_n v-\psi)^+)^2 + (u+t_n v-\psi)^+(u-\psi)^+ + ((u-\psi)^+)^2) \qquad \forall n \in \boldsymbol{N};$$

$$(((u+t_n v-\psi)^+)^4 - ((u-\psi)^+)^4)/4t_n = (v/8 + (|u+t_n v-\psi| - |u-\psi|)/8t_n)\cdot$$
$$\cdot((u+t_n v-\psi)^+ + (u-\psi)^+)(((u+t_n v-\psi)^+)^2 + ((u-\psi)^+)^2) \qquad \forall n \in \boldsymbol{N};$$

le successioni $\{K_2(((u+t_n v-\psi)^+)^3 - ((u-\psi)^+)^3)/3t_n\}$, $\{K_3[((u+t_n v-\psi)^+)^4 - ((u-\psi)^+)^4]/4t_n\}$ convergono puntualmente q.o. in Ω verso $K_2 v((u-\psi)^+)^2$ e $K_3 v((u-\psi)^+)^3$ rispettivamente. Per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, di qui e dalle

$$|K_2(((u+t_n v-\psi)^+)^3 - ((u-\psi)^+)^3)/3t_n| \leqslant K_2|v|(|u-\psi|+|v|)^2 \qquad \text{su } \Omega \quad \forall n \in \boldsymbol{N},$$
$$|K_3(((u+t_n v-\psi)^+)^4 - ((u-\psi)^+)^4)/4t_n| \leqslant K_3|v|(|u-\psi|+|v|)^3 \qquad \text{su } \Omega \quad \forall n \in \boldsymbol{N},$$

si trae

$$(6) \qquad \begin{cases} \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1}{3} \int_\Omega K_2 \frac{((u+tv-\psi)^+)^3 - ((u-\psi)^+)^3}{t}\, dx = \int_\Omega K_2 v((u-\psi)^+)^2\, dx, \\ \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1}{4} \int_\Omega K_3 \frac{((u+tv-\psi)^+)^4 - ((u-\psi)^+)^4}{t}\, dx = \int_\Omega K_3 v((u-\psi)^+)^3\, dx. \end{cases}$$

Il funzionale J è evidentemente convesso in $H_0^2(\Omega)$. Procedendo come in [7] e tenendo conto delle (6) si prova che J è differenziabile secondo Gateaux in $H_0^2(\Omega)$ e risulta $\forall (w_1, w_2) \in H_0^2(\Omega)$

$$J'(w_1, w_2) = \sum_{\substack{|r|=2\\|s|=2}} \int_\Omega a_{rs} D^s w_1\, D^r w_2\, dx +$$

$$+ \int_\Omega K_1 w_2 (w_1-\psi)^+\, dx + \int_\Omega K_2 w_2((w_1-\psi)^+)^2\, dx + \int_\Omega K_3 w_2((w_1-\psi)^+)^3\, dx - \langle q, w_2\rangle .$$

Pertanto, essendo u un punto di minimo assoluto su $H_0^2(\Omega)$ per il funzionale J, $\forall v \in H_0^2(\Omega)$ $J'(u, v) = 0$ e ciò significa che u è soluzione del problema (2). □

Procedendo come in [5], si prova infine il

TEOREMA 2. Il problema (2) ammette soluzione unica.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces.* Academic Press, 1975.
[2] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems.* Van Nostrand, 1965.
[3] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contraction dans les espaces de Hilbert.* North-Holland, 1973.
[4] J. L. LIONS - G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities.* Comm. pure appl. math., 20, 1967, 493-519.
[5] A. MACERI, *La piastra incastrata in presenza di ostacoli.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 57, 1979, 1-7.
[6] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, 1967.
[7] R. TOSCANO - A. MACERI, *Sul problema della trave su suolo elastico unilaterale.* Boll. UMI, 17B, 1980, 352-372.
[8] R. TOSCANO - A. MACERI, *On the problem of the elastic plate on onesided foundation.* Meccanica, 2, 1980, 95-106.

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Via A. Gramsci, 53 - 00197 ROMA