

RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

MAURO FABRIZIO

Sull'invertibilità dell'equazione costitutiva della viscoelasticità lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 3 (1992), n.2, p. 141–148.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_2_141_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Fisica matematica. — *Sull'invertibilità dell'equazione costitutiva della viscoelasticità lineare.* Nota di MAURO FABRIZIO, presentata (*) dal Socio G. Fichera.

ABSTRACT. — *On the inversion of linear viscoelastic constitutive equation.* The inversion of viscoelastic constitutive equation (1.2) is studied in conjunction with different topological spaces on which this problem can be defined. Furthermore we show that the inversion of (1.2) does not admit a unique response, because the topology of state space determines the problem. This question exists also if the topology is joined to natural energy functions of the problem considered.

KEY WORDS: Viscoelasticity; Constitutive equation; Free energies.

RIASSUNTO. — Viene affrontato lo studio della inversione dell'equazione costitutiva (1.2) della viscoelasticità lineare, in funzione dei diversi spazi topologici su cui si può definire tale problema. In particolare si mostra che l'inversione di (1.2) ammette risposte completamente diverse al variare degli spazi di definizione, anche quando tali spazi vengono scelti sulla base delle topologie legate alle funzioni energia del problema considerato.

1. INTRODUZIONE

L'invertibilità della relazione costitutiva della elasticità lineare:

$$(1.1) \quad T(x, t) = A(x) E(x, t)$$

fra il tensore degli sforzi T e quello di deformazione infinitesima E è semplicemente assicurata dall'ipotesi che la matrice $A(x)$ sia invertibile in corrispondenza del punto x considerato. Tale condizione è inoltre necessaria per assicurare la buona risoluzione delle equazioni differenziali connesse con il sistema materiale (1.1).

Un analogo problema si presenta in viscoelasticità lineare, la cui equazione costitutiva

$$(1.2) \quad T(x, t) = G_0(x) E(x, t) + \int_0^{\infty} \dot{G}(x, s) E(x, t-s) ds$$

si considera invertita, per un assegnato punto x del corpo, quando possiamo risolverla rispetto a E e quindi scrivere:

$$(1.3) \quad E(x, t) = H_0(x) T(x, t) + \int_0^{\infty} \dot{H}(x, s) T(x, t-s) ds.$$

Il problema della invertibilità di (1.2), rispetto all'analogo problema che si presenta per la relazione (1.1), è sicuramente più complesso, in quanto ora l'equazione costitutiva (1.2), essendo di tipo funzionale, presenta un dominio di definizione di dimensione non finita, contrariamente al problema espresso dall'equazione (1.1). Pertanto la possibilità di invertire (1.2) sarà condizionata, oltre che dall'ampiezza del dominio di definizione anche dalla sua topologia.

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1992.

In questo lavoro seguiremo una impostazione che, avvalendosi dei concetti di energia libera e delle restrizioni che discendono dai principi di dissipatività, consenta di definire «naturalmente» il dominio di definizione e la relativa topologia.

Nonostante ciò si può osservare però che, essendo l'energia libera non unica per i sistemi viscoelastici si presentano, come conseguenza di ciò, diverse possibili definizioni per lo spazio di definizione del funzionale (1.2). Inoltre rispetto a tali differenti spazi il problema dell'invertibilità di (1.2) presenta differenti risposte. Infatti provveremo che, rispetto ad uno spazio topologico che deriva da una assegnata energia libera, l'equazione (1.2) è invertibile, mentre quando lo spazio topologico discende da una diversa energia libera il controesempio proposto dal prof. G. Fichera e presentato in [1] fa cadere la possibilità di tale inversione (vedi anche [2]).

Pertanto anche in questo caso si può notare che i problemi connessi coi materiali dotati di memoria evanescente risentono sensibilmente della topologia utilizzata, come già osservato in [1, 3].

2. POSIZIONE DEL PROBLEMA

In un recente lavoro [4] è stato affrontato lo studio dell'esistenza dell'energia libera di un materiale viscoelastico del tipo (1.2). Per energia libera si intende una funzione sufficientemente regolare ψ tale che per processi differenziabili risulti:

$$(2.1) \quad \dot{\psi}(t) \leq T(t) \cdot \dot{E}(t) \quad (1).$$

La determinazione di una energia libera è di grande interesse per i problemi di stabilità connessi con il relativo sistema differenziale, in quanto, si può provare, che questa funzione risulta almeno per i problemi lineari una funzione di Ljapunov per il sistema.

In [6] è stato osservato che il Secondo Principio della Termodinamica comporta sulla funzione $\dot{G}$, che assumeremo nel seguito di $L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty)$, la limitazione di Graffi [7], cioè la restrizione:

$$(2.2) \quad \hat{G}_s(\omega) = \int_0^\infty \dot{G}(s) \sin \omega s \, ds < 0, \quad \omega > 0.$$

Inoltre supporremo $\dot{G}$ assolutamente continua su $[0, \infty)$, quindi $\ddot{G} \in L^1(0, \infty)$ ed i tensori G_0 e G_∞ definiti positivi, dove

$$(2.3) \quad G_\infty := G_0 + \int_0^\infty \dot{G}(s) \, ds.$$

Evidentemente, il problema della invertibilità di (1.2) non può essere compiutamente affrontato e risolto senza precisare il dominio di definizione del funzionale

(1) Inoltre, seguendo Graffi [5], supporremo che una energia libera è completamente caratterizzata oltre che dalla condizione (2.1), anche dalle ipotesi che $T = \partial_E \psi$ e che $\psi(E')$ risulti minima sulle storie costanti, nel senso che fra tutte le storie che presentano lo stesso valore attuale $E'(0) = E(t)$, la ψ è minima in corrispondenza della storia costante: $E'(s) = E(t)$, $s \in [0, \infty)$.

(1.2). Per tale ragione occorre introdurre il concetto di *storia del tensore di deformazione infinitesimo*:

$$(2.4) \quad E^t(x, s) := E(x, t - s) \quad s \in [0, \infty).$$

È noto che in viscoelasticità lo stato del materiale è definito unicamente assegnando il valore della storia $E^t(x)$. In effetti tale valore consente, mediante (1.2), di individuare univocamente non solo il tensore degli sforzi T all'istante t , ma anche i valori di T precedenti tale istante, in altre parole la storia T^t del tensore degli sforzi e ciò in virtù della formula:

$$(2.5) \quad T^t(x, s) = T(x, t - s) = G_0(x) E(x, t - s) + \int_0^\infty \dot{G}(x, r) E^{t-s}(r) dr$$

che considereremo sempre riferita ad un fissato punto x del corpo viscoelastico considerato.

Come già osservato per definire compiutamente il problema della inversione di (1.2) è necessario precisare lo spazio delle storie di deformazione $\mathcal{O}_E$ e quello $\mathcal{O}_T$ delle storie del tensore degli sforzi T .

Supporremo il materiale invariabile col tempo, per cui lo spazio $\mathcal{O}_E$ della storia su cui è definito il funzionale (1.2) non dipenderà dall'istante t considerato, pertanto:

$$(2.6) \quad \hat{T}(t): \mathcal{O}_E \rightarrow \text{Sim}(V)$$

dove $\text{Sim}(V)$ rappresenta lo spazio dei tensori simmetrici che operano sullo spazio euclideo tridimensionale V .

La funzione (2.5) costituisce invece una applicazione del tipo:

$$(2.7) \quad \hat{T}^t: \mathcal{O}_E \rightarrow \mathcal{O}_T.$$

Come punto di partenza per una più completa e appropriata definizione dei domini presenti nella relazione (2.7) sceglieremo:

$$(2.8) \quad \mathcal{O}_E = \{E^t: E^t \in L^2(0, \infty)\}.$$

Per le ipotesi assunte su $\dot{G}$ avremo: $\mathcal{O}_T \in L^2(0, \infty)$.

Pertanto sotto queste ipotesi risultano certamente ben definiti i funzionali in studio.

3. ENERGIA LIBERA E NORMA

La caratterizzazione del dominio di (1.2) è stato oggetto di molte ricerche (vedi [8]) e risulta essenziale per definire le proprietà di memoria del materiale. Noi seguiremo l'idea che essendo l'energia libera un funzionale quadratico e definito positivo sullo spazio delle storie, sia possibile dedurre da essa una norma «naturale» per $\mathcal{O}_E$.

In base al teorema di Parseval l'equazione costitutiva (1.2) può anche essere rap-

presentata nello spazio $\mathcal{O}_T$ nella seguente nuova forma:

$$(3.1) \quad T(x, t) = G_0(x) E(x, t) + \int_0^{\infty} \hat{G}_s(x, \omega) \hat{E}_s^t(x, \omega) d\omega,$$

dove $\hat{E}_s^t$ è la trasformata di Fourier seno di E^t .

Evidentemente sullo spazio $\mathcal{O}_T$ le rappresentazioni (1.2), (3.1) sono completamente equivalenti.

Per le ipotesi su $\dot{G}$ è possibile provare che $\hat{G}_s(\omega)/\omega \in L^1(0, \infty)$, $\omega \hat{G}_s(\omega) \in L^\infty(0, \infty)$. Infatti risulta, per le proprietà delle trasformate di Fourier e il teorema di Parseval:

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega s - 1}{\omega} \hat{G}_s(\omega) d\omega = \int_0^s \dot{G}(\tau) d\tau = G(s) - G(0),$$

da cui

$$G(\infty) - G(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{G}_s(\omega)/\omega d\omega.$$

Infine, essendo $\dot{G}$ assolutamente continua su $[0, \infty)$, abbiamo per note formule sulla trasformata seno e coseno di Fourier: $\hat{\dot{G}}_c(\omega) = \omega \hat{G}_s(\omega) - \dot{G}(0)$.

Pertanto

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega \hat{G}_s(\omega) = \dot{G}(0),$$

quindi per la continuità di $\hat{G}_s(\omega)$ otteniamo la limitatezza di $\omega \hat{G}_s(\omega)$ su $[0, \infty)$.

Possiamo così affermare che la funzione:

$$(3.2) \quad \psi(E^t) = \frac{1}{2} E(t) G_\infty E(t) - \\ - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \omega \left[\left(\hat{E}_s^t(\omega) - \frac{E(t)}{\omega} \right) \hat{G}_s(\omega) \left(\hat{E}_s^t(\omega) - \frac{E(t)}{\omega} \right) + \hat{E}_c^t(\omega) \hat{G}_s(\omega) \hat{E}_c^t(\omega) \right] d\omega \quad (2)$$

è ben definita su $\mathcal{O}_E$ inoltre, per la condizione (2.2), risulta una quantità non negativa.

Pertanto, per le proprietà dell'espressione (3.2), è possibile introdurre su $\mathcal{O}_E$ una norma così definita:

$$(3.3) \quad \|E^t\|^2 = \frac{1}{2} E(t) G_\infty E(t) - \\ - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \omega \left[\left(\hat{E}_s^t(\omega) - \frac{E(t)}{\omega} \right) \hat{G}_s(\omega) \left(\hat{E}_s^t(\omega) - \frac{E(t)}{\omega} \right) + \hat{E}_c^t(\omega) \hat{G}_s(\omega) \hat{E}_c^t(\omega) \right] d\omega.$$

(2) Dove $\hat{E}_c^t(\omega)$ è la trasformata di Fourier coseno di $E^t(s)$.

Inoltre rispetto a tale norma il funzionale (1.2) risulta continuo, in base alla seguente disuguaglianza:

$$\int_0^\infty \hat{G}_s(\omega) E_s^t(\omega) d\omega \leq \left(\int_0^\infty \hat{G}_s(\omega)/\omega d\omega \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \omega E_s^t(\omega) \cdot \hat{G}_s(\omega) E_s^t(\omega) d\omega \right)^{1/2}.$$

Eseguiamo ora il completamento di $\mathcal{O}_E$ rispetto alla norma (3.3). Questo spazio verrà indicato in seguito con D_E . Come osservato in [4], D_E contiene in particolare le funzioni costanti e quelle che differiscono dalle costanti per funzioni di $L^2(0, \infty)$. Le funzioni periodiche invece non appartengono, in generale, a D_E .

È pertanto possibile estendere la funzione $\psi(E')$, definita in (3.2), a tutto l'insieme D_E . Su tale spazio la ψ risulta una energia libera. Infatti si può provare che (vedi [4]): $\dot{\psi}(E') = T(E') \cdot \dot{E}(t)$; inoltre:

$$(3.4) \quad \text{i) } T(E') = \partial_{E(t)} \psi(E'),$$

$$(3.5) \quad \text{ii) } \psi(E') \geq \psi(E^+(t)), \text{ per tutte le storie } E' \text{ tali che } E'(0) = E(t) \text{ dove } E^+(t) \text{ indica la storia costante } E'(s) = E(t), s \in [0, \infty).$$

Allorquando la funzione $\dot{G}$ possiede sufficienti proprietà di regolarità, come⁽³⁾

$$(3.6) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \dot{G}(s) \ddot{G}(\tau) E^t(s) E^t(\tau) ds d\tau \leq 0$$

è possibile introdurre un'altra funzione energia libera, determinata da Day [9], così definita:

$$(3.7) \quad \psi(E') = \frac{1}{2} E(t) G_\infty E(t) + \frac{1}{2a} \left(\int_0^\infty \dot{G}(s) (E^t(s) - E(t)) ds \right)^2$$

dove $a = G_0 - G_\infty$. È infatti immediato verificare la validità delle condizioni (3.4), (3.5), mentre la disuguaglianza (2.1) è assicurata dalle limitazioni (3.6).

All'energia (3.7) associamo la norma⁽⁴⁾:

$$(3.8) \quad |||E^t|||^2 = \frac{1}{2} E(t) G_\infty E(t) + \frac{1}{2a} \left(\int_0^\infty \dot{G}(s) (E^t(s) - E(t)) ds \right)^2.$$

Il funzionale (1.2) risulta ben definito e continuo sul dominio $\overline{D}_E$ che si ottiene da $\mathcal{O}_E$ completandolo con la norma (3.8). È facile provare che lo spazio $\overline{D}_E$ risulta costituito

⁽³⁾ Tale condizione è sicuramente verificata nel caso in cui G è un esponenziale.

⁽⁴⁾ Più correttamente l'espressione (3.8) definisce una semi-norma. È però sempre possibile restringere tale norma allo spazio quoziente che si ottiene considerando equivalenti due storie per cui:

$$|||E_1^t - E_2^t||| = 0$$

dall'insieme delle storie E^t tali che:

$$(3.9) \quad \int_0^{\infty} \dot{G}(s) E^t(s) ds < \infty$$

per cui, utilizzando l'ipotesi $\dot{G} \in L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty)$, possiamo affermare che allo spazio $\overline{D}_E$ apparterranno anche funzioni non limitate, per cui valga (3.9).

4. INVERTIBILITÀ DELLA RELAZIONE COSTITUTIVA

In questo numero affronteremo il problema dell'inversione del funzionale (1.2) o (2.5). Come osservato nell'introduzione, a causa dei differenti spazi su cui si può definire il problema, la questione non ammette un'unica precisa risposta.

Quando il problema viene posto scegliendo $T^t \in \mathcal{D}_T$ e $E^t \in \mathcal{D}_E$, allora l'ipotesi (2.3) e la definitezza positiva di G_0 e G_{∞} assicurano l'invertibilità richiesta. Per provare questo, eseguiamo la trasformata di Fourier⁽⁷⁾ dell'equazione (2.5):

$$(4.1) \quad \hat{T}_c^t(x, \omega) = [G_0(x) + \hat{G}(x, \omega)] \hat{E}_c^t(x, \omega)$$

dove il coefficiente $[G_0(x) + \hat{G}(x, \omega)]$ è sempre diverso da zero, più precisamente proveremo che esiste un $m \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$(4.2) \quad |G_0 + \hat{G}(\omega)| > m.$$

Infatti per $\omega \neq 0$ da (2.2) risulta $\text{Im}(G_0 + \hat{G}(\omega)) = \hat{G}_i(\omega) \neq 0$ mentre per $\omega = 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$ abbiamo

$$(4.3) \quad \text{Re}(G_0 + \hat{G}(\omega))|_{\omega=0} = G_{\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} (G_0 + \hat{G}(\omega)) = G_0.$$

Pertanto per la continuità di $\hat{G}(\omega)$ su $(0, \infty)$ si ha (4.2). È quindi possibile risolvere (4.1) rispetto a E_c^t , otteniamo infatti:

$$(4.4) \quad \hat{E}_c^t(x, \omega) = [G_0(x) + \hat{G}(x, \omega)]^{-1} \hat{T}_c^t(x, \omega)$$

inoltre da (4.2) abbiamo che la grandezza $[G_0 + \hat{G}(\omega)]$ risulta oltre che continua anche limitata rispetto ad ω . Scegliendo ora la storia $T^t \in L^2(0, \infty)$, allora la sua trasformata $\hat{T}_c^t \in L^2(0, \infty)$, quindi in base a (4.4) anche $\hat{E}_c^t \in L^2(0, \infty)$. Per cui $\hat{E}_c^t$ è antitrasformabile e la sua antitrasformata E_c^t appartiene a $L^2(0, \infty)$. Pertanto da (4.4) otteniamo una rappresentazione del tipo (1.3), dove $H_0 = G_0^{-1}$.

Con un ragionamento analogo possiamo pervenire alla inversione di (2.5) quando scegliamo $E^t, T^t \in D_E$.

⁽⁷⁾ Per trasformata di Fourier delle storie $E^t(s)$, $T^t(s)$, definite nell'intervallo $[0, \infty)$, intenderemo le trasformate delle corrispondenti funzioni pari estese a tutto $(-\infty, \infty)$. Anche la funzione $\dot{G}$ viene estesa a $(-\infty, 0)$ ma ivi è supposta nulla.

Impostiamo ora il problema della inversione di (2.5) allorché il dominio delle storie è costituito dall'insieme $\bar{D}_E$, e quindi caratterizzato dalla limitazione (3.9).

Per provare la mancanza della invertibilità per l'equazione (2.5) è sufficiente proporre un controesempio. A tal fine considereremo il problema presentato dal prof. G. Fichera in [1].

Pertanto limitatamente al caso unidimensionale scegliamo $G = (1 + \exp(-s))/2$ per cui $\dot{G} = -(\exp(-s))/2$. In tale caso l'energia libera di Day assume la forma:

$$(4.5) \quad \psi(E^t) = \frac{1}{2} E(t) G_\infty E(t) + \frac{1}{8} \left(\int_0^\infty (E^t(s) - E(t)) \exp(-s) ds \right)^2.$$

Inoltre essa è definita nell'insieme:

$$(4.6) \quad \bar{D}_E = \left\{ E^t : \int_0^\infty E^t(s) \exp(-s) ds < \infty \right\}$$

a cui appartiene la storia $E^t(s) = c \exp(-(t-s)/2)$ e la cui norma definita in (3.8) è non nulla.

Questa storia sostituita in (2.5) fornisce l'equazione:

$$(4.7) \quad T^t(s) = c \exp(-(t-s)/2) \left(1 - \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-r/2) dr \right) = 0.$$

Pertanto la funzione (2.5) non risulta iniettiva nel dominio $\bar{D}_E$.

Possiamo inoltre osservare la mancanza della invertibilità del funzionale (1.2) anche quando, invece dello spazio $\bar{D}_E$, ambientiamo il problema nello spazio definito in [1] nel modo seguente:

$$\tilde{D}_E = \left\{ E^t : \int_0^\infty |E^t(s)|^2 b(s) ds < \infty \right\}$$

dove $b = \exp(-2\gamma s)$, con γ tale che $1/2 < \gamma < 1$. La funzione di rilassamento $G = (1 + \exp(-s))/2$ e quella di influenza b sono tali che:

$$\int_0^\infty |\dot{G}(s)|^2 b^{-2}(s) ds < \infty,$$

per cui lo spazio $\tilde{D}_E$ verifica la proprietà di memoria evanescente. Inoltre la storia $E^t = c \exp(-(t-s)/2)$ appartiene a $\tilde{D}_E$ e verifica (4.7). Pertanto il funzionale (1.2) non è invertibile nell'insieme $\tilde{D}_E$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. FICHERA, *I difficili rapporti fra l'analisi funzionale e la fisica matematica*. Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, 1, 1990, 161-170.
- [2] G. FICHERA, *On linear viscoelasticity*. Mech. Res. Comm., 12, 1985, 241-242.

- [3] G. FICHERA, *Sui materiali elastici con memoria*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, v. 82, 1988, 473-478.
- [4] M. FABRIZIO - A. MORRO - C. GIORGI, *Normed spaces and free energies for linear viscoelasticity*. In corso di stampa.
- [5] D. GRAFFI, *Sull'equazione analitica di alcune grandezze termodinamiche nei materiali con memoria*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 68, 1982, 17-29.
- [6] M. FABRIZIO - A. MORRO, *Viscoelastic relaxation functions compatible with thermodynamics*. J. Elasticity, 19, 1988, 63-75.
- [7] D. GRAFFI, *Sui problemi dell'ereditarietà lineare*. Nuovo Cimento, 5, 1928, 53-96.
- [8] B. D. COLEMAN - V. J. MIZEL, *On the general theory of fading memory*. Arch. Rational Mech. Anal., 29, 1968, 18-31.
- [9] W. A. DAY, *A theory of thermodynamics for materials with memory*. Arch. Rational Mech. Anal., 34, 1969, 85-96.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Bologna
Piazza di Porta S. Donato, 5 - 40127 BOLOGNA