Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Flavia Lanzara

Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema degli spostamenti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **3** (1992), n.3, p. 149–171.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_3_149_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 3:149-171 (1992)

Matematica. — *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema degli spostamenti.* Nota II di FLAVIA LANZARA, presentata (*) dal Socio G. Fichera.

ABSTRACT. — *Theory and applications of intermediate operators: elastostatics with discontinuous coefficients, the problem of the displacements.* The theory of *Note* I is applied to the boundary value problem of Elastostatics when vanishing displacements are given on the boundary. The elastic coefficients are only supposed to be bounded and measurable. As a base problem the analogous B. V. P. for an isotropic homogeneous body is assumed. For this problem the Green operator and the Green matrix are explicitly constructed and their properties exhaustively studied, so that the theory of Intermediate Operators, as developed in *Note* I, can be applied to the general case.

KEY WORDS: Elastostatics with discontinuous coefficients; Green's operator; Green's matrix.

RIASSUNTO. — Viene applicata la teoria della *Nota* I al problema al contorno dell'elastostatica quando sul contorno vengono prescritti spostamenti nulli. I coefficienti elastici sono supposti solo limitati e misurabili. Come problema base viene assunto l'analogo problema al contorno per un corpo isotropo omogeneo. Per un tale problema vengono esplicitamente costruiti l'operatore e la matrice di Green e le loro proprietà esaurientemente studiate, in modo tale che la teoria degli operatori intermedi, come sviluppata nella *Nota* I, possa essere applicata al caso generale.

Lo scopo di questa *Nota* e delle successive è di applicare i metodi sviluppati nella *Nota* precedente (1) ai problemi della teoria lineare dell'Elastostatica, considerati in ipotesi assai generali e cioè quando i coefficienti elastici sono funzioni misurabili e limitate. Le numerazioni delle sezioni e della bibliografia proseguono quelle della *Nota* I.

7. DESCRIZIONE DEI PROBLEMI CHE VERRANNO CONSIDERATI

Sia A un campo (cioè un aperto connesso) limitato dello spazio cartesiano $\boldsymbol{R}^r$. Si considera lo spazio a r dimensioni in modo da comprendere sia l'elasticità tridimensionale che l'elasticità piana. Si indichi con $x \equiv (x_1, \ldots, x_r)$ il generico punto di $\boldsymbol{R}^r$, dove x_i (i = 1,...,r) sono le coordinate cartesiane ortogonali di x.

Con $\{\varepsilon_{ih}\}$ indicheremo in seguito le componenti del tensore di deformazione linearizzato che, come è noto, si esprimono nel modo seguente per mezzo del vettore spostamento: $\varepsilon_{ih} = 2^{-1}(u_{i/h} + u_{h/i})$ (2).

I problemi che considereremo saranno del tipo seguente.

(*) Nella seduta del 14 marzo 1992.

(1) *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni*: *risultati generali*. Rend. Mat. Acc. Lincei, vol. 3, 1992, 79-101.

(2) Con il simbolo $u_{/h}$ si intende la derivata parziale $\partial u/\partial x_h$. Si fa uso della convenzione sommatoria: un indice ripetuto due volte sottointende una sommazione estesa a tutto l'insieme di variabilità dell'indice.

Assegnate le forze di massa f_i in modo tale che il corpo elastico assuma una configurazione di equilibrio, determinare lo spostamento $u = (u_1, \ldots, u_r)$ (e quindi il tensore di deformazione ε_{ih}) sotto le seguenti ipotesi:

I) *il corpo è fisso al bordo, cioè $u_i(x)=0$ se $x \in \partial A$ (problema degli spostamenti)*;

II) *nessuna forza agisce su ∂A (problema delle tensioni)*;

III) *decomposta ∂A in due parti disgiunte $\partial A = \overline{\partial_1 A} \cup \overline{\partial_2 A}$, su $\partial_1 A$ il corpo è fisso ($u_i(x)=0$, se $x \in \partial_1 A$) mentre su $\partial_2 A$ non agisce nessuna forza superficiale (problema misto)*.

Lo scopo è soprattutto quello di un'analisi quantitativa di questi problemi, specialmente centrata sul problema del calcolo esplicito dell'operatore di Green e della relativa matrice dei problemi testè indicati e quindi del calcolo delle soluzioni di essi con maggiorazioni esplicite dell'errore.

Al conseguimento di tali obiettivi si presterà la teoria generale elaborata nella *Nota* I.

Viste le ipotesi assai generali assunte sui coefficienti elastici (cfr. sez. 9), nei problemi considerati rientrano i cosiddetti problemi di trasmissione relativi a due o più corpi elastici incastrati uno nell'altro. Siffatto tipo di problemi venne per la prima volta considerato da Mauro Picone nel caso di due corpi elastici isotropi e omogenei con differenti costanti di Lamè (cfr. [22]). Ci soffermeremo con particolare attenzione su questi problemi per ben chiarire i modi più convenienti con i quali essi possono inquadrarsi nella teoria generale svolta in queste *Note*.

Questa *Nota* II è dedicata al problema degli spostamenti. In accordo alla teoria generale sviluppata nella *Nota* I, i processi di approssimazione là descritti, fondati sulla teoria degli operatori intermedi, si basano sulla conoscenza dell'operatore di Green per un problema base. La «filosofia» che mi propongo di seguire nella presente *Nota* è quella di assumere come problema base degli spostamenti per un corpo elastico a coefficienti discontinui il problema relativo ad un corpo isotropo e omogeneo. In effetti per tale problema G. Fichera ha esplicitamente costruito per un corpo arbitrario l'operatore di Green. Partendo da tale operatore sarà poi possibile applicare la teoria della *Nota* I e pervenire alla soluzione del problema degli spostamenti nel caso generale. È tuttavia necessario approfondire taluni aspetti della teoria di G. Fichera, specie per quanto concerne le proprietà di convergenza degli algoritmi impiegati in tale teoria. Dedicheremo pertanto la prima sezione di questa *Nota* al problema degli spostamenti per un corpo isotropo e omogeneo.

8. Il problema degli spostamenti per un corpo elastico isotropo omogeneo

Sia A un campo limitato di $\boldsymbol{R}^r$. Supponiamo che esso sia propriamente regolare di classe C^1 (cfr. [23, pp. 206-207]) (3).

(3) La definizione di campo A propriamente regolare permette che la frontiera ∂A, composta da pezzi di ipersuperficie regolare, presenti delle singolarità ma non di tipo molto *patologico* quali *spine, punti o spigoli cuspidali etc*. Sono, ad esempio, campi propriamente regolari quelli che si ottengono trasformando con un omeomorfismo di classe C^2 un campo poliedrico.

Il sistema alle derivate parziali relativo all'equilibrio di un corpo elastico isotropo e omogeneo è, com'è ben noto, $\mu u_{i/hh} + (\lambda + \mu) u_{h/ih} + f_i = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Supponendo, per ora, soltanto $\mu \neq 0$ e ponendo $\nu = (\lambda + \mu)/\mu$ (sostituendo altresì f_i/μ con f_i) il sistema si scrive

$$u_{i/hh} + \nu u_{h/ih} + f_i = 0 \quad \text{in } A \ (i = 1, \ldots, r). \tag{8.1}$$

Osserviamo preliminarmente che l'operatore differenziale a primo membro della (8.1) è ellittico secondo Petrovski se e solo se $\nu \neq -1$.

Introdotta la matrice di operatori differenziali $E = ((E_{ih}))$ $(i, h = 1, \ldots, r)$ così definita

$$E_{ih} u_h = -(\delta_{ih} u_{h/kk} + \nu u_{h/ih}) \qquad (i = 1, \ldots, r), \tag{8.2}$$

il sistema (8.1) si può riscrivere

$$E_{ih} u_h = f_i \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{8.1'}$$

Se con $n = (n_1, \ldots, n_r)$ si indica il versore normale a ∂A, diretto verso l'interno di A, e se σ è una qualsiasi costante reale, date due funzioni u e v appartenenti a $C^2(\overline{A})$ sussiste la seguente formula di Green:

$$\int_A v_i (u_{i/hh} + \nu u_{h/ih}) \, dx + \int_A [v_{i/h} u_{i/h} + (\nu - \sigma) v_{i/i} u_{h/h} + \sigma v_{i/h} u_{h/i}] \, dx + \\ + \int_{\partial A} v_i [u_{i/h} n_h + (\nu - \sigma) u_{h/h} n_i + \sigma u_{h/i} n_h] \, d\Sigma = 0. \tag{8.3}$$

Consideriamo la matrice di operatori al contorno $L^{(\nu,\sigma)} = ((L_{ih}^{(\nu,\sigma)}))$ $(i, h = 1, \ldots, r)$:

$$L_{ih}^{(\nu,\sigma)} u_h = \delta_{ih} u_{h/k} n_k + \sigma u_{h/i} n_h + (\nu - \sigma) u_{h/h} n_i. \tag{8.4}$$

Posto $\beta_{hikj} = \delta_{hi} \delta_{kj} + (\nu - \sigma) \delta_{ij} \delta_{hk} + \sigma \delta_{hj} \delta_{ki}$ e tenendo presente (8.2) e (8.4), dalla (8.3) si ottengono le seguenti formule:

$$\int_A v_i E_{ih} u_h \, dx = \int_A \beta_{hikj} u_{h/k} v_{i/j} \, dx + \int_{\partial A} v_i L_{ih}^{(\nu,\sigma)} u_h \, d\Sigma \tag{8.5}$$

e

$$\int_A (v_i E_{ih} u_h - u_i E_{ih} v_h) dx = \int_{\partial A} (v_i L_{ih}^{(\nu,\sigma)} u_h - u_i L_{ih}^{(\nu,\sigma)} v_h) \, d\Sigma. \tag{8.6}$$

Assumendo $v = u$ la forma quadratica nelle $r \times r$ variabili $u_{i/j}$ che compare sotto il segno del primo integrale a secondo membro della (8.5) è definita positiva se e solo se

$$\nu > -1, \qquad -1 < \sigma < \min(1, (1 + r\nu)/(r - 1)). \tag{8.7}$$

Ciò si dimostra con considerazioni elementari.

Consideriamo la matrice $r \times r$ «soluzione fondamentale» o matrice di Somigliana

$$s(x - y) = ((s_{ij}(x - y))) \qquad (i, j = 1, \ldots, r). \tag{8.8}$$

Posto

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} (1/2\pi)\log(1/t) & \text{se } r = 2, \\ ((r-2)\,\omega_r)^{-1} t^{2-r} & \text{se } r > 2, \end{cases}$$

(con ω_r si è indicata la misura della ipersuperficie della ipersfera unitaria di $\boldsymbol{R}^r$) e

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} (1/4\pi)\,t^2\log(t) & \text{se } r = 2, \\ (2\omega_4)^{-1}\log(1/t) & \text{se } r = 4, \\ ((r-2)(r-4)\,\omega_r)^{-1} t^{4-r} & \text{se } r > 2,\ \ r \neq 4, \end{cases}$$

risulta $s_{ij}(x-y) = \delta_{ij}\varphi_0(|x-y|) + 2^{-1}\nu(\nu+1)^{-1}\partial^2\varphi_1(|x-y|)/\partial x_i \partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, r)$.

Per ogni $u \in C^2(\overline{A})$, se x è un punto interno ad A si ha che:

$$u_p(x) = \int_A \beta_{hikj}\, s_{ph/t_k}(t-x)\, u_{i/j}\, dt + \int_{\partial A} u_i(t)\, L_{ih_t}^{(\nu,\sigma)} s_{ph}(t-x)\, d\Sigma_t. \tag{8.9}$$

Se $D(x, \delta)$ è l'ipersfera di centro x e raggio δ, interamente contenuta in A, in $A - D(x, \delta)$ si può applicare la formula di Green alle funzioni $u(x)$ e $s_p(t-x) = (s_{p1}(t-x), \ldots, s_{pr}(t-x))$. Per $\delta \to 0$ si ottiene la (8.9).

Con tecniche analoghe dalla (8.6) si deduce la seguente

$$u_p(x) = \int_{\partial A} u_i(t)\, L_{ih_t}^{(\nu,\sigma)} s_{ph}(t-x)\, d\Sigma_t - \int_{\partial A} s_{ph}(t-x)\, L_{hi}^{(\nu,\sigma)} u_i\, d\Sigma_t + \int_A s_{ph}(t-x)\, E_{hi} u_i\, dt \qquad (p = 1, \ldots, r). \tag{8.9'}$$

Consideriamo lo spazio $H_1(A)$, costituito dalle funzioni u aventi come valori vettori a r componenti reali, ottenuto come completamento funzionale di $C^1(\overline{A})$ munito della norma $\|u\|_H^2 = \int_A (u_i u_i + u_{i/h} u_{i/h})\, dx$. Diremo $\overset{\circ}{H}_1(A)$ il sottospazio di $H_1(A)$ costituito dalle funzioni u che hanno traccia nulla sulla frontiera di A.

Assunto $\nu > -1$ e supposto σ verificante le (8.7), si indicherà con $\mathcal{H}(A)$ lo spazio di Hilbert ottenuto introducendo in $H_1(A)$ il prodotto scalare

$$((u, v)) = \int_A \beta_{hikj}\, u_{h/k} v_{i/j}\, dx. \tag{8.10}$$

Con $|||\cdot|||$ si denota la norma di un elemento di $\mathcal{H}(A)$. In questo spazio si conviene di identificare due funzioni che differiscono per un r-vettore costante.

Introduciamo ora l'operatore

$$u = Rf \tag{8.11}$$

così definito

$$u_i(x) = \int_A s_{ij}(x-y) f_j(y)\, dy \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{8.12}$$

È facile dimostrare che l'operatore R trasforma una funzione di $L^2(A)$ in una funzione di $H_1(A)$ e quindi di $\mathcal{H}(A)$. Inoltre R è un operatore compatto.

Per ogni $f \in L^2(A)$, la (8.11) è una soluzione dell'equazione (8.1)'. Infatti, se $f_i(x) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(A)$ si ha $E_{ij} u_j = \int_A s_{ij}(x-y) E_{jh} f_h(y)\, dy$.

D'altra parte, per la (8.9)', $f_i(x) = \int_A s_{ij}(x-y) E_{jh} f_h(y)\, dy$ e quindi $Eu = f$. Inoltre per un analogo del teorema di Lichtenstein [24] e Friedrichs [25], la funzione a secondo membro di (8.11) appartiene allo spazio $H_2(D)$, per ogni campo limitato $D \subset \subset \boldsymbol{R}^r$ (4) e R risulta essere un operatore continuo da $L^2(A)$ in $H_2(D)$. Da ciò segue che, per ogni $f \in L^2(A)$

(8.13) $$ERf = f.$$

Se $f \in L^2(A)$, $u \in \mathcal{H}(A)$, posto

(8.14) $$(R^* u)_p(x) = \int_A \beta_{hikj} s_{hp/y_k}(y-x) u_{i/j}(y)\, dy \qquad (p = 1, \ldots, r)$$

risulta

(8.15) $$((Rf, u)) = (f, R^* u)\ (5).$$

L'operatore trasposto R^* di R trasforma lo spazio $\mathcal{H}(A)$ in $L^2(A)$ e, sempre per l'analogo del teorema di Lichtenstein e Friedrichs, $R^* f \in H_1(D)$, qualunque sia D limitato $\subset \boldsymbol{R}^r$, riuscendo inoltre R^* continuo da $H_1(A)$ a $H_1(D)$. Sia B un aperto tale che $\overline{B} \subset A$. Se $w \in H_1(A) \cap H_2(B)$, risulta, per ogni $x \in B$

(8.16) $$(R^* w)_p(x) = \int_{A-B} \beta_{hikj} s_{hp/y_k}(y-x) w_{i/j}(y)\, dy + \int_B s_{hp/y_k}(y-x) E_{hi} w_i(y)\, dy - \int_{\partial B} s_{hp}(y-x) L_{hi}^{(\nu,\sigma)} w_i\, d\Sigma_y .$$

Il primo e il terzo integrale sono soluzioni dell'equazione omogenea $Eu = 0$ e sono regolari in B. Il secondo integrale appartiene a $H_2(B)$, quindi $R^* w \in H_1(A) \cap H_2(B)$ e

(8.17) $$ER^* w = Ew.$$

Indicheremo con $\mathcal{U}(A)$ la classe delle funzioni che appartengono a $\overset{\circ}{H}_1(A) \cap \cap H_2(B)$, per ogni B tale che $\overline{B} \subset A$.

8.1. *Assegnata $f \in L^2(A)$ esiste una e una sola funzione $u \in \mathcal{U}(A)$ soluzione di* (8.1). *Sia $\Omega(A)$ la varietà lineare costituita dalle funzioni di $\mathcal{H}(A)$ soluzioni dell'equazione omogenea*

(8.1)$_0$ $$u_{i/hh} + \nu u_{h/ih} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

e sia P il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}(A)$ su $\Omega(A)$ (6). *La soluzione u è data da*

(8.18) $$u = (R^* R - R^* P R) f.$$

(4) Lo spazio $H_2(A)$ è lo spazio di Hilbert ottenuto come completamento funzionale di $C^2(\overline{A})$ mediante la norma $\|u\|_{H_2}^2 = \int_A (u_i u_i + u_{i/h} u_{i/h} + u_{i/hk} u_{i/hk})\, dx$.

(5) Si denota con $(u, v) = \int_A u_i v_i\, dx$ il prodotto scalare nello spazio $L^2(A)$.

(6) Si dimostra con procedimenti classici che $\Omega(A)$ è un sottospazio di $\mathcal{H}(A)$.

(Cfr. [9, lecture 20], [16, pp. 66-69]). Se $u \in \mathcal{U}(A)$, dalla (8.5) si ha, per ogni $v \in \overset{\circ}{C}^{\infty}(A)$

$$\int_A v_i E_{ih} u_h \, dx = \int_A \beta_{hikj} u_{h/k} v_{i/j} \, dx .$$

Se $Eu = 0$, $u \in \mathcal{U}(A)$, segue che

$$\int_A \beta_{hikj} u_{h/k} u_{i/j} \, dx = 0 ,$$

cioè u è un r-vettore costante in A e $u = 0$ su ∂A. Segue che $u \equiv 0$ cioè l'unicità della soluzione di (8.1) nella classe $\mathcal{U}(A)$.

Per ogni $x \in \boldsymbol{R}^r - \overline{A}$, la funzione di y: $s_i(x-y)$ appartiene alla varietà lineare $\Omega(A)$. Sia $w = Rf - PRf$. Risulta $((w, s_i(x-y)))_y = 0$. Quindi

$$0 = ((w, s_i(x-y)))_y = \int_A \beta_{hpkm} s_{ih/y_k}(x-y) \, w_{p/m}(y) \, dy .$$

Per l'arbitrarietà di x deve essere

$$(R^* w)_i(x) = \int_A \beta_{hpkm} s_{ih/y_k}(x-y) \, w_{p/m}(y) \, dy = 0 ,$$

per ogni x esterno ad A. Quindi $u = (R^*R - R^*PR)f$ soddisfa la condizione $u = 0$ su ∂A.

Assumendo in (8.16) $w = Rf$ o $w = PRf$ segue che $R^* w \in H_1(A) \cap H_2(B)$ quindi $u = (R^*R - R^*PR)f \in \mathcal{U}(A)$. Inoltre, da (8.13) e (8.17), segue che $E(R^*R - R^*PR)f = ERf - EPRf = f$ cioè (8.18) è la soluzione cercata in $\mathcal{U}(A)$.

Posto $\Gamma = R^*R - R^*PR$, l'operatore $u = \Gamma f$ è l'operatore di Green corrispondente al problema (8.1). Esso è continuo da $L^2(A)$ in $H_1(A)$. Si noti, inoltre, che è un operatore positivo e compatto (PCO) da $L^2(A)$ in $L^2(A)$.

È possibile costruire una successione di operatori $\{\Gamma_m\}_m$ che approssimano «uniformemente dall'alto» l'operatore Γ nello spazio $L^2(A)$.

Se $\{\omega^p\}$ è un sistema completo di funzioni nel sottospazio $\Omega(A)$ e se P_m è il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}(A)$ sulla varietà lineare di dimensione finita generata da $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$, l'operatore $\Gamma_m = R^*R - R^*P_m R$ è un PCO dello spazio $L^2(A)$, $m > 0$. Con $\|\cdot\|$ si denota la norma in questo spazio.

8.2. *La successione* $\{\Gamma_m\}_m$ *converge uniformemente non crescendo all'operatore* Γ *cioè*

(8.19) $$\Gamma < \Gamma_{m+1} < \Gamma_m$$

e

(8.20) $$\lim_{m \to \infty} \|\Gamma - \Gamma_m\| = 0 .$$

La monotonia segue dall'essere, $\forall u \in L^2(A)$,

$$(R^* P_m Ru, u) = ((P_m Ru, Ru)) = |||P_m Ru|||^2 \leq$$
$$\leq |||P_{m+1} Ru|||^2 = (R^* P_{m+1} Ru, u) \leq |||PRu|||^2 .$$

Sia $u \in L^2(A)$. Risulta

$$\|\Gamma - \Gamma_m\|^2 = \|R^*(P_m - P)R\|^2 =$$
$$= \sup_{\|u\|=1} (R^*(P_m - P)Ru, R^*(P_m - P)Ru) = \sup_{\|u\|=1} (((P_m - P)R^*R(P_m - P)Ru, Ru)) \le$$
$$\le \sup_{\|u\|=1} |||(P_m - P)R^*R(P_m - P)Ru|||\cdot|||Ru||| \le |||(P_m - P)R^*R(P_m - P)|||\cdot|||R|||^2.$$

La successione $\{P_m\}_m$ converge fortemente a P in $\mathcal{H}(A)$, quindi $(P_m - P)R^*R(P_m - P)$ converge uniformemente all'operatore nullo [9, Teor. 17. III, p. 135]. Segue la (8.20).

8.3. *Fissato* $m \geqslant 1$, *risulta*

$$\|\Gamma f - \Gamma_m f\| \le \|R^*(P_m - P)R\| \|f\| \tag{8.21}$$

e

$$\lim_{m \to \infty} \|R^*(P_m - P)R\| = 0. \tag{8.22}$$

Dall'essere

$$\|R^*(P_m - P)R\|^2 = \sup_{\|u\|=1} (R^*(P_m - P)Ru, R^*(P_m - P)Ru) =$$
$$= \sup_{\|u\|=1} (((P_m - P)R^*R(P_m - P)Ru, Ru)) \le |||(P_m - P)R^*R(P_m - P)|||\cdot|||R|||^2$$

segue la (8.22).

Sia $L_m = R^*(P - P_m)R$. L'operatore L_m è un PCO di $S = L^2(A)$. Detto $q(m)$ il suo massimo autovalore, si ha $\|L_m\| = q^{(m)}$. Il calcolo per eccesso di $q^{(m)}$ si ottiene con il metodo degli Invarianti Ortogonali (cfr. sez. 3 e relativa bibliografia), assumendo come operatore base il PCO di S: Γ_m ($L_m < \Gamma_m$) e come operatori intermedi i PCO $L_{m,n} = \Gamma_m - R^*Q_nR$ dove, detta $W(A)$ la varietà di $\mathcal{H}(A)$ dei vettori ortogonali a $\Omega(A)$, Q_n è un proiettore ortogonale su una varietà di dimensione finita n di $W(A)$. Tale Q_n, per $n \to \infty$, converga fortemente in $\mathcal{H}(A)$ al proiettore $I - P$. Si ha allora $\|L_m\| \le \|L_{m,n}\|$ e $\lim_{n\to\infty} \|L_{m,n}\| = \|L_m\|$. Ciò permette di rendere esplicita la maggiorazione (8.21) con una costante di maggiorazione tanto prossima a quella ottimale quanto si vuole.

8.4. *Sia* u *la funzione di* $\mathcal{H}(A)$ *determinata, nella sua classe di equivalenza, dalla condizione*

$$\int_{\partial A} u \, d\Sigma = 0.$$

Sussistono le seguenti disuguaglianze:

$$\int_{\partial A} |u|^2 d\Sigma \le c_0((u, u)); \tag{8.23}$$

$$\int_A |u|^2 dx \le c_1((u, u)), \tag{8.24}$$

con c_0 *e* c_1 *costanti positive che dipendono unicamente dal dominio* A *e da* ν.

Sia v la funzione di $\mathcal{H}(A)$ tale che $v_{i/h} = u_{i/h}$ $(i, h = 1, \ldots, r)$ e tale che $\int_A v \, dx = 0$. Si ha allora, per la disuguaglianza di Poincaré, $\int_A v_i v_i \, dx \le \lambda_0 \int_A v_{i/h} v_{i/h} \, dx \le H_0((u, u))$.

Riesce $u_i = v_i + c_i$ $(i = 1, \dots, r)$, con

$$c_i = \frac{-1}{\text{mis } \partial A} \int_{\partial A} v_i d\Sigma.$$

Si ha, per la *disuguaglianza di traccia*,

$$\int_{\partial A} |u|^2 d\Sigma \le H_1\left(\int_A |u|^2 dx + ((u, u))\right) = H_1\left(\int_A |v + c|^2 dx + ((u, u))\right) =$$

$$= H_1\left(\int_A |v|^2 dx + \int_A |c|^2 + ((u, u))\right) \le H_1(H_0 + 1)((u, u)) + H_1 \frac{\text{mis} A}{(\text{mis } \partial A)^2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^r \left(\int_{\partial A} v_i d\Sigma\right)^2 \le H_1(H_0 + 1)((u, u)) + H_1 \frac{\text{mis} A}{\text{mis } \partial A} \int_{\partial A} |v|^2 d\Sigma \le$$

$$\le H_1(H_0 + 1)\left[1 + H_1 \frac{\text{mis} A}{\text{mis } \partial A}\right]((u, u)).$$

È così dimostrata la (8.23).

Si ha poi

$$\int_A |u|^2 dx = \int_A |v + c|^2 dx = \int_A |v|^2 dx + \text{mis} A |c|^2 \le H_0((u, u)) +$$

$$+ \frac{\text{mis} A}{\text{mis } \partial A} \int_{\partial A} |v|^2 d\Sigma \le \left[H_0 + \frac{\text{mis} A}{\text{mis } \partial A} H_1(H_0 + 1)\right]((u, u)).$$

Ciò prova la (8.24).

Supponiamo che il campo A di $\boldsymbol{R}^r$ sia ottenuto da un campo A_0 avente per frontiera una ipersuperficie chiusa connessa di classe $C^{1+\alpha}$, al quale vengono tolti $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_p$ con A_h campo avente per frontiera una unica ipersuperficie chiusa connessa di classe $C^{1+\alpha}$, tale che $\overline{A}_h \subset A_0$ $(h = 1, \dots, p)$ e $\overline{A}_h \cap \overline{A}_k = \emptyset$, $h \ne k$.

D'ora in avanti si assuma l'ipotesi testè specificata su A nonché $\sigma = \nu/(2 + \nu)$. Si denoti con $L^{(\nu)} = ((L_{ih}^{(\nu)}))$ la matrice di operatori al contorno definita da (8.4) con questa scelta del parametro σ. Nelle ipotesi assunte si ha la sommabilità di $L_{ih_x}^{(\nu)} s_{hj}(x - y)$ in $\partial A \times \partial A$. Ciò segue dalla formula:

$$L_{ih_x}^{(\nu,\sigma)} s_{hj}(x - y) = \frac{1}{(r - 2)\omega_r}\left(\frac{2 + (1 - \sigma)\nu}{2(\nu + 1)} \delta_{ij} \frac{\partial(|x - y|^{2-r})}{\partial n_x} + \right.$$

$$+ \frac{\nu r(1 + \sigma)}{2(\nu + 1)} \frac{\partial(|x - y|)}{\partial x_i} \frac{\partial(|x - y|)}{\partial x_j} \frac{\partial(|x - y|^{2-r})}{\partial n_x} +$$

$$\left. + \frac{\nu - \sigma(\nu + 2)}{2(\nu + 1)}\left(n_i(x) \frac{\partial(|x - y|^{2-r})}{\partial x_j} - n_j(x) \frac{\partial(|x - y|^{2-r})}{\partial x_i}\right)\right).$$

Da essa si deduce che $L_x^{(\nu)} s(x - y) = O(|x - y|^{1+\alpha-r})$.

Affinché siano soddisfatte le (8.7) deve essere $\nu > -2/r$.

Indichiamo con $\{\omega^{0,k}(x - x^0)\}$ una base di soluzioni omogenee di grado k in $x - x^0$ (con k intero non negativo) dell'equazione $(8.1)_0$ (7).

Sia $x^i \in A_i$, $i = 1, \ldots, p$, e sia $\{\omega^{0,h}(x - x^i)\}$ una base di soluzioni omogenee in $x - x^i$ di grado h (con $h < 0$) dell'equazione $(8.1)_0$.

Indicheremo con $\{\omega^p(x)\}$ il sistema che si ottiene ordinando in un unica successione le funzioni di tutti i sistemi $\{\omega^{0,k}(x - x^0)\}_{k=0,1,\ldots}$ $\{\omega^{0,h}(x - x^i)\}_{h=-1,-2,\ldots}$, $i = 1, \ldots, p$.

Sussiste il seguente teorema di completezza:

8.5. *Il sistema* $\{\omega^p\}$ *è completo nel sottospazio di* $\mathcal{H}(A)$ *costituito dalle soluzioni dell'equazione omogenea* $(8.1)_0$.

Tale teorema è un corollario di quello che afferma che il sistema di vettori $\{L^{(\nu)}\omega^p\}$ costituisce un sistema completo nello spazio $L^2(\partial A)/r$-vettori costanti (8).

Ancorché questa circostanza non sia essenziale, al fine di semplificare l'aspetto formale nei successivi sviluppi supporremo che il sistema $\{\omega^p\}$ sia stato ortonormalizzato rispetto al prodotto scalare (8.10) cioè $((\omega^h, \omega^k)) = \delta_{hk}$.

Può supporsi, aggiungendo a ω^h un vettore costante, che

$$\int_{\partial A} \omega^h d\Sigma = 0. \tag{8.25}$$

8.6. *Sia* $u \in H_1(A)$. *La serie*

$$\frac{1}{\operatorname{mis} \partial A} \int_{\partial A} u \, d\Sigma + \sum_{h=1}^{\infty} \omega^h(x)((u, \omega^h)) \tag{8.26}$$

i) *converge in* $H_1(A)$;

ii) *converge uniformemente insieme ad ogni sua serie derivata nell'interno di* A (9). *Detta* $w(x)$ *la somma della serie* (8.26), *essa è l'unica soluzione del sistema* $(8.1)_0$ *nella classe* $H_1(A) \cap C^\infty(A)$ *che coincide con* $u(x)$ *quando* $x \in \partial A$.

Posto

$$w^n(x) = \frac{1}{\operatorname{mis} \partial A} \int_{\partial A} u \, d\Sigma + \sum_{h=1}^{n} \omega^h(x)((u, \omega^h)), \tag{8.27}$$

si ha ovviamente la convergenza in $\mathcal{H}(A)$ di $\{w^n(x)\}$ e, per (8.24) e (8.25), si ha la convergenza della successione $\{w^n(x)\}$ in $L^2(A)$. Poiché la norma in $H_1(A)$ è isomorfa alla

(7) Dicendo che $\{\omega^{0,k}(x - x^0)\}$ è una base intendiamo che ogni soluzione omogenea di grado k in $x - x^0$ si ottiene come combinazione delle funzioni $\{\omega^{0,k}(x - x^0)\}$.

(8) La dimostrazione della completezza del sistema $\{L^{(\nu)}\omega^p\}$ in $L^2(\partial A)/$costanti si trova in [27, cap. III, pp. 58-61] per il caso $r = 3$. L'estensione a r qualsiasi è puramente formale.

(9) Diciamo che una successione di funzioni è uniformemente convergente nell'interno di A se essa è uniformemente convergente in ogni compatto contenuto in A.

norma $[\|u\|^2 + ((u, u))]^{1/2}$, segue l'asserto i). Evidentemente si ha anche la convergenza di $\{w^n(x)\}$ nello spazio $L^2(\partial A)$ come segue dal teorema di traccia o, direttamente, dalla (8.23). Si ha, mediante un'integrazione per parti, per $k \leq n$:

$$\int_{\partial A} w^n \circ L^{(\nu)} \omega^k d\Sigma = -((w^n, \omega^k)) = -\sum_{h=1}^{n} ((u, \omega^h))((\omega^h, \omega^k)) = -((u, \omega^k))$$

e, qualunque sia k,

$$\int_{\partial A} u \circ L^{(\nu)} \omega^k d\Sigma = -((u, \omega^k)).$$

Ne segue, per $n \rightarrow \infty$ e per ogni k,

$$\int_{\partial A} (w - u) \circ L^{(\nu)} \omega^k d\Sigma = 0$$

e, per la ricordata completezza del sistema $\{L^{(\nu)} \omega^k\}$, si ha che w e u differiscono per un vettore costante. Ma si ha

$$\frac{1}{\operatorname{mis} \partial A} \int_{\partial A} w \, d\Sigma = \frac{1}{\operatorname{mis} \partial A} \int_{\partial A} u \, d\Sigma$$

e quindi $u(x) = w(x)$, $x \in \partial A$.

Le proprietà di convergenza uniforme, asserite nella ii), seguono dalla convergenza di $w^n(x)$ in $L^2(A)$ e dal fatto che $w^n(x)$ è una funzione biarmonica in A.

L'unicità di w segue dal fatto che, se si assume $u(x) = 0$ $x \in \partial A$, si ha $0 = \int_{\partial A} w \circ L^{(\nu)} w^n d\Sigma = -((w, w^n))$ e quindi $((w, w)) = 0$ che implica $w = \text{cost.}$ e, necessariamente, $w \equiv 0$ dato che $w(x) = 0$ se $x \in \partial A$.

Fissato $y \in A$ sia $u_y(x)$ una funzione di $H_1(A)$ tale che $u_y(x) = s_i(x - y) \equiv (s_{i1}(x - y), \ldots, s_{ir}(x - y)), x \in \partial A$ $(i = 1, \ldots, r)$. Il Teorema 8.6 fornisce la soluzione dell'equazione $(8.1)_0$, coincidente con $u_y(x)$, ossia con $s_i(x - y)$, per $x \in \partial A$. Indichiamo con $\gamma_i(x, y) \equiv (\gamma_{i1}(x, y), \ldots, \gamma_{ir}(x, y))$ la funzione così ottenuta.

Risulta, quindi,

$$\gamma_i(x, y) = \frac{1}{\operatorname{mis} \partial A} \int_{\partial A} s_i(t - y) \, d\Sigma_t + \sum_{p=1}^{\infty} \omega^p(x) ((u_y, \omega^p)).$$

Con una integrazione per parti segue facilmente che $((u_y, \omega^p)) = ((s_i(t - y), \omega^p(t)))_t$. Si ha

$$\gamma_i(x, y) = \frac{1}{\operatorname{mis} \partial A} \int_{\partial A} s_i(t - y) \, d\Sigma_t + \sum_{p=1}^{\infty} \omega^p(x) ((s_i(t - y), \omega^p(t)))_t. \tag{8.28}$$

Le funzioni $\gamma_i(x, y)$ $(i = 1, \ldots, r)$ costituiscono le righe della matrice $\gamma(x, y) = \{\gamma_{ij}(x, y)\}$ $(i, j = 1, \ldots, r)$. Per dimostrare le proprietà di $\gamma(x, y)$, faremo uso del seguente Teorema:

8.7. *Se v è una soluzione del sistema omogeneo dell'elasticità* $(8.1)_0$ *ed è continua in*

$\overline{A}$, *è possibile determinare una costante H, che dipende da A, tale che*

$$\int_A |v|^2 dx \leq H \int_{\partial A} |v|^2 d\Sigma.$$

Per la dimostrazione cfr. [28, teor. VII, p. 257].

Si può applicare il Teorema 8.7 alle funzioni $w^n(x)$, definite in (8.27):

$$\int_A |w^n|^2 dx \leq H \int_{\partial A} |w^n|^2 d\Sigma.$$

Per la convergenza della successione $\{w^n\}$ in $L^2(A)$ ed in $L^2(\partial A)$ segue, per $n \to \infty$,

$$\int_A |w|^2 dx \leq H \int_{\partial A} |w|^2 d\Sigma. \tag{8.29}$$

Pertanto il Teorema 8.7 seguita a sussistere per le soluzioni di $(8.1)_0$ appartenenti a $H_1(A) \cap C^\infty(A)$.

Si indichi con α la r-pla ordinata di interi non negativi $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ e si definisca $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$. α è un multi-indice di componenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Con D^α si denota l'operatore di derivata parziale $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}$.

Sia B un insieme aperto tale che $\overline{B} \subset A$. Se $w(x)$ è una funzione biarmonica in A, esiste una costante k_α, che dipende da A e da B, tale che

$$\left(\operatorname*{Max}_{x \in \overline{B}} |D^\alpha w(x)|\right)^2 \leq k_\alpha \int_A |w(t)|^2 dt. \tag{8.30}$$

8.8. *Per ogni $y \in A$ esiste la derivata $D_y^\beta \gamma_i(x, y)$. Fissato $y \in A$, la funzione di x: $D_y^\beta \gamma_i(x, y)$ soddisfa l'equazione omogenea dell'elasticità* $(8.1)_0$, *coincide con $D_y^\beta s_i(x - y)$ quando $x \in \partial A$ ed appartiene a $H_1(A) \cap C^\infty(A)$.*

Supponiamo dapprima $D_y^\beta = \partial/\partial y_1$. Considerata la funzione $\partial s_i(x-y)/\partial y_1$ per $x \in \partial A$ sia $\gamma_i^{(1)}(x, y)$ la funzione di x, appartenente a $H_1(A) \cap C^\infty(A)$, soluzione di $(8.1)_0$ che coincide con $\partial s_i(x-y)/\partial y_1$ quando $x \in \partial A$. Sia $\eta = (y_1 + h, y_2, \ldots, y_r)$ con $h \neq 0$ tanto piccolo che η appartenga ad un intorno circolare B di y, con $\overline{B} \subset A$. Si ha per (8.29) e (8.30)

$$|(\gamma_i(x, \eta) - \gamma_i(x, y))/h - \gamma_i^{(1)}(x, y)|^2 \leq \tag{8.31}$$
$$\leq k_0 H \int_{\partial A} \left| \frac{s_i(t - \eta) - s_i(t - y)}{h} - \frac{\partial s_i(t - y)}{\partial y_1} \right|^2 d\Sigma_t.$$

Da questa disuguaglianza, per $h \to 0$, segue il Teorema nell'ipotesi particolare $D_y^\beta = \partial/\partial y_1$. Il risultato così si acquisisce se $|\beta| = 1$. Per induzione si ottiene per β qualsiasi. Risulta, quindi,

$$D_y^\beta \gamma_i(x, y) = \frac{1}{\operatorname{mis} \partial A} \int_{\partial A} D_y^\beta s_i(t-y)\, d\Sigma_t - \sum_{p=1}^{\infty} \omega^p(x) \int_{\partial A} D_y^\beta s_i(t-y) \circ L^{(\nu)} \omega^p\, d\Sigma_t. \tag{8.32}$$

8.9. *La funzione $\gamma_i(x,y)$, insieme a tutte le sue derivate $D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(x,y)$, è funzione continua nel complesso delle variabili x, y all'interno di $A \times A$.*

Fissato $y \in A$, da (8.30), per $\alpha = 0$, e da (8.29) segue che

$$\left(\operatorname*{Max}_{x \in \overline{B}} |\gamma_i(x,y)|\right)^2 \leq k_0 H \int_{\partial A} |s_i(t-y)|^2 d\Sigma_t . \tag{8.33}$$

Siano $x, y, \xi, \eta \in \overline{B}$. Riesce $|\gamma_i(x,y) - \gamma_i(\xi,\eta)| \leq |\gamma_i(x,y) - \gamma_i(\xi,y)| + |\gamma_i(\xi,y) - \gamma_i(\xi,\eta)|$. È ovvio che $\lim_{\xi \to x} |\gamma_i(x,y) - \gamma_i(\xi,y)| = 0$.

La funzione di ξ: $\gamma_i(\xi,y) - \gamma_i(\xi,\eta)$, soddisfa l'equazione dell'elasticità. Quindi, da (8.33), $|\gamma_i(\xi,y) - \gamma_i(\xi,\eta)|^2 \leq k_0 H \int_{\partial A} |s_i(t-y) - s_i(t-\eta)|^2 d\Sigma_t$. Ne segue che $\lim_{\eta \to y} |\gamma_i(\xi,y) - \gamma_i(\xi,\eta)| = 0$ uniformemente al variare di ξ in $\overline{B}$. Risulta, quindi,

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \eta \to y}} |\gamma_i(x,y) - \gamma_i(\xi,\eta)| = 0 .$$

Analogamente, fissato $y \in A$, dalla (8.30) e (8.29),

$$\left(\operatorname*{Max}_{x \in \overline{B}} |D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(x,y)|\right)^2 \leq k_\alpha H \int_{\partial A} |D_x^\alpha D_y^\beta s_i(x-y)|^2 dx . \tag{8.34}$$

Se $x, y, \xi, \eta \in \overline{B}$, $|D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(x,y) - D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(\xi,\eta)| \leq |D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(x,y) - D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(\xi,y)| + |D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(\xi,y) - D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(\xi,\eta)|$. È ovvio che $\lim_{\xi \to x} |D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(x,y) - D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(\xi,y)| = 0$. La funzione di ξ: $D_y^\beta \gamma_i(\xi,y) - D_y^\beta \gamma_i(\xi,\eta)$ soddisfa l'equazione dell'elasticità e quindi, per (8.34), $\lim_{\eta \to y} |D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(\xi,y) - D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(\xi,\eta)| = 0$ uniformemente al variare di ξ nel dominio $\overline{B}$. Ne consegue che

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \eta \to y}} |D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(x,y) - D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_i(\xi,\eta)| = 0 .$$

Fissato $y \in A$, per ogni $x \in A$, dalla (8.9), si ottiene la seguente espressione per l'elemento $\gamma_{ij}(x,y)$ della matrice $\gamma(x,y)$:

$$\gamma_{ij}(x,y) = \int_{\partial A} s_i(t-y) \circ L_t^{(v)} s_j(t-x) \, d\Sigma_t + ((\gamma_i(t,y), s_j(t-x)))_t .$$

Inserendo (8.28), a secondo membro, si ottiene

$$\gamma_{ij}(x,y) = \int_{\partial A} s_i(t-y) \circ L_t^{(v)} s_j(t-x) \, d\Sigma_t + \\ + \sum_{p=1}^{\infty} ((\omega^p(t), s_i(t-y)))_t ((\omega^p(t), s_j(t-x)))_t . \tag{8.35}$$

8.10. *Per ogni $x, y \in A$*

$$\gamma_{ij}(x,y) = \gamma_{ji}(y,x) \qquad (i, j = 1, \ldots, r) . \tag{8.36}$$

Per (8.35) è sufficiente dimostrare che

$$\int_{\partial A} s_i(t-y) \circ L_t^{(v)} s_j(t-x) \, d\Sigma_t = \int_{\partial A} s_j(t-x) \circ L_t^{(v)} s_i(t-y) \, d\Sigma_t .$$

Per la (8.6), indicato con $A(x,y)$ il campo A privato delle ipersfere $D(x)$ e $D(y)$ di raggio $\rho > 0$, interamente contenute in A, si ha che

$$\int_{\partial A(x,y)} s_i(t-y) \circ L_t^{(\nu)} s_j(t-x)\, d\Sigma_t = \int_{\partial A(x,y)} s_j(t-x) \circ L_t^{(\nu)} s_i(t-y)\, d\Sigma_t$$

che si può riscrivere

$$\int_{\partial A} s_i(t-y) \circ L_t^{(\nu)} s_j(t-x)\, d\Sigma_t + \int_{\partial D(x)} s_i(t-y) \circ L_t^{(\nu)} s_j(t-x)\, d\Sigma_t -$$

$$- \int_{\partial D(x)} s_j(t-x) \circ L_t^{(\nu)} s_i(t-y)\, d\Sigma_t = \int_{\partial A} s_j(t-x) \circ L_t^{(\nu)} s_i(t-y)\, d\Sigma_t +$$

$$+ \int_{\partial D(y)} s_j(t-x) \circ L_t^{(\nu)} s_i(t-y)\, d\Sigma_t - \int_{\partial D(y)} s_i(t-y) \circ L_t^{(\nu)} s_j(t-x)\, d\Sigma_t .$$

Essendo la funzione $s_i(t-y)$ regolare in $D(x)$ e $s_j(t-x)$ regolare in $D(y)$, si può applicare la (8.9)′ ottenendo

$$\int_{\partial A} s_i(t-y) \circ L_t^{(\nu)} s_j(t-x)\, d\Sigma_t + s_{ij}(x-y) = \int_{\partial A} s_j(t-x) \circ L_t^{(\nu)} s_i(t-y)\, d\Sigma_t + s_{ji}(y-x).$$

Per la simmetria della matrice (8.8) segue la (8.36).

Posto, per $y \in A$, $(q \geq 1)$

$$\psi_j^q(y) = \int_A \beta_{hpkm}\, s_{jh/t_k}(t-y)\, \omega_{p/m}^q(t)\, dt = ((s_j(t-y), \omega^q(t)))_t, \tag{8.37}$$

sussiste il Teorema:

8.11. *La serie*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \psi_i^q(x)\, \psi_j^q(y) \tag{8.38}$$

converge uniformemente, insieme ad ogni serie derivata, rispetto alla coppia di punti x e y nell'interno di $A \times A$.

Sia B un insieme aperto tale che $\overline{B} \subset A$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che l'ipersfera $D(y, \varepsilon)$, di centro y e raggio ε, sia interamente contenuta in A, al variare di y in $\overline{B}$. Fissato y in $\overline{B}$, sia $\tau_j(t,y) \equiv (\tau_{j1}(t,y), \ldots, \tau_{jr}(t,y))$ una funzione, appartenente a $C^1(\overline{A})$ che coincide con $s_j(t-y)$ quando $t \in \overline{A} - D(y, \varepsilon)$. Dalla (8.37) si ottiene, quindi,

$$\psi_j^q(y) = - \int_{\partial A} s_{jh}(t-y)\, L_{hp}^{(\nu)}\, \omega_p^q(t)\, d\Sigma_t = \tag{8.39}$$

$$= - \int_{\partial A} \tau_{jh}(t,y)\, L_{hp}^{(\nu)}\, \omega_p^q(t)\, d\Sigma_t = \int_A \beta_{hpkm}\, \tau_{jh/t_k}(t,y)\, \omega_{p/m}^q(t)\, d\Sigma_t .$$

La serie di Fourier $\sum_{q=1}^{\infty} \psi_j^q(y)\, \omega^q(t)$ converge, in $\mathcal{H}(A)$ ad una funzione $\widetilde{\gamma}_j(t,y) \equiv$ $\equiv (\widetilde{\gamma}_{j1}(t,y), \ldots, \widetilde{\gamma}_{jr}(t,y))$ che soddisfa l'equazione omogenea dell'elasticità $(8.1)_0$ e ha valor medio nullo su ∂A. Confrontando la (8.39) con la (8.28), segue che

$$\widehat{\gamma}_j(t,y) = \gamma_j(t,y) - \frac{1}{\operatorname{mis}\partial A}\int_{\partial A} s_j(\xi - y)\,d\Sigma_\xi .$$

Se B' è un insieme aperto tale che $\overline{B}' \subset A$, fissato $x \in \overline{B}'$, si prova in maniera analoga la convergenza in $\mathcal{H}(A)$ della serie $\sum_{q=1}^{\infty} \psi_i^q(x)\,\omega^q(t)$ verso la funzione

$$\widehat{\gamma}_i(t,x) = \gamma_i(t,x) - \frac{1}{\operatorname{mis}\partial A}\int_{\partial A} s_i(\xi - x)\,d\Sigma_\xi .$$

Posto

$$\varphi_{ij}(x,y) = \int_A \beta_{hpkm}\,\gamma_{ih/t_k}(t,x)\,\gamma_{jp/t_m}(t,y)\,dt, \tag{8.40}$$

per l'identità di Parseval

$$\sum_{q=1}^{\infty} \psi_i^q(x)\,\psi_j^q(y) = \varphi_{ij}(x,y) \qquad (i, j = 1, \dots, r), \tag{8.41}$$

per ogni coppia di punti x e y di A.

La successione, continua in A, $\left\{\sum_{q=1}^{m} (\psi_i^q(x))^2\right\}$, converge non decrescendo verso

$$\varphi_i(x) = \int_A \beta_{hpkm}\,\gamma_{ih/t_k}(t,x)\,\gamma_{ip/t_m}(t,x)\,dt,$$

che risulta anch'essa continua in A. Infatti, per (8.37), $\varphi_i(x) = \sum_{q=1}^{\infty} [((s_i(t-x), \omega^q(t)))_t]^2$ che, confrontata con (8.35),

$$\varphi_i(x) = \gamma_{ii}(x,x) - \int_{\partial A} s_i(t-x) \circ L_t^{(\nu)} s_i(t-x)\,d\Sigma_t . \tag{8.42}$$

Per il Teorema 8.9, $\gamma_{ii}(x,x)$ è continua in A. Dalle (8.42) si trae la continuità in A di $\varphi_i(x)$. Per il teorema di Dini (cfr. [29, p. 522]) la convergenza è uniforme all'interno di A. Dall'essere

$$\left| \sum_{q=1}^{\infty} \psi_i^q(x)\,\psi_j^q(y) \right| \le \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty} (\psi_i^q(x))^2 + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty} (\psi_j^q(y))^2,$$

segue la convergenza uniforme della serie (8.38) rispetto alla coppia di punti x e y in $\overline{B}' \times \overline{B}$. Per l'arbitrarietà di B' e B segue la convergenza uniforme della serie (8.38) nell'interno di $A \times A$. Si consideri ora la serie derivata della (8.38)

$$\sum_{q=1}^{\infty} D_x^\alpha \psi_i^q(x) D_y^\beta \psi_j^q(y). \tag{8.43}$$

Per ogni $y \in A$, dalla (8.37),

$$D_y^\beta \psi_j^q(y) = -\int_{\partial A} D_y^\beta s_{jh}(t-y)\,L_{hp}^{(\nu)}\,\omega_p^q(t)\,d\Sigma_t, \qquad (j = 1, \dots, r). \tag{8.44}$$

La funzione $D_y^\beta \psi^q(y)$ è continua in A.

Fissato $y \in \overline{B}$, si consideri una funzione $\tau_j^\beta(t, y) \equiv (\tau_{j1}^\beta(t, y), \ldots, \tau_{jr}^\beta(t, y)) \in C^1(\overline{A})$ tale che $\tau_j^\beta(t, y) = D_y^\beta s_j(t - y)$ se $t \in \overline{A} - D(y, \varepsilon)$. Risulta

$$D_y^\beta \psi_j^q(y) = -\int_{\partial A} D_y^\beta \tau_{jh}(t - y) L_{hp}^{(\nu)} \omega_p^q(t)\, d\Sigma_t, \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

La serie $\sum_{q=1}^{\infty} (D_y^\beta \psi_j^q(y))\, \omega^q(t)$ converge, in $\mathcal{H}(A)$, ad una funzione $\tilde{\gamma}_j^\beta(t, y) \equiv$ $\equiv (\tilde{\gamma}_{j1}^\beta(t, y), \ldots, \tilde{\gamma}_{jr}^\beta(t, y))$ che, in quanto funzione di t, soddisfa la $(8.1)_0$ e ha valor medio nullo su ∂A. Confrontando l'ultimo termine di (8.44) con (8.32) si ottiene

$$\tilde{\gamma}_j^\beta(t, y) = D_y^\beta \gamma_j(t, y) - \frac{1}{\operatorname{mis} \partial A} \int_{\partial A} D_y^\beta s_j(\xi - y)\, d\Sigma_\xi .$$

Per l'identità di Parseval la serie (8.43) converge alla funzione reale

$$\varphi_{ij}^{\alpha\beta}(x, y) = \int_A \beta_{hpkm} D_x^\alpha \gamma_{ih/t_k}(t, x) D_y^\beta \gamma_{jp/t_m}(t, y)\, dt, \qquad x \text{ e } y \in A .$$

La successione $\sum_{q=1}^{m} (D_y^\beta \psi_j^q(y))^2$, continua in A, converge non decrescendo verso

$$\varphi_j^\beta(y) = \int_A \beta_{hpkm} D_y^\beta \gamma_{jh/t_k}(t, y) D_y^\beta \gamma_{jp/t_m}(t, y)\, dt$$

che risulta essere continua in A. Infatti si ottiene, analogamente alla (8.42),

$$D_x^\alpha D_y^\beta \gamma_{ij}(x, y) = \int_{\partial A} D_y^\beta s_j(t - y) \circ L_t^{(\nu)} D_x^\alpha s_i(t - x)\, d\Sigma_t +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \int_{\partial A} D_x^\alpha s_i(t - x) \circ L^{(\nu)} \omega^p\, d\Sigma_t \int_{\partial A} D_y^\beta s_j(t - y) \circ L^{(\nu)} \omega^p\, d\Sigma_t .$$

Dalla continuità dei primi due termini segue la continuità di $\varphi_{ij}^{\alpha\beta}(x, y)$ in $A \times A$ e quindi di $\varphi_j^\beta(y)$.

Per il teorema di Dini la convergenza della successione $\sum_{q=1}^{m} (D_y^\beta \psi_j^q(y))^2$ è uniforme in $\overline{B}$ e, per l'arbitrarietà di B, la convergenza è uniforme all'interno di A. Analogamente la successione $\sum_{q=1}^{m} (D_x^\alpha \psi_i^q(x))^2$ converge uniformemente a $\varphi_i^\alpha(x)$ all'interno di A.

Dall'essere

$$\left| \sum_{q=1}^{\infty} D_x^\alpha \psi_i^q(x) D_y^\beta \psi_j^q(y) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} (D_x^\alpha \psi_i^q(x))^2 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} (D_y^\beta \psi_j^q(y))^2 ,$$

dalla convergenza uniforme delle due serie a secondo membro all'interno di A, segue la convergenza uniforme della serie a primo membro all'interno di $A \times A$.

Posto

$$\lambda_{ij}(x, y) = \int_A \beta_{hpkm} s_{ih/t_k}(t - x) s_{jp/t_m}(t - y)\, dt, \tag{8.45}$$

sussiste il seguente Teorema:

8.12. *Data $f \in L^2(A)$ l'operatore di Green Γ ammette la rappresentazione integrale*:

$$\Gamma f = \int_A \Gamma(x, y) f(y)\, dy \qquad x \in A,$$

dove $\Gamma(x, y) = ((\Gamma_{ij}(x, y)))$ $(i, j = 1, \ldots, r)$ *è la «matrice di Green» così definita*:

$$\Gamma_{ij}(x, y) = \lambda_{ij}(x, y) - \sum_{q=1}^{\infty} \psi_i^q(x)\psi_j^q(y), \qquad (i, j = 1, \ldots, r). \tag{8.46}$$

$\Gamma_m f$ è un operatore integrale il cui nucleo è esplicitamente calcolabile. Infatti, per (8.12) e (8.14), $x \in A$ $(R^* Rf)_i(x) = \int_A \lambda_{ij}(x, y) f_j(y)\, dy$ $(i = 1, \ldots, r)$ e, dall'essere $P_m w = \sum_{q=1}^{m} \omega^q ((w, \omega^q))$ si ottiene, per la (8.14)

$$(R^* P_m Rf)_i(x) = \sum_{q=1}^{m} (R^* \omega^q)_i (f, R^* \omega^q) = \sum_{q=1}^{m} \int_A \psi_i^q(x)\psi_j^q(y) f_j(y)\, dy.$$

Posto

$$\Gamma_{ij}^{(m)}(x, y) = \lambda_{ij}(x, y) - \sum_{q=1}^{m} \psi_i^q(x)\psi_j^q(y), \qquad (i, j = 1, \ldots, r) \tag{8.47}$$

sussiste la seguente rappresentazione integrale per Γ_m:

$$(\Gamma_m f)_i(x) = \int_A \Gamma_{ij}^{(m)}(x, y) f_j(y)\, dy \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

I proiettori $\{P_m\}_m$ convergono fortemente a P in $\mathcal{H}(A)$ e $Pw = \sum_{q=1}^{\infty} \omega^q ((w, \omega^q))$. Dato che l'operatore R^* trasforma con continuità lo spazio $\mathcal{H}(A)$ in $L^2(A)$ risulta, $x \in A$

$$(\Gamma f)_i(x) = \int_A \lambda_{ij}(x, y) f_j(y)\, dy - \sum_{q=1}^{\infty} \int_A \psi_i^q(x)\psi_j^q(y) f_j(y)\, dy. \tag{8.48}$$

La serie a secondo membro di (8.46), per il Teorema 8.11, converge in A × A alla funzione reale $\varphi_{ij}(x, y)$ definita in (8.40). La convergenza è uniforme all'interno di $A \times A$ e, per (8.35), $x, y \in A$,

$$\varphi_{ij}(x, y) = \gamma_{ij}(x, y) - \int_{\partial A} s_i(t - x) \circ L_t^{(\nu)} s_j(t - y)\, d\Sigma_t. \tag{8.49}$$

Fissato $x \in A$, dalla convergenza uniforme della serie (8.38), la (8.48), per ogni $f \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(A)$ diventa

$$(\Gamma f)_i(x) = \int_A (\lambda_{ij}(x, y) - \varphi_{ij}(x, y)) f_j(y)\, dy, \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{8.50}$$

Fissato $y \in A$, per $x \in A - y$,

$$\lambda_{ij}(x, y) = -\int_{\partial A} s_i(t - x) \circ L_t^{(\nu)} s_j(t - y)\, d\Sigma_t + s_{ij}(y - x). \tag{8.51}$$

Infatti, se $D(y, \rho)$ è l'ipersfera di centro y e raggio ρ contenuta in $A - x$, si applica la (8.5) al dominio $A - D(y, \rho)$ e, passando al limite per $\rho \to 0$ si ottiene la precedente espressione per $\lambda_{ij}(x, y)$.

Sostituendo (8.49) e (8.51) in (8.50) si ottiene

$$(8.52) \qquad (If)_i(x) = \int_A (s_{ij}(y - x) - \gamma_{ij}(x, y)) f_j(y)\, dy, \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Per ogni $x \in A$ la funzione di y: $\gamma_i(x, y)$ appartiene a $L^2(A)$. Inoltre If e Rf sono, come sappiamo, operatori continui da $L^2(A)$ in $L^2(A)$. Segue da ciò che la (8.52), e quindi la (8.50), sussistono (quasi ovunque in A), per ogni $f \in L^2(A)$. Da (8.50), per (8.41), segue la (8.46). Si noti che la (8.52) prova che l'operatore $\int_A \gamma_{ij}(x, y) f_j(y)\, dy$ è continuo da $L^2(A)$ in $H_1(A)$.

Sia ora $r = 3$. $R^* R$ è un operatore integrale il cui nucleo è dato dalla (8.45). Essendo $s_{ih/t_k}(t - x) = O(1/|x - t|^2)$ per un teorema noto [30, p. 806], risulta $\lambda_{ij}(x, y) = O(1/|x - y|)$ e quindi

$$\int_A \int_A |\lambda_{ij}(x, y)|^2 dx\, dy \leq \text{cost} \int_A \int_A \frac{1}{|x - y|^2} dx\, dy < \infty .$$

Ciò implica che $R^* R \in \mathcal{T}^2$. Per (8.19) segue che $\Gamma, \Gamma_m \in \mathcal{T}^2$. In modo analogo si prova che, in generale, gli operatori Γ e Γ_m appartengono alla classe $\mathcal{T}^\nu$, $\nu > r/2$.

Per $r = 2, 3$ Γ e $\Gamma_m \in \mathcal{T}^2$ quindi, per quanto detto nella sezione 3, $\Gamma(x, y)$ e $\Gamma^{(m)}(x, y) \in L^2(A \times A)$. Ripetendo la dimostrazione del Teorema 6.1 della *Nota* I (10), si ottiene la convergenza in $L^2(A \times A)$ delle «matrici di Green» $\Gamma^{(m)}(x, y)$ verso $\Gamma(x, y)$.

8.13. *Supposto* $r = 2, 3$

$$\lim_{m \to \infty} \int_A dx \int_A |\Gamma^{(m)}(x, y) - \Gamma(x, y)|^2 dy = 0.$$

Riassumiamo i principali risultati ottenuti nella presente sezione:

1) se A è un campo propriamente regolare e se $\nu > 0$, esiste l'operatore di Green del problema degli spostamenti per un corpo isotropo omogeneo. L'operatore Γ è dato da (8.18), dove R è definito da (8.11) e (8.12), R^* da (8.14) e P è definito nell'enunciato del Teorema 8.1. Nella definizione (8.10) del prodotto scalare si suppone σ verificante le (8.7);

2) assumendo $\partial A \in C^{1+\alpha}$, $\sigma = \nu/(\nu + 2)$ e $\nu > -2/r$, Γ è un operatore integrale la cui matrice nucleare è la matrice di Green del problema degli spostamenti. Essa è data da (8.46), dove $\lambda(x, y)$ è definita da (8.45) e $\psi_i^q(x)$ da (8.37). La serie a secondo membro di (8.46) converge uniformemente all'interno di $A \times A$ con qualsiasi serie derivata. La successione $\{\Gamma_{ij}^{(m)}(x, y)\}$ (cfr. 8.47), per $r = 2, 3$, converge in $L^2(A \times A)$.

(10) In effetti nella *Nota* I abbiamo dimostrato il seguente teorema: data una successione monotona non crescente di operatori appartenenti alla classe $\mathcal{T}^2$, uniformemente convergente, si ha la convergenza in $L^2(A \times A)$ delle corrispondenti funzioni di Green. Si fornisce, inoltre, una maggiorazione esplicita dell'errore di approssimazione.

9. Il problema degli spostamenti per un corpo anisotropo a coefficienti elastici discontinui

Supponiamo ora che A sia un campo limitato di $\boldsymbol{R}^r$ tale che: *esiste un omeomorfismo bi-lipschitziano che trasforma A in un campo D di Liapounov* (cioè con frontiera ∂D di classe $C^{1+\alpha}$).

Supponiamo che i coefficienti elastici di A, concepito come la configurazione naturale di un corpo elastico, siano funzioni $a_{ihjk}(x)$ misurabili e limitate in A verificanti le classiche condizioni di simmetria:

$$a_{ihjk}(x) = a_{hijk}(x) = a_{jkih}(x) \qquad x \in A. \tag{9.1}$$

Supporemo, inoltre, che esista una costante positiva p_0 tale che, considerate le $r(r+1)/2$ variabili reali ε_{ih} ($\varepsilon_{ih} = \varepsilon_{hi}$ $i, h = 1, \ldots, r$), sia

$$2^{-1} a_{ihjk}(x)\, \varepsilon_{ih}\, \varepsilon_{jk} \geq 2^{-1} p_0\, \varepsilon_{ih}\, \varepsilon_{ih} \qquad x \in A. \tag{9.2}$$

Indicata con $W(x, \varepsilon)$ la forma quadratica al primo membro di (9.2), cioè il *potenziale dell'energia elastica*, e posto $\varepsilon_{ih}[U] = 2^{-1}(U_{i/h} + U_{h/i})$ $[U \equiv (U_1, \ldots, U_r)$ è il vettore spostamento$]$ le equazioni $\sigma_{ih}[U] = a_{ihjk}(x)\, \varepsilon_{jk}[U] = \partial W(x, \varepsilon[U])/\partial \varepsilon_{ih}$ costituiscono la *legge di Hooke* per il corpo A, essendo le σ_{ih} le componenti del *tensore degli sforzi*.

Supponiamo che il corpo sia fisso lungo ∂A, cioè che il vettore spostamento si annulli su ∂A. Allora come classe degli spostamenti ammissibili possiamo assumere lo spazio $\overset{\circ}{H}_1(A)$. Sia $F = (F_1, \ldots, F_r)$ una funzione di $L^2(A)$ che determina la forza di massa agente su A. Per il principio dei lavori virtuali si ha l'equilibrio del corpo se e solo se

$$\int_A \sigma_{ih}[U]\, \varepsilon_{ih}[V]\, dx = \int_A F_i V_i\, dx \qquad \forall V \in \overset{\circ}{H}_1(A). \tag{9.3}$$

Posto $B(U, V) = \int_A a_{ihjk}(x)\, \varepsilon_{ih}[V]\, \varepsilon_{jk}[U]\, dx$ si ha, per le (9.1),

$$B(U, V) = \int_A a_{ihjk}(x)\, V_{i/h}\, U_{j/k}\, dx.$$

Pertanto le (9.3) possono così scriversi

$$B(U, V) = \int_A F_i V_i\, dx \qquad \forall V \in \overset{\circ}{H}_1(A). \tag{9.4}$$

Le (9.4) sono la *forma debole* delle equazioni dell'equilibrio per il problema degli spostamenti.

Sia $x = \psi(\xi)$ l'omeomorfismo bi-lipschitziano di D su A. È evidente che la funzione $U(x)$ appartiene a $H_1(A)$ (a $\overset{\circ}{H}_1(A)$) se e solo se la funzione di ξ: $u(\xi) = U[\psi(\xi)]$ appartiene a $H_1(D)$ (a $\overset{\circ}{H}_1(D)$). Posto $v(\xi) = V[\psi(\xi)]$, $u(\xi) = U[\psi(\xi)]$,

$$\partial\psi/\partial\xi = ((\partial\psi_i/\partial\xi_j)), \qquad (i, j = 1, \ldots, r), \qquad J(\xi) = \det \partial\psi/\partial\xi$$

si ha

$$\int_A a_{ihjk}(x)\, V_{i/h}\, U_{j/k}\, dx = \int_D \alpha_{ipjq}(\xi) \frac{\partial v_i}{\partial \xi_p} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_q}\, d\xi$$

con $\alpha_{ipjq}(\xi) = a_{ihjk}[\psi(\xi)]\, \partial\xi_p/\partial x_h\ \ \partial\xi_q/\partial x_k\ \ |J(\xi)|$. È immediato constatare che si ha in D $\alpha_{ipjq}(\xi) = \alpha_{jqip}(\xi)$.

Se x^1 e x^2 sono due qualsiasi punti di A e ξ^1, ξ^2 i loro corrispondenti punti in D esistono due costanti positive c_0 e c_1 tali che $c_0\,|\xi^1 - \xi^2| \leq |x^1 - x^2| \leq c_1\,|\xi^1 - \xi^2|$. Segue da ciò

$$c_0 \leq |\partial x_i/\partial \xi_j| \leq c_1, \quad c_1^{-1} \leq |\partial \xi_i/\partial x_j| \leq c_0^{-1} \qquad (i, j = 1, \ldots, r). \tag{9.5}$$

Ciò implica che le funzioni $\alpha_{ipjq}(\xi)$ sono misurabili e limitate in D.

Posto

$$f_i(\xi) = F_i[\psi(\xi)]\,|J(\xi)|, \qquad \mathcal{B}(u, v) = \int_D \alpha_{ipjq}(\xi) \frac{\partial v_i}{\partial \xi_p} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_q}\, d\xi,$$

il problema (9.4) è perfettamente equivalente al seguente

$$\mathcal{B}(u, v) = \int_D f_i v_i\, d\xi \qquad \forall v \in \mathring{H}_1(D). \tag{9.6}$$

D'ora in avanti considereremo esclusivamente (9.6) anziché (9.4), essendo ovvio come passare dalla soluzione di (9.6) a quella di (9.4).

Sussiste il seguente Lemma:

9.1. *Esiste una costante positiva $q_0(\nu)$ tale che, supposto $\nu > -2/r$ e $\sigma = \nu/(2 + \nu)$, si ha per ogni $u \in \mathring{H}_1(D)$*

$$\mathcal{B}(u, u) \geq q_0(\nu) \int_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_h} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_h} + (\nu - \sigma) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_h}{\partial \xi_h} + \sigma \frac{\partial u_i}{\partial \xi_h} \frac{\partial u_h}{\partial \xi_i} \right) d\xi. \tag{9.7}$$

Si noti che, con la scelta fatta di ν e di σ, la forma quadratica nelle $u_{i/h}$ sotto il segno di integrale, al secondo membro, è definita positiva. Dalle (9.5), per la disuguaglianza di Hadamard sui determinanti, si trae $|\det \partial x/\partial \xi| \leq r^{r/2} c_1^r$, $|\det \partial \xi/\partial x| \leq r^{r/2} c_0^{-r}$ e poiché $\partial x/\partial \xi$ è l'inversa di $\partial \xi/\partial x$

$$|\det \partial x/\partial \xi| \geq r^{-r/2} c_0^r, \qquad |\det \partial \xi/\partial x| \geq r^{-r/2} c_1^{-r}. \tag{9.8}$$

Se si considera la forma quadratica nelle variabili $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$:

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_h} \lambda_h \right)^2,$$

essa è definita positiva per la prima delle (9.8). Ma tale forma quadratica si scrive $\partial x_i/\partial \xi_h\ \partial x_i/\partial \xi_k\, \lambda_h \lambda_k$ e, per le (9.5), si ha

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_h} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \lambda_h \lambda_k \leq \frac{1}{2} \sum_{h,k}^{1,r} \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_h} \right| \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right| (\lambda_h^2 + \lambda_k^2) \leq r^2 c_1^2 \lambda_h \lambda_h.$$

Pertanto il massimo autovalore Λ della matrice

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^* \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = \left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_h}\ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right)\right) \qquad (h, k = 1, \ldots, r) \tag{9.9}$$

è tale che $\Lambda \leq r^2 c_1^2$.

Se si considera la matrice inversa della (9.9), cioè

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^* = \left(\left(\frac{\partial \xi_p}{\partial x_h}\ \frac{\partial \xi_q}{\partial x_h}\right)\right) \qquad (p, q = 1, \ldots, r),$$

avremo che il suo minimo autovalore $\lambda = \Lambda^{-1}$ è tale che $\lambda \geq r^{-2} c_1^{-2}$. Si ha, per ogni $U(x) \in \overset{\circ}{H}_1(A)$ (e, quindi, $u(\xi) = U[\psi(\xi)] \in \overset{\circ}{H}_1(D)$), tenendo presente (9.2)

$$\mathcal{B}(u, u) = B(U, U) \geq 2^{-1} p_0 \int_A (U_{i/h} U_{i/h} + U_{i/h} U_{h/i})\, dx \geq$$

$$\geq 2^{-1} p_0 \int_A [U_{i/h} U_{i/h} + U_{i/h} U_{h/i} - 3/2(U_{i/h} U_{h/i} - U_{i/i} U_{h/h})]\, dx \geq$$

$$\geq 4^{-1} p_0 \int_A U_{i/h} U_{i/h}\, dx = 4^{-1} p_0 \int_D \frac{\partial \xi_p}{\partial x_h}\ \frac{\partial \xi_q}{\partial x_h}\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_p}\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_q}\, |J(\xi)|\, d\xi \geq$$

$$\geq 4^{-1} p_0 r^{-r/2-2} c_0^r c_1^{-2} \int_D \frac{\partial u_i}{\partial \xi_p}\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_p}\, d\xi \geq$$

$$\geq \frac{p_0 p_1(\nu)}{4} r^{-r/2-2} c_0^r c_1^{-2} \int_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_h}\ \frac{\partial u_i}{\partial \xi_h} + (\nu - \sigma) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i}\ \frac{\partial u_h}{\partial \xi_h} + \sigma \frac{\partial u_i}{\partial \xi_h}\ \frac{\partial u_h}{\partial \xi_i}\right) d\xi$$

dove $p_1(\nu)$ è l'inverso del più grande autovalore della forma quadratica nelle variabili $\partial u_i / \partial \xi_h$ sotto il segno dell'ultimo integrale. Sussiste, quindi, la (9.7) con

$$q_0(\nu) = p_0 p_1(\nu) c_0^r / (4 r^{r/2+2} c_1^2).$$

D'ora in avanti supporemo che ν e σ soddisfino le ipotesi indicate nell'enunciato del Lemma ora dimostrato. Poiché $\mathcal{B}(u, v)$ è una forma bilineare e simmetrica definita in $\overset{\circ}{H}_1(D) \times \overset{\circ}{H}_1(D)$ e continua, esiste una trasformazione T lineare e continua di $\overset{\circ}{H}_1(D)$ in sé, tale che $\mathcal{B}(u, v) = (Tu, v)_H$, dove con H abbiamo indicato lo spazio di Hilbert $\overset{\circ}{H}_1(D)$. La T verifica, inoltre, le condizioni (1.1) e (1.2) della teoria generale esposta nella *Nota* I. Se $q_0(\nu)$ è una costante positiva per la quale sussiste la (9.7), poniamo

$$\mathcal{B}_0(u, v) = q_0(\nu) \int_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_h}\ \frac{\partial v_i}{\partial \xi_h} + (\nu - \sigma) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i}\ \frac{\partial v_h}{\partial \xi_h} + \sigma \frac{\partial u_i}{\partial \xi_h}\ \frac{\partial v_h}{\partial \xi_i}\right) d\xi.$$

Esiste un'operatore T_0 appartenente alla classe $\{T\}$ (cfr. sez. 1) tale che $\mathcal{B}_0(u, v) = (T_0 u, v)_H$.

Se consideriamo come spazio S lo spazio $L^2(D)$ (come spazio delle funzioni a valori r-vettori reali) il problema (9.6) diventa

$$(Tu, v)_H = (f, v) \qquad u \in H, \quad \forall v \in H \tag{9.10}$$

e quindi è un caso particolare del problema (1.3) considerato nella *Nota* I. Il problema

$$(T_0 u, v)_H = (f, v) \qquad u \in H, \quad \forall v \in H \tag{9.11}$$

è un problema base per il problema (9.10), riuscendo inoltre l'operatore $T - T_0$ strettamente positivo. A tal fine se sussiste la (9.7) con un dato $q_0(\nu)$ e se $T - T_0$ non è strettamente positivo, basta sostituire $q_0(\nu)$ con $q_0'(\nu)$ tale che $0 < q_0(\nu) < q_0'(\nu)$.

È noto l'operatore di Green G_0 relativo al problema (9.11). Si ha, infatti, per la teoria svolta nella sezione 8

$$G_0 = (R^* R - R^* PR)/q_0(\nu) \tag{9.12}$$

con il significato là attribuito agli operatori R, R^* e P. Si noti che il parametro ν può essere scelto a nostro arbitrio purché sia $\nu > -2/r$. Si può quindi applicare la teoria sviluppata nella *Nota* I e pervenire alla costruzione dell'operatore di Green per il problema (9.10), cioè (9.6). É questa l'approssimazione dall'alto di G. É del tutto ovvio come vada modificata la teoria della *Nota* I per ottenere quella dal basso.

Occorre tuttavia osservare che, da un punto di vista strettamente costruttivo, la frase «è noto l'operatore di Green G_0 relativo al problema (9.11)» non è del tutto accettabile dato che, nella espressione di G_0, data da (9.12), interviene l'operatore P che, concettualmente noto, richiede, per il suo calcolo la capacità di saper sommare una serie. Vogliamo mostrare come possa superarsi questa difficoltà.

Preliminarmente consideriamo il caso particolare nel quale D è il campo sferico $|\xi| < 1$ di $\boldsymbol{R}^r$. In tal caso assumiamo $\nu = 0$. Il problema di base si riduce allora al classico problema di Dirichlet per l'equazione (vettoriale) di Laplace $-u_{i/hh} = f_i/q_0(0)$ $(i = 1, \dots, r)$, per il quale l'operatore G_0 è classicamente noto, essendo quello la cui *matrice nucleare* $g^0(x, y)$ si esprime per mezzo della funzione di Green $\Gamma(x, y)$ del problema di Dirichlet nel campo sferico $|x| < 1$. Essa è data da

$$\Gamma(x, y) \begin{cases} = [(r-2)\,\omega_r]^{-1}(|x-y|^{2-r} - |y|^{2-r}\,|x - y/|y|^2|^{2-r}) \ \text{per } y \neq 0, \\ = [(r-2)\,\omega_r]^{-1}(|x|^{2-r} - 1) \ \text{per } y = 0, \end{cases}$$

e, per $r = 2$

$$\Gamma(x, y) \begin{cases} = -(2\pi)^{-1}(\log\ |x-y| - \log\ (|y|\,|x - y/|y|^2|) \ \text{per } y \neq 0, \\ = -(2\pi)^{-1}\log|x| \ \text{per } y = 0. \end{cases}$$

L'espressione di $\Gamma(x, y)$ si ottiene con procedimenti classici (cfr. [30, p. 63 e p. 91]) oppure sommando la serie (8.46) (dopo aver assunto A: $|x| < 1$ e $\nu = 0$), cosa che è facile fare.

Naturalmente l'ipotesi assunta su D implica una limitazione topologica per A, dato che «a priori», non è detto che A sia omeomorfo ad un campo sferico. Torniamo allora al caso generale. Lasciando ν arbitrario, purché $\nu > -2/r$ (la scelta di ν potrà, caso per caso, essere determinata da convenienze numeriche), l'idea è di sostituire G_0 dato dalla (9.12), con l'operatore $G_{0,m} = (R^*R - R^*P_m R)/q_0(\nu)$, per il quale, qualunque sia m, non si presenta più l'inconveniente costituito dal dovere sommare una serie. Per precisare diciamo che nella costruzione di G_n (vedi sez. 4) anziché valerci di G_0 useremo $G_{0,m}$. A tale fine si guardi la $(4.4)_n$. Essa verrà sostituita dalla seguente

$$u = G_{n,m} f = G_{0,m} f - \sum_{h,k}^{1,n} \sigma_{hk}^{(n,m)} (f, \varphi_h^{(m)}) \varphi_k^{(m)},$$

nella quale $\varphi_h^{(m)} = G_{0,m}\psi_h - \alpha_h$ e $\sigma_{hk}^{(n,m)}$ è la matrice inversa di $\{(\psi_i, \varphi_j^{(m)})\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. A tale proposito si osservi che la matrice $\{(\psi_i, \varphi_j^{(m)})\}$ è simmetrica dato che $(\psi_i, \varphi_j^{(m)}) = (\psi_i, G_{0,m}\psi_j) - (T\alpha_i, \alpha_j)_H$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ e sono simmetrici gli operatori $G_{o,m}$ e T nei rispettivi spazi nei quali operano. Si ha poi $|(\psi_i, \varphi_j^{(m)}) - (\psi_i, \varphi_j)| \leq \leq \|\psi_i\| \, \|R^*(P - P_m)R\| \, \|\psi_j\|$.

Poiché possiamo supporre che sia $\|\psi_i\| = 1$, $(i = 1, 2, \ldots)$, se poniamo $\varepsilon(m) = \|R^*(P - P_m)R\|$, abbiamo (cfr. sez. 8) $|(\psi_i, \varphi_j^{(m)}) - (\psi_i, \varphi_j)| \leq \varepsilon(m)$, $\lim_{m \to \infty} \varepsilon(m) = 0$.

Esiste quindi m_n tale che per $m > m_n$ si ha det $\{(\psi_i, \varphi_j^{(m)})\} \neq 0$. Ripetendo le argomentazioni svolte nella sez. 5 si prova che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $m_n(\varepsilon)$ tale che, per $m > m_n(\varepsilon)$, $\|G_n - G_{n,m}\| < \varepsilon$. Quindi per il Teorema 4.2, per $n > n_\varepsilon$ e $m > m_n(\varepsilon)$, $\|G - G_{n,m}\| < 2\varepsilon$. È pertanto possibile l'approssimazione uniforme di G con operatori del tipo $G_{n,m}$ *esplicitamente noti*.

Se $\{\Lambda_{n,h}\}$ sono gli autovalori dell'operatore $P(G_n - G^{1/2} Q_n G^{1/2})P$, dove P è un arbitrario proiettore ortogonale di S e Q_n il proiettore ortogonale di S considerato nella sez. 4 e se $\{\Lambda_{n,m,h}\}$ sono quelli di $P(G_{n,m} - G^{1/2} Q_n G^{1/2})P$ si ha, per ogni h $|\Lambda_{n,h} - \Lambda_{n,m,h}| \leq \|G_n - G_{n,m}\|$.

È facile da questa osservazione dedurre come vadano modificati i Teoremi 4.6 e 4.7 quando G_n viene sostituito da $G_{n,m}$. Ciò permette la maggiorazione esplicita dell'errore $\|G - G_{n,m}\|$.

Si noti che dalla disuguaglianza

$$\mathcal{B}(u, u) \geq q_0(0) \int_D u_{i/h} u_{i/h} \, dx \qquad \forall u \in \overset{\circ}{H}_1(D)$$

segue che gli operatori $G_{0,m}$, G_0 e G appartengono alla classe $\mathcal{T}^\nu$ quando a $\mathcal{T}^\nu$ appartiene l'operatore di Green per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace, ovvero la soluzione fondamentale $s(x-y)$. Ciò si verifica per $\nu > r/2$.

Vogliamo infine accennare al calcolo della funzione di Green del problema (9.6) (e quindi del problema (9.4)). Osserviamo intanto che al fine di applicare la teoria generale, come sviluppata nella *Nota* I, il problema (9.11) ha una naturale realizzazione nello spazio $L^2[D \times (1, 2, \ldots, r); \mu]$ dove l'insieme di definizione delle funzioni è ottenuto come prodotto cartesiano del campo D di $\boldsymbol{R}^r$ per l'insieme dell'asse reale costituito dai punti di ascissa $1, 2, \ldots, r$. Una funzione di tale spazio è quindi del tipo $u = u(x, h)$ $x \in D$, $h = 1, 2, \ldots, r$, cioè si identifica con una funzione a valori r-vettori $u(x) \equiv \{u_1(x), \ldots, u_r(x)\}$. La misura μ introdotta in $L^2[D \times (1, 2, \ldots, r); \mu]$ è la seguente: $\mu(B, h) = \tau(B) \times \delta_h(I)$ dove per ogni boreliano B di D e per ogni h $(1 \leq h \leq r)$, $\tau(B)$

è la misura di Lebesgue di B e $\delta_h(I)$ è la misura di Dirac sugli intervalli I dell'asse reale con massa unitaria nel punto h. Si ha quindi che μ si identifica con una misura r-vettoriale le cui componenti, per ogni B, sono tutte uguali alla misura di Lebesgue di B. Ne segue che S si realizza nello spazio r-vettoriale $L^2(D)$ e $(u, v)_S = (u, v) = \int_D u_i(x)\, v_i(x)\, dx$.

È poi evidente che H è lo spazio r-vettoriale $\overset{\circ}{H}_1(D)$ e $(u, v)_H = \int_D (u_{i/h} v_{i/h} + u_i v_i)\, dx$.

La *funzione di Green* del problema (9.10) $g(x, y; i, j)$ si identifica con una matrice: la *matrice di Green*

$$g(x, y) = ((g_{ij}(x, y))) \qquad (i, j = 1, \ldots, r). \tag{9.13}$$

Per $r = 2$ ed $r = 3$ si ha $G_{0,m}$, $G_0 \in \mathcal{T}^2$. Si può applicare allora la teoria della *Nota* I concernente il calcolo della matrice di Green (9.13). Tale calcolo diventa del tutto esplicito se l'operatore G_0 si sostituisce con $G_{0,m}$. Le tecniche della *Nota* I di maggiorazione dell'errore di approssimazione della funzione di Green si estendono facilmente al caso in cui G_0 è sostituito da $G_{0,m}$.

Bibliografia

[22] M. Picone, *Sur un problème noveau pour l'équation linéaire aux dérivées partielles de la théorie mathématique classique de l'élasticité.* Colloque sur les équations aux dérivées partielles, CBRM, Bruxelles, Mai, 1954, 9-11.

[23] G. Fichera, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari.* Atti Conv. Intern. sulle Eq. alle derivate parziali, Trieste 1954, 174-227.

[24] L. Lichtenstein, *Uber das Poissonsche Integral und uber die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logaritmischen Potentials.* J. Math., vol. 141, 1912, 12-42.

[25] K. O. Friedrichs, *A Theorem of Lichtenstein.* Duke Math. J., vol. 14, 1947, 67-82.

[26] G. Fichera, *Existence Theorems in Elasticity.* Handbuch der Physik, vol. VIa/2, Springer Verlag, New York 1972, 347-389.

[27] G. Fichera, *Sull'esistenza delle soluzioni di problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. IV, fasc. I-II, 1950, 35-101.

[28] P. Castellani, *On the first boundary value problem for the classical theory of elasticity in a three-dimensional domain with a singular boundary.* J. of Elasticity, vol. 3, n. 4, 1973, 225-259.

[29] G. Fichera - L. De Vito, *Funzioni analitiche di una variabile complessa.* Libreria Veschi, III ediz., Roma 1971.

[30] M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore.* Rondinella, Napoli 1940.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 2 - 00185 Roma