Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Paolo Piccinni

Campi di vettori e numeri caratteristici su varietà iperkahleriane e quaternionali kàhleriane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **3** (1992), n.4, p. 295–298.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_4_295_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 3:295-298 (1992)

Geometria differenziale. — *Campi di vettori e numeri caratteristici su varietà iperkähleriane e quaternionali kähleriane.* Nota di Paolo Piccinni, presentata (*) dal Socio E. Martinelli.

Abstract. — *Vector fields and characteristic numbers on hyperkähler and quaternion Kähler manifolds.* We announce some properties of quaternionic infinitesimal automorphisms, in particular a formula of Bott type relating their zeroes with symplectic Pontrjagin numbers.

Key words: Infinitesimal automorphism; Hyperkähler manifold; Quaternion Kähler manifold.

Riassunto. — Si annunciano alcuni risultati relativi agli automorfismi infinitesimali quaternionali, in particolare una formula di tipo Bott che lega i loro zeri con i numeri simplettici di Pontrjagin.

Tra le possibili classi di varietà dotate di strutture di tipo quaternionale quelle che negli ultimi anni hanno attratto più attenzione sono le *varietà iperkähleriane* e le *varietà quaternionali kähleriane*, definite come varietà riemanniane (M, g) di dimensione $4n$ con gruppo di olonomia contenuto rispettivamente in $Sp(n)$ e in $Sp(n)Sp(1)$. Poiché $Sp(n) \subset SU(2n)$, le varietà iperkähleriane risultano kähleriane complesse e Ricci-piatte. Per $n = 1$ esempi compatti sono tori e superfici $K3$ (su cui una metrica con olonomia $Sp(1) \cong SU(2)$ è data dal teorema di Calabi-Yau); varietà iperkähleriane compatte con $n \geqslant 2$ si costruiscono di conseguenza (cfr. [1, 2]). Gli spazi proiettivi quaternionali $\boldsymbol{H}P^n$ non ammettono invece alcuna struttura $Sp(n)$. La considerazione di $Sp(n)Sp(1)$, sottogruppo massimale di $SO(4n)$, come gruppo strutturale di una più ampia classe di varietà quaternionali fu proposto da E. Martinelli [6, 7]; questa scelta permette di includere, oltre alle varietà iperkähleriane e ad $\boldsymbol{H}P^n$, vari esempi notevoli di varietà riemanniane simmetriche e non simmetriche [2]. Benché non si richieda l'integrabilità della struttura quaternionale (il che per un teorema di S. Marchiafava [5] restringerebbe la classe alle sole varietà localmente proiettive quaternionali), e benché le varietà quaternionali kähleriane non ammettano generalmente alcuna struttura quasi complessa, ne esiste una canonica e integrabile sullo *spazio dei twistors* e ciò consente il loro studio con metodi di geometria complessa (cfr. [2, 12, 13]).

In questa *Nota*, preliminare al più ampio lavoro [10], presentiamo alcuni risultati relativi all'esistenza di automorfismi infinitesimali su varietà iperkähleriane e quaternionali kähleriane, nonché una formula che lega zeri di automorfismi infinitesimali e numeri simplettici di Pontrjagin. Le G-strutture considerate sono relative ai gruppi $Sp(n)$ e $Sp(n)Sp(1)$ ovvero, quando si voglia tralasciare la metrica, ai gruppi $GL(n, \boldsymbol{H})$ e $GL(n, \boldsymbol{H})\,Sp(1)$. Gli automorfismi di queste quattro G-strutture, tutte di tipo finito, costituiscono gruppi di Lie, gli automorfismi infinitesimali

(*) Nella seduta del 9 maggio 1992.

algebre di Lie; denoteremo quest'ultime con $\mathfrak{a}(M, g)$ per le prime due scelte del gruppo G e con $\mathfrak{a}(M)$ per le ultime due.

1. Rimandiamo a [4] per la teoria generale degli automorfismi infinitesimali di G-strutture, che qui ci interessano su varietà $4n$-dimensionali M relativamente ai quattro gruppi sopra menzionati. Ricordiamo [2] che assegnare una struttura $GL(n, \boldsymbol{H})$ su M equivale a definire $I, J, K \in \operatorname{End} TM$ con $I^2 = J^2 = K^2 = -id$, $IJ = -JI = K, \ldots$; le strutture $GL(n, \boldsymbol{H})\, Sp(1)$ corrispondono invece a sottofibrati vettoriali $H \subset \operatorname{End} TM$ localmente generati da terne $\{I, J, K\}$ del tipo detto e legate tra loro da matrici di $SO(3)$. In entrambi i casi le $\{I, J, K\}$, rispettivamente globali e locali, sono *strutture quaternionali ammissibili* e ogni $\alpha I + \beta J + \gamma K$, (con $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R}$ e valendo $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) è una *struttura complessa ammissibile*. Nelle strutture $Sp(n)$ e $Sp(n)\, Sp(1)$ si aggiunge una metrica g hermitiana rispetto a ogni struttura complessa ammissibile, e si hanno varietà iperkähleriane e quaternionali kähleriane se e solo se è rispettivamente $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$ ovvero $\nabla H = 0$ rispetto alla connessione di Levi Civita.

2. Su (M, g) iperkähleriana consideriamo le algebre di Lie $\mathfrak{a}(M)$ e $\mathfrak{a}(M, g)$ sopra definite e $\mathfrak{k}(M, g)$ dei campi di Killing. Dalla struttura kähleriana complessa e Ricci piatta di M si ha:

Teorema 1. *Se M è iperkähleriana compatta, risulta $\mathfrak{a}(M) = \mathfrak{a}(M, g) = \mathfrak{k}(M, g)$. Se inoltre è $\mathfrak{a}(M) \neq 0$, M è localmente isometrica al prodotto di un toro iperkähleriano T e di varietà iperkähleriane irriducibili compatte con olonomia $Sp(n_i)$.*

Essendo ogni $\xi \in \mathfrak{a}(M) = \mathfrak{k}(M, g)$ parallelo, da $\mathfrak{a}(M) \neq 0$ segue infatti l'invarianza per olonomia dei campi di rette generati, e da ciò l'esistenza del toro T nella decomposizione di de Rham e l'olonomia $Sp(n_i)$ per gli altri fattori, necessariamente non simmetrici. La presenza del fattore T implica:

Corollario. *Sia M iperkähleriana compatta con $\mathfrak{a}(M) \neq 0$. Allora ogni struttura complessa ammissibile su M ha numeri di Chern nulli.*

3. Se (M, g) è quaternionale kähleriana, consideriamo $\nabla \xi \in \Gamma(M, \operatorname{End} TM)$, $\nabla \xi \colon X_m \in T_m M \to \nabla_{X_m} \xi \in T_m M$. Vale la seguente:

Proposizione 1. *$\xi \in \mathfrak{a}(M)$ se e solo se $\nabla \xi$ si rappresenta, in riferimenti quaternionali unitari, con matrici di $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{H}) \oplus \mathfrak{sp}(1) \subset \mathfrak{gl}(4n, \boldsymbol{R})$. Similmente $\xi \in \mathfrak{a}(M, g)$ se e solo se $\nabla \xi$ si rappresenta, negli stessi riferimenti, con matrici di $\mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1)$.*

Dalla armonicità della 4-forma (globale) $\omega = \omega_I \wedge \omega_I + \omega_J \wedge \omega_J + \omega_k \wedge \omega_k$, localmente definita dalle forme di Kähler $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ di I, J, K, si ha d'altronde $L_\xi \omega = 0$ per ogni ξ di Killing su M compatta. Ne segue:

Proposizione 2. *Se (M, g) è quaternionale kähleriana compatta, $\mathfrak{a}(M, g) = \mathfrak{k}(M, g)$.*

Osserviamo che sulle (M, g) quaternionali kähleriane può essere $\mathfrak{a}(M) \neq \mathfrak{a}(M, g)$. Questo è il caso di $\boldsymbol{H}P^n$ con la metrica di [7], per cui si ha $\mathfrak{a}(M) \cong \mathfrak{sl}(n+1, \boldsymbol{H})$ e $\mathfrak{a}(M, g) \cong \mathfrak{sp}(n+1)$.

Vediamo ora il legame tra gli zeri degli $\xi \in \mathfrak{a}(M, g)$ e i numeri caratteristici quaternionali. Ricordiamo che la coomologia $H^*(B_{Sp(n)Sp(1)}; \boldsymbol{R})$ è isomorfa a $\boldsymbol{R}[j_1, \dots, j_n, k]$, essendo $j_\alpha \in H^{4\alpha}$, $k \in H^4$ le *classi simplettiche di Pontrjagin* [11]. Esse sono ottenibili da forme di curvatura $(\Omega, \Phi)\colon \to \mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ di una connessione compatibile con la struttura $Sp(n)Sp(1)$ di un fibrato vettoriale; precisamente si ha:

$$1 + j_1 + \dots + j_n = \widetilde{\det}_D [(I - \Omega/2\pi) \wedge (I - \overline{\Omega}^t/2\pi)] =$$
$$= 1 + \sigma_1(\Omega\overline{\Omega}^t)/(2\pi)^2 + \dots + \sigma_n(\Omega\overline{\Omega}^t)/(2\pi)^{2n}, \qquad k = \Phi \wedge \overline{\Phi}/(2\pi)^2$$

essendo $\widetilde{\det}_D$ il *determinante di Dieudonnè con segno*, espressione polinomiale negli elementi della matrice hermitiana in parentesi di forme differenziali quaternionali, e $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ i relativi *coefficienti del polinomio caratteristico* [9, 11].

In analogia con i casi complesso e riemanniano (cfr. Bott [3]), si ha qui:

Teorema 2. *Sia (M, g) quaternionale kähleriana compatta e $\xi \in \mathfrak{a}(M, g)$ con zeri isolati non degeneri. Sussiste la formula:*

$$\sum_{\xi = 0} \frac{\sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n} \rho^\beta}{\rho^n + \rho^{n-1}\sigma_1 + \dots + \sigma_n} = \int_M j_1^{\alpha_1} \dots j_n^{\alpha_n} k^\beta,$$

dove $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n + \beta = n$ e, rappresentando $\nabla\xi$ secondo la Proposizione 1 con $(\Theta, \theta) \in \mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, si è posto $\rho = \theta\bar{\theta}$, mentre i polinomi $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sono valutati sulla matrice hermitiana $\Theta\overline{\Theta}^t$.

La condizione che gli zeri siano non degeneri esprime in essi l'invertibilità di $\nabla\xi$, che ha per pfaffiano il denominatore a primo membro della formula. La dimostrazione si basa sulla scrittura della forma integrata come differenziale di un'opportuna $(4n-1)$-forma su M privata degli zeri di ξ. Nel calcolo locale, cui il teorema di Stokes riduce il computo del numero caratteristico, si usa l'esistenza locale di una struttura complessa integrabile ammissibile nella struttura $GL(n, \boldsymbol{H})Sp(1)$.

Nel caso iperkähleriano, tenuto conto che $c_{2\alpha} = (-1)^\alpha j_\alpha$, $c_{2\alpha - 1} = 0$, si riottiene il corollario del n. 2.

4. Ricordiamo che ogni (M^{4n}, g) quaternionale kähleriana è di Einstein per $n \geqslant 2$: $r(X, Y) = sg(X, Y)$, con la curvatura scalare $s = 0$ per (M, g) localmente iperkähleriana. Lo spazio dei twistors Z, fibrato di sfere associato ad $H \subset \operatorname{End} TM \to M$ rispetto a una metrica che renda ortonormali le $\{I, J, K\}$ ammissibili, è dotato di una struttura complessa $\hat{J}$ integrabile e, se $s \neq 0$, di una struttura di contatto complessa θ con nucleo la $D \subset TZ$ orizzontale della connessione di Levi Civita. Per $s < 0$ si ha su Z una metrica h pseudo-Kähler-Einstein, definita positiva solo su D [12, 2].

I campi di $\mathfrak{a}(M)$ e $\mathfrak{a}(M, g)$ si sollevano a Z mediante il differenziale l_* di

$$l\colon \operatorname{Aut} M \to \operatorname{Aut} Z,$$

$[l(\varphi)](z) = \varphi_* z \varphi_*^{-1}$, pensando $z \in Z$ come struttura complessa di $T_{\pi(z)} M$. Dalle proprietà di l [8] si ha:

PROPOSIZIONE 3. *Se* (M^{4n}, g) *è quaternionale kähleriana con* $n \geqslant 2$ *e* $s \neq 0$, l_* *è un isomorfismo di* $\mathfrak{a}(M)$ *su* $\mathfrak{a}(Z, \tau)$, *automorfismi infinitesimali di* $\hat{J}$ *e dell'antipodalità* τ *sulle fibre di* Z. *Similmente* $l_*(\mathfrak{a}(M, g)) = \mathfrak{a}(Z, \theta, \tau)$ *automorfismi infinitesimali anche della struttura di contatto.*

Se $\xi \in \mathfrak{a}(M)$ e $\hat{\xi} \in \mathfrak{a}(Z, \tau)$ è il suo sollevamento, risulta $\theta(\hat{\xi}) \in \mathfrak{a}(Z, \theta, \tau) \cong \mathfrak{a}(M, g)$. Dunque se M è compatta con $s < 0$ è $\theta(\hat{\xi}) = 0$, ovvero $\hat{\xi} \in D$. Il calcolo della curvatura di Ricci della connessione hermitiana del fibrato $(D, h) \to Z$ consente di applicare il teorema di annullamento di Kobayashi-Wu [14] e di ottenere:

TEOREMA 3. *Sia* (M, g) *quaternionale kähleriana compatta con curvatura scalare* $s < 0$. *Allora* $\mathfrak{a}(M) = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. ATIYAH, *Hyperkähler manifolds.* Proceedings of Symposium on *Complex Geometry and Analysis* (Pisa 1988). Springer 1990.

[2] A. BESSE, *Einstein manifolds.* Springer 1987.

[3] R. BOTT, *Vector fields and characteristic numbers.* Mich. Math. J., 14, 1967, 231-244.

[4] S. KOBAYASHI, *Transformation groups in Differential Geometry.* Springer 1972.

[5] S. MARCHIAFAVA, *Sulle varietà a struttura quaternionale generalizzata.* Rend. Mat., 3, 1970, 529-545.

[6] E. MARTINELLI, *Varietà a struttura quaternionale generalizzata.* Atti Acc. Lincei Rend fis., s. 8, v. 26, 1959, 353-362.

[7] E. MARTINELLI, *Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale.* Ann. di Mat. Pura e Appl., 49, 1960, 73-90.

[8] T. NITTA - M. TAKEUCHI, *Contact structures on twistor spaces.* J. Math. Soc. Japan, 39, 1987, 139-162.

[9] P. PICCINNI, *Dieudonné determinant and invariant real polynomials on* $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{H})$. Rend. Mat., 2, 1982, 31-45.

[10] P. PICCINNI, *On the infinitesimal automorphisms of quaternionic structures.* Preprint.

[11] P. PICCINNI - G. ROMANI, *A generalization of symplectic Pontrjagin classes to vector bundles with structure group* $Sp(n)Sp(1)$. Ann. di Mat. Pura e Appl., 133, 1983, 1-18.

[12] S. SALAMON, *Quaternionic Kähler manifolds.* Invent. Math., 67, 1982, 143-171.

[13] S. SALAMON, *Riemannian geometry and holonomy groups.* Longman Sc. and Tech., 1989.

[14] H. WU, *The Bochner Technique in Differential Geometry.* Math. Reports, 3, 1988, 299-538.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 2 - 00185 ROMA