Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Flavia Lanzara

Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema delle tensioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **4** (1993), n.1, p. 3–27.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1993_9_4_1_3_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1993.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 4:3-27 (1993)

Matematica. — *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema delle tensioni.* Nota III di FLAVIA LANZARA, presentata (*) dal Socio G. Fichera.

ABSTRACT. — *Theory and applications of intermediate operators: elastostatics with discontinuous coefficients, the problem of the tensions*. The theory of *Note* I is applied to the boundary value problem of Elastostatics when vanishing forces are given on the boundary. The elastic coefficients are only supposed to be bounded and measurable. A detailed analysis is carried out for determining the base operator.

KEY WORDS: Elastostatics with discontinuous coefficients; Green's operator; Green's matrix.

RIASSUNTO. — Viene applicata la teoria della *Nota* I al problema al contorno dell'elastostatica quando sul contorno vengono prescritte forze nulle. I coefficienti elastici sono supposti solo limitati e misurabili. Viene fatta un'analisi dettagliata per determinare l'operatore base.

In questa *Nota* si applica la teoria generale sviluppata nella *Nota* I (1) al problema al contorno dell'elastostatica corrispondente al cosiddetto *problema delle tensioni*: forze di massa e forze superficiali assegnate. Senza sostanziale lesione alla generalità, supporremo nulle le forze superficiali. Come nella *Nota* II (2) assumeremo i coefficienti elastici soltanto misurabili e limitati (cfr. sez. 7).

Le numerazioni delle sezioni e della bibliografia proseguono quelle della *Nota* II.

10. Il problema delle tensioni per un corpo anisotropo a coefficienti elastici discontinui

Supponiamo che A sia un campo limitato dello spazio cartesiano r-dimensionale, campo che assumiamo come configurazione naturale di un corpo elastico che seguitiamo a chiamare con A.

I coefficienti elastici $a_{ihjk}(x)$ di A sono funzioni limitate e misurabili e sussistono le (9.1) e (9.2), con un'opportuna costante positiva p_0.

Si suppone che nessuna forza agisca sul contorno ∂A. In tal caso come classe degli spostamenti ammissibili si assume lo spazio $H_1(A)$. Se $F \equiv (F_1, \ldots, F_r)$ è la forza di massa che agisce sul corpo A, $F \in L^2(A)$, posto $B(U, V) = \int_A a_{ihjk}(x)\, U_{i/h}\, V_{j/k}\, dx$, U, $V \in H_1(A)$, le equazioni dell'equilibrio per il problema delle tensioni possono scriversi nel

(*) Nella seduta dell'11 novembre 1992.

(1) *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: risultati generali*. Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, vol. 3, 1992, 79-101.

(2) *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema degli spostamenti*. Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, vol. 3, 1992, 149-171.

modo seguente:

$$B(U, V) = \int_A F_i(x)\, V_i(x)\, dx, \qquad \forall V \in H_1(A). \tag{10.1}$$

Non essendo il corpo elastico soggetto ad alcun vincolo la forza di massa F non potrà essere data ad arbitrio. Il problema (10.1) ha soluzione se e solo se, per ogni spostamento rigido $\rho(x) \equiv (\rho_1(x), \ldots, \rho_r(x))$, la forza di massa $F(x)$ soddisfa le condizioni di compatibilità:

$$\int_A F_i(x)\, \rho_i(x)\, dx = 0. \tag{10.2}$$

Un generico spostamento rigido si esprime nel modo seguente: $\rho(x) = a + Cx$, dove a è un r-vettore costante e $C = ((c_{ij}))$ una matrice costante emisimmetrica cioè tale che $c_{ij} = -c_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, r)$. Se $R(A)$ è la varietà lineare costituita da tutti gli spostamenti rigidi, essa ha dimensione $r(r+1)/2$.

Esiste la soluzione $U \in H_1(A)$ di (10.1) ed è determinata a meno di uno spostamento rigido $\rho \in R(A)$. Infatti per la *seconda diseguaglianza di Korn* (cfr. [26, p. 381]) esiste una costante $c_3 > 0$, che dipende da A, tale che

$$\int_A \varepsilon_{ih}[U]\, \varepsilon_{ih}[U]\, dx + \int_A U_i U_i\, dx \geq c_3 \|U\|_1^2, \qquad \forall U \in H_1(A) \tag{10.3}$$

che, insieme alla (9.2), fornisce un teorema di esistenza e unicità per la soluzione $U \in H_1(A)$ del problema $B(U, V) + (U, V) = (F, V), \forall V \in H_1(A)$. Sia $U = \mathcal{G}F$. Il problema di determinare $U \in H_1(A)$ tale che $B(U, V) + (U, V) = \lambda(U, V) + (F, V)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, è così equivalente al problema $U = \lambda\mathcal{G}U + \mathcal{G}F$. A quest'ultima equazione si può applicare la teoria dell'alternativa di Fredholm che assicura l'esistenza della soluzione U se e solo se il termine noto F è ortogonale ad ogni soluzione dell'equazione omogenea $U = \lambda\mathcal{G}U$ cioè ad ogni soluzione dell'equazione $B(U, V) + (U, V) = \lambda(U, V)$. Per $\lambda = 1$ si ottiene il problema (10.1) che quindi ha soluzione se F è ortogonale alle autosoluzioni dell'equazione omogenea $B(U, V) = 0$ $\forall V \in H_1(A)$ cioè se F soddisfa le condizioni (10.2).

Se U è soluzione di (10.1), $U + \rho$ è ancora soluzione, qualsiasi sia $\rho \in R(A)$ Se $W(A)$ è il sottospazio di $H_1(A)$ costituito da tutte le funzioni U ortogonali in $L^2(A)$ agli spostamenti rigidi cioè $W(A) = \{U \in H_1(A) : (U, \rho) = 0,\ \forall \rho \in R(A)\}$ è evidente che è unica la soluzione del problema (10.1) in $W(A)$. Con questa condizione il problema (10.1) equivale a determinare $U \in W(A)$ tale che

$$B(U, V) = (F, V), \qquad \forall V \in W(A), \tag{10.4}$$

data $F \in L^2(A)$ verificante le condizioni (10.2) (cfr. [31]).

10.1. *Esiste una costante $p_2 > 0$, che dipende da A, tale che*

$$B(U, U) \geq p_2 \int_A U_{i/h}\, U_{i/h}\, dx, \qquad \forall U \in W(A). \tag{10.5}$$

(Cfr. [31]). Sia $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ la successione di autovalori corrispondente al problema $B(U, V) = \lambda(U, V)$, $U, V \in W(A)$. Risulta $\lambda_1 > 0$ dato che l'equazione $B(U, V) = 0$, $\forall V \in W(A)$, non ammette autosoluzioni in $W(A)$. Se $\tilde{\lambda}$ è tale che $0 < \tilde{\lambda} \leqslant \leqslant \lambda_1$, sarà

$$B(U, U) \geqslant \tilde{\lambda}(U, U), \qquad \forall U \in W(A). \tag{10.6}$$

Quindi, tenendo presente (9.2), (10.3) e (10.6) si ottiene

$$B(U, U)(1 + p_0 \tilde{\lambda}^{-1}) \geqslant p_0 \int_A \varepsilon_{ih}[U]\, \varepsilon_{ih}[U]\, dx + p_0(U, U) \geqslant p_0 c_3 \|U\|_1^2$$

cioè la (10.5) vale assumendo $p_2 = (p_0 c_3)/(1 + p_0 \tilde{\lambda}^{-1})$. Per il calcolo esplicito della costante c_3 cfr. [32-33]. Possiamo supporre che p_2 sia una costante esplicitamente nota.

Supponiamo che *esista un omeomorfismo bi-lipschitziano che trasforma il campo A in un campo* D per il quale è esplicitamente noto l'*operatore di Green* N tale che, se $f \in L^2(D)$ e $\int_D f(\xi)\, d\xi = 0$, allora $u = Nf$ appartiene allo spazio $H_1(D)$ ed è soluzione del seguente problema: determinare $u \in H_1(D)$, $\int_D u(\xi)\, d\xi = 0$, tale che

$$((u, v)) = \int_D f_i v_i \, d\xi, \qquad \forall v \in H_1(D) : \int_D v(\xi)\, d\xi = 0. \tag{10.7}$$

Come nelle sezioni precedenti $((u, v))$ denota il prodotto scalare (8.10), assumendo $\nu > -2/r$ e $\sigma = \nu/(\nu + 2)$, e $\mathcal{H}(D)$ è lo spazio di Hilbert ottenuto introducendo in $H_1(D)$ questo prodotto scalare, convenendo di identificare due funzioni che differiscono per un r-vettore costante. L'operatore N è un PCO dello spazio $L^2(D)/r$-vettori costanti, ed appartiene alla classe $\mathcal{C}^m$ per un opportuno $m > 0$. Nelle sezioni 11 e 12 verranno considerati campi che verificano queste ipotesi, assumendo $\nu = 0$ e $\sigma = 0$.

Adoperando le tecniche già descritte in [31] faremo vedere come l'operatore N dia luogo ad un operatore base G_0 che permette di applicare al problema (10.4) la teoria generale descritta nella *Nota* I e permette di ripetere per il problema delle tensioni le considerazioni contenute nella sezione 9.

Se $x = \psi(\xi)$ è l'omeomorfismo bi-lipschitziano di D su A, il problema (10.1), procedendo come nella sezione 9, si trasforma nel problema equivalente

$$\mathcal{B}(u, v) = \int_D f_i(\xi) v_i(\xi)\, |J(\xi)|\, d\xi, \qquad \forall v \in H_1(D), \tag{10.8}$$

dove $J(\xi) = \det \partial\psi/\partial\xi$ è il determinante della matrice jacobiana della trasformazione $x = \psi(\xi)$, $f_i(\xi) = F_i(\psi(\xi))$ $(i = 1, \ldots, r)$, e risulta

$$\alpha_{ipjq}(\xi) = a_{ihjk}(\psi(\xi))\, \partial\xi_p/\partial x_h\, \partial\xi_q/\partial x_k\, |J(\xi)|, \qquad (i, j, p, q = 1, \ldots, r),$$

$$\mathcal{B}(u, v) = \int_D \alpha_{ipjq}(\xi)\, u_{i/p}(\xi)\, v_{j/q}(\xi)\, d\xi.$$

Posto $\tilde{\rho}(\xi) = \rho(\psi(\xi))$, la funzione $f(\xi)$ appartiene a $L^2(D)$ e soddisfa le condizioni di compatibilità:

(10.9) $$\int_D f_i(\xi)\,\tilde{\rho}_i(\xi)\,|J(\xi)|\,d\xi = 0, \qquad \forall \tilde{\rho} \in \tilde{R}(D),$$

dove $\tilde{R}(D)$ è la varietà lineare di tutti i vettori $\tilde{\rho}(\xi) = \rho(\psi(\xi))$, per ogni $\rho(x) \in \in R(A)$.

Sia $L_0^2(D)$ lo spazio costituito dalle funzioni di $L^2(D)$ che verificano le condizioni (10.9) e sia $\tilde{W}(D)$ la varietà trasformata della $W(A)$ cioè

$$\tilde{W}(D) = \left\{ u \in H_1(D) : \int_D u_i(\xi)\,\tilde{\rho}_i(\xi)\,|J(\xi)|\,d\xi = 0, \quad \forall \tilde{\rho} \in \tilde{R}(D) \right\}.$$

Il problema (10.4) si trasforma nel problema equivalente di determinare $u \in \tilde{W}(D)$ tale che

(10.10) $$\mathcal{B}(u, v) = (f, |J|\,v)\,(^3), \qquad \forall v \in \tilde{W}(D),$$

data $f \in L_0^2(D)$. Sia $u = Gf$ la soluzione. L'operatore G è simmetrico nello spazio $L_0^2(D)$ dotato del prodotto scalare

$$[u, v] = \int_D u_i(\xi)\,v_i(\xi)\,|J(\xi)|\,d\xi.$$

Si indichi con $L_0^2(D, |J|)$ questo nuovo spazio che, per (9.8), è hilbertianamente isomorfo a $L_0^2(D)$. L'operatore G è un PCO dello spazio $L_0^2(D, |J|)$.

10.2. *È possibile determinare una costante positiva $q_0(\nu)$, che dipende dal campo D, tale che*

(10.11) $$\mathcal{B}(u, u) \geq q_0(\nu) \int_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_h}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_h} + (\nu - \sigma)\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i}\frac{\partial u_h}{\partial \xi_h} + \sigma \frac{\partial u_i}{\partial \xi_h}\frac{\partial u_h}{\partial \xi_i} \right) d\xi,$$

$\forall u \in \tilde{W}(D)$, dove $\nu > -2/r$ e $\sigma = \nu/(\nu + 2)$.

Per $u \in \tilde{W}(D)$, se $U(x) = u(\xi(x))$, per (10.5): $\mathcal{B}(u, u) = B(U, U) \geq p_2 \int_A U_{i/h}\,U_{i/h}\,dx$.

Procedendo in modo analogo alla dimostrazione del Lemma 9.1 si ottiene:

$$\int_A U_{i/h}\,U_{i/h}\,dx = \int_D \frac{\partial u_i}{\partial \xi_p}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_q}\frac{\partial \xi_p}{\partial x_h}\frac{\partial \xi_q}{\partial x_h}\,|J(\xi)|\,d\xi \geq$$

$$\geq r^{-r/2-2} c_0^r c_1^{-2} \int_D \frac{\partial u_i}{\partial \xi_p}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_p}\,d\xi \geq p_1(\nu)\,r^{-r/2-2} c_0^r c_1^{-2} p_2 \cdot$$

$$\cdot \int_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_h}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_h} + (\nu - \sigma)\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i}\frac{\partial u_h}{\partial \xi_h} + \sigma \frac{\partial u_i}{\partial \xi_h}\frac{\partial u_h}{\partial \xi_i} \right) d\xi,$$

dove c_0 e c_1 sono le costanti che intervengono in (9.5) e $p_1(\nu)$ è l'inverso del più piccolo autovalore della forma quadratica sotto il segno dell'ultimo integrale, che risulta defi-

(3) D'ora in avanti (u, v) denoterà il prodotto scalare in $L^2(D)$ cioè $(u, v) = \int_D u_i\,v_i\,d\xi$.

nita positiva per la particolare scelta dei parametri ν e σ. La (10.11) vale assumendo $q_0(\nu) = p_1(\nu)\, r^{-r/2-2}\, c_0^r\, c_1^{-2}\, p_2$.

Aggiungendo un opportuno r-vettore costante può sempre supporsi che sia, per ogni $u \in \mathcal{H}(D)$,

(10.12) $$\int_D u(\xi)\, |J(\xi)|\, d\xi = 0.$$

Consideriamo ora il seguente problema: data $f \in L^2(D)$ tale che $\int_D f(\xi)\, |J(\xi)|\, d\xi = 0$, determinare $u \in \mathcal{H}(D)$ tale che

(10.13) $$((u, v)) = (f, |J| v), \qquad \forall v \in \mathcal{H}(D).$$

Da (10.7) segue che l'unica soluzione del problema (10.13) è data da $u = Mf = N(|J|f) - (\operatorname{mis} A)^{-1} \int_D (N(|J|f))(\xi)\, |J(\xi)|\, d\xi$. Sia $L^2(D, |J|)$ lo spazio costituito dalle funzioni $f \in L^2(D)$ tali che $\int_D f(\xi)\, |J(\xi)|\, d\xi = 0$, munito del prodotto scalare $[u, v] = (u, |J| v)$. L'operatore M è un PCO di $L^2(D, |J|)$.

Consideriamo ora il problema di determinare $u \in \widetilde{W}(D)$ tale che

(10.14) $$((u, v)) = (f, |J| v), \qquad \forall v \in \widetilde{W}(D),$$

data $f \in L_0^2(D, |J|)$.

Decomposta la varietà lineare $R(A)$ nella somma diretta della varietà $R^0(A)$, di dimensione r, costituita dagli r-vettori costanti e della varietà $R^1(A)$, di dimensione $r_1 = r(r-1)/2$, costituita dai vettori della forma Cx, sia $\widetilde{R}^1(D)$ la varietà lineare trasformata dalla $R^1(A)$ tramite l'omeomorfismo $x = \psi(\xi)$.

Introdotto in $\widetilde{W}(D)$ il prodotto scalare (8.10) con $\nu > -2/r$ e $\sigma = \nu/(\nu+2)$, sia $\widetilde{\mathcal{W}}(D)$ la varietà lineare così ottenuta cioè

$$\widetilde{\mathcal{W}}(D) = \left\{ u \in \mathcal{H}(D) : \int_D u_i(\xi)\, \widetilde{\rho}_i(\xi)\, |J(\xi)|\, d\xi = 0, \ \forall \widetilde{\rho} \in \widetilde{R}^1(D) \right\}.$$

I due spazi $\widetilde{W}(D)$ e $\widetilde{\mathcal{W}}(D)$ sono hilbertianamente isomorfi. Sia Π il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}(D)$ su $\widetilde{\mathcal{W}}(D)$. La soluzione del problema (10.14) è data da $u = \Pi M f$. L'operatore ΠM, considerato da $L_0^2(D, |J|)$ in $L_0^2(D, |J|)$, è compatto perchè lo è M. Inoltre è simmetrico e positivo. Infatti se f e $g \in L_0^2(D, |J|)$: $(|J| f, \Pi M g) = ((\Pi M f, \Pi M g)) = (\Pi M f, |J| g)$ e $(|J| f, \Pi M f) = |||\Pi M f|||^2$. Se $\widetilde{\mathcal{W}}^{\perp}(D)$ è il complemento ortogonale di $\widetilde{\mathcal{W}}(D)$ nello spazio $\mathcal{H}(D)$, esso ha dimensione r_1. Sia $\widetilde{\rho}^1(\xi), \ldots, \widetilde{\rho}^{r_1}(\xi)$ un sistema completo in $\widetilde{\mathcal{W}}^{\perp}(D)$ e sia $\{\tau_{ij}\}$ la matrice inversa di $\{((\widetilde{\rho}^i, \widetilde{\rho}^j))\}$ $(i, j = 1, \ldots, r_1)$. Se $g \in \mathcal{H}(D)$ allora $\Pi g = g - \sum_{i,j}^{1, r_1} \tau_{ij}((g, \widetilde{\rho}^i))\, \widetilde{\rho}^j$. Quindi

$$\Pi M f = Mf - \sum_{i,j}^{1, r_1} \tau_{ij}((Mf, \widetilde{\rho}^i))\, \widetilde{\rho}^j.$$

Da (10.13) risulta $((Mf, \widetilde{\rho}^i)) = (|J| f, \widetilde{\rho}^i)$, quindi la soluzione $u \in \widetilde{W}(D)$ del problema (10.14) è data da

$$(10.15)\qquad u = \Pi M f = Mf - \sum_{i,j}^{1,r_1} \tau_{ij}(|J|f, \tilde{\rho}^i)\tilde{\rho}^j .$$

L'operatore ΠM così definito trasforma lo spazio $L_0^2(D, |J|)$ in sè stesso. Si vuole ora scrivere ΠM come un operatore da $L^2(D, |J|)$ in sè. A tal fine sia Λ il proiettore ortogonale di $L^2(D, |J|)$ su $L_0^2(D, |J|)$; si consideri l'operatore $\Pi M\Lambda$, che coincide con ΠM su $L_0^2(D, |J|)$. La soluzione del problema (10.14) si può scrivere nel modo seguente: $u = \Pi M\Lambda f$. Infatti è immediato verificare che, per ogni $v \in \tilde{\mathcal{W}}(D)$, $((\Pi M\Lambda f, v)) = [\Lambda f, v] = [f, \Lambda v] = [f, v]$. L'operatore $\Pi M\Lambda$ è un PCO (positivo ma non strettamente) dello spazio $L^2(D, |J|)$. Infatti risulta: $[f, \Pi M\Lambda g] = ((\Pi M\Lambda f, \Pi M\Lambda g))$ e $[\Pi M\Lambda f, f] = |||\Pi M\Lambda f|||^2$.

Dato che $\Lambda = I - \Lambda^{\perp}$, dove I denota l'identità in $L^2(D, |J|)$ e $\Lambda^{\perp}$ è il proiettore ortogonale di $L^2(D, |J|)$ su $\tilde{R}(D)$, varietà lineare di dimensione finita della quale è esplicitamente nota una base, si ottiene anche per $\Pi M\Lambda$ una rappresentazione esplicita analoga alla (10.15).

Se $q_0(\nu)$ è la costante positiva che interviene in (10.11), poniamo, per ogni $u, v \in \tilde{W}(D)$, $\mathcal{B}_0(u, v) = q_0(\nu)((u, v))$.

Consideriamo il seguente problema: data $f \in L_0^2(D, |J|)$, determinare $u \in \tilde{W}(D)$ tale che

$$(10.16)\qquad \mathcal{B}_0(u, v) = (f, |J|v), \qquad \forall v \in \tilde{W}(D).$$

Esso ammette $u = G_0 f = (1/q_0(\nu))\, \Pi M\Lambda f$ come soluzione. G_0 è un PCO dello spazio $L^2(D, |J|)$.

Le forme bilineari $\mathcal{B}(u, v)$ e $\mathcal{B}_0(u, v)$ sono simmetriche e continue in $\tilde{W}(D) \times \tilde{W}(D)$. Assumendo come spazio H lo spazio $\tilde{W}(D)$ è possibile determinare due operatori T e $T_0 \in \{T\}$ (cfr. sez. 1) tali che $\mathcal{B}_0(u, v) = (T_0 u, v)_H$ e $\mathcal{B}(u, v) = (Tu, v)_H$, $\forall u, v \in H$. Per il Lemma 10.2 risulta $(T_0 u, u)_H < (Tu, u)_H$, $\forall u \in \tilde{W}(D)$, sostituendo eventualmente $q_0(\nu)$ con $q_0'(\nu)$ tale che $0 < q_0'(\nu) < q_0(\nu)$. Assumendo come spazio S lo spazio $L^2(D, |J|)$, il problema (10.10) si riscrive nel modo seguente:

$$(10.17)\qquad (Tu, v)_H = (f, v)_S, \qquad \forall v \in H, \quad u \in H, \quad f \in S$$

mentre il problema (10.16) diventa $(T_0 u, v)_H = (f, v)_S$, $\forall v \in H, u \in H, f \in S$ e costituisce un problema base per (10.17).

È quindi possibile applicare la teoria sviluppata nella *Nota I* e pervenire alla costruzione di due successioni di operatori $\{G_n\}$ e $\{G^{1/2} Q_n G^{1/2}\}$ (cfr. sez. 4) le quali approssimano uniformemente «dall'alto» e «dal basso», rispettivamente, l'operatore di Green G del problema (10.17). I Teoremi 4.6 e 4.7 permettono il calcolo esplicito dell'errore di approssimazione.

Se l'operatore N che fornisce la soluzione del problema (10.7) appartiene alla classe $\mathcal{C}^2$ (ciò si verifica per $r = 2, 3$) esso ammette una rappresentazione integrale mediante la matrice $N(\xi, \eta) = \{N_{ij}(\xi, \eta)\}$ $(i, j = 1, \dots, r)$, che appartiene allo spazio $L^2(D \times D)$. $N(\xi, \eta)$ è la *matrice di Green* del problema (10.7). Segue che gli operatori M e ΠM ammettono la rappresentazione integrale seguente: $Mf = \int_D m(\xi, \eta) f(\eta)\, |J(\eta)|\, d\eta$ dove la matrice $m(\xi, \eta) = \{m_{hk}(\xi, \eta)\}$ è così definita:

$$m_{hk}(\xi, \eta) = N_{hk}(\xi, \eta) - Q_{hk}(\xi) - Q_{hk}(\eta) \qquad (h, k = 1, \ldots, r)$$

e

$$Q_{hk}(\xi) = (\operatorname{mis} A)^{-1} \int_D N_{hk}(\eta, \xi)\, |J(\eta)|\, d\eta \qquad (h, k = 1, \ldots, r);$$

$\Pi M f = \int_D \tilde{m}(\xi, \eta) f(\eta)\, |J(\eta)|\, d\eta$ con $\tilde{m}(\xi, \eta) = \{\tilde{m}_{hk}(\xi, \eta)\}$ data da

$$\tilde{m}_{hk}(\xi, \eta) = \left(N_{hk}(\xi, \eta) - Q_{hk}(\xi) - Q_{hk}(\eta) - \sum_{i,j}^{1, r_1} \tau_{ij}\, \bar{\rho}^i_h(\xi)\, \bar{\rho}^j_k(\eta)\right) \Big/ q_0(\nu) \qquad (h, k = 1, \ldots, r).$$

Le matrici $m(\xi, \eta)$ e $\tilde{m}(\xi, \eta)$ appartengono a $L^2(D \times D)$. Analogamente si ottiene anche per l'operatore G_0 una rappresentazione integrale analoga, mediante una matrice appartenente a $L^2(D \times D)$. L'operatore G_0 e quindi, per (10.11), l'operatore G, appartengono alla classe $\mathscr{C}^2$. La teoria sviluppata nelle sezioni precedenti permette il calcolo della matrice di Green $g(\xi, \eta) = \{g_{hk}(\xi, \eta)\}$ corrispondente all'operatore G e il calcolo esplicito dell'errore di approssimazione.

11. Esempi di costruzione esplicita dell'operatore N

Assumendo $\nu = 0$ in (8.10) il problema (10.7) si trasforma nel seguente problema di Neumann per l'equazione vettoriale di Laplace: data $f \in L^2(D)$, $\int_D f(\xi)\, d\xi = 0$, determinare $u \in H_1(D)$, $\int_D u(\xi)\, d\xi = 0$, tale che

$$-u_{i/hh} = f_i \quad \text{in } D, \qquad u_{i/k}\, n_k = 0 \quad \text{su } \partial D \qquad (i = 1, \ldots, r); \tag{11.1}$$

$n = (n_1, \ldots, n_r)$ denota la normale interna a ∂D.

Se D è il campo ipersferico $\{\xi \in \boldsymbol{R}^r : |\xi| < 1\}$ si conosce esplicitamente l'operatore di Green N richiesto nella sezione precedente perchè si conosce la corrispondente matrice di Green $\{N_{hk}(\xi, \eta)\}$ $(h, k = 1, \ldots, r)$. Essa si esprime mediante la funzione (scalare) $\Gamma(\xi, \eta)$ tale che, data la funzione (scalare) $f \in L^2(D)$, $u = \Gamma f = \int_D \Gamma(\xi, \eta) f(\eta)\, d\eta$ sia la soluzione del seguente problema di Neumann per l'equazione (scalare) di Laplace: determinare $u \in H_1(D)$, $\int_D u(\xi)\, d\xi = 0$, tale che

$$-\Delta_2 u = f \quad \text{in } D, \qquad u_{/h}\, n_h = 0 \quad \text{su } \partial D. \tag{11.2}$$

Si ha infatti $N_{hk}(\xi, \eta) = \delta_{hk}\, \Gamma(\xi, \eta)$, $(h, k = 1, \ldots, r)$.

Ancorchè il procedimento che stiamo per esporre sia da considerarsi classico (cfr., per $r = 3$, [30, pp. 102-105]) riteniamo non inutile, anche per i successivi sviluppi, mostrare come si perviene al calcolo di $\Gamma(\xi, \eta)$.

Introdotto nello spazio $\boldsymbol{R}^r$ un sistema di coordinate polari con polo nel centro O di D, indicheremo con $(\rho, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{r-1})$ le coordinate polari del punto $\xi \in \boldsymbol{R}^r$ in questo sistema e con $(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1})$ quelle del punto $\eta \in \boldsymbol{R}^r$. Si denoti con $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{r-1})$ $[\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1})]$ il punto variabile sulla frontiera ∂D ossia il punto di coordinate $(1, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{r-1})$ $[(1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1})]$. Ogni punto $\xi \in \boldsymbol{R}^r$ è così individuato dalla coppia (ρ, ϑ) e si può scrivere $\xi = \rho\vartheta$. Indicheremo, inoltre, con $d\vartheta$ l'elemento ipersuperficiale della ipersfera di $\boldsymbol{R}^r$ di centro 0 e raggio 1 e con $\gamma(\vartheta, \varphi)$ l'angolo (compreso tra 0 e π) individuato dalle direzioni ϑ e φ (cfr. [34]).

Per $r > 2$, posto

$$(11.3) \qquad v^0(\rho\vartheta) = \frac{1}{(r-2)\,\omega_r} \int_0^1 t^{r-1}\,dt \int_{\partial D} \frac{f(t\varphi)\,d\varphi}{(t^2 + \rho^2 - 2t\rho\cos\gamma(\varphi, \vartheta))^{(r-2)/2}}$$

e $v = u - v^0$, il problema (11.2) si trasforma nel problema equivalente

$$(11.4) \qquad \Delta_2 v = 0 \quad \text{in } D, \qquad \partial v/\partial n = -\partial v^0/\partial n \quad \text{su } \partial D.$$

È immediato verificare che la funzione

$$(11.5) \qquad w(\rho\vartheta) = -\rho \frac{\partial v(\rho\vartheta)}{\partial\rho}$$

è armonica in D e sulla frontiera ∂D assume i valori $w(\vartheta) = \dfrac{\partial v^0(\vartheta)}{\partial\rho}$. Dalla formula di Poisson segue che

$$w(\rho\vartheta) = \frac{1}{(r-2)\,\omega_r} \int_{\partial D} \frac{\partial v^0(\omega)}{\partial\rho} \frac{1-\rho^2}{(1+\rho^2 - 2\rho\cos\gamma(\vartheta, \omega))^{r/2}}\,d\omega.$$

Dalla (11.3) si ha che

$$w(\rho\vartheta) = \frac{-1}{(r-2)(\omega_r)^2} \int_0^1 t^{r-1}\,dt \int_{\partial D} f(t\varphi)\,d\varphi \,\cdot$$

$$\cdot \int_{\partial D} \frac{1 - t\cos\gamma(\varphi, \omega)}{(1+t^2 - 2t\cos\gamma(\varphi, \omega))^{r/2}} \frac{1-\rho^2}{(1+\rho^2 - 2\rho\cos\gamma(\vartheta, \omega))^{r/2}}\,d\omega$$

e, interpretando l'ultimo integrale esteso a ∂D come una particolare formula di Poisson, si ottiene

$$w(\rho\vartheta) = \frac{-1}{\omega_r} \int_0^1 t^{r-1}\,dt \int_{\partial D} f(t\varphi) \frac{1 - t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi)}{(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{r/2}}\,d\varphi.$$

Dalla (11.5) si trae che la soluzione del problema (11.4) è data da

$$v(\rho\vartheta) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^1 t^{r-1}\,dt \int_{\partial D} f(t\varphi)\,d\varphi \int_0^\rho \left[\frac{1 - t\tau\cos\gamma(\vartheta, \varphi)}{(1+t^2\tau^2 - 2t\tau\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{r/2}} - 1 \right] \frac{d\tau}{\tau} + v(0)$$

e, dall'essere $u = v - v^0$ e dovendo essere $\int_D u(\xi)\,d\xi = 0$, si ottiene che

$$u(\rho\vartheta) = \int_0^1 t^{r-1}\,dt \int_{\partial D} \Gamma(\rho\vartheta, t\varphi) f(t\varphi)\,d\varphi$$

dove, per $r>2$ e $\xi \neq \eta$:

$$(11.6) \qquad \Gamma(\rho\vartheta, t\varphi) = \frac{1}{(r-2)\,\omega_r} \, \frac{1}{(t^2+\rho^2-2t\rho\cos\gamma(\varphi,\vartheta))^{(r-2)/2}} +$$

$$+\frac{1}{\omega_r}\int_0^{t\rho}\left[\frac{1-\sigma\cos\gamma(\vartheta,\varphi)}{(1+\sigma^2-2\sigma\cos\gamma(\vartheta,\varphi))^{r/2}}-1\right]\frac{d\sigma}{\sigma}+\frac{t^2+\rho^2}{2\omega_r}$$

e, per $r=2$ (cfr. [18, p. 218]), $\xi \neq \eta$,

$$(11.7) \qquad \Gamma(\xi,\eta) = \frac{-1}{2\pi}\log|\xi-\eta| - \frac{1}{2\pi}\log|1-\xi\bar{\eta}| + \frac{1}{4\pi}(|\xi|^2+|\eta|^2).$$

La funzione $\Gamma(\xi,\eta)$ così definita è la *funzione di Green* del problema di Neumann (11.2). Essa è analitica in $D\times D-\delta$ (δ denota la diagonale di $D\times D$). Segue dalla definizione che

$$(11.8) \qquad \Gamma(\xi,\eta)=\Gamma(\eta,\xi), \qquad \xi\neq\eta.$$

Si può determinare la soluzione di (11.2) anche mediante lo sviluppo in serie di Fourier di $\Gamma(\xi,\eta)$. In tal caso, con procedimenti classici, posto per $r=2$

$$\gamma_0(\rho,t)\begin{cases} = -\log\rho+(t^2+\rho^2)/2 & 0\leq t\leq\rho\leq 1,\\ = -\log t+(t^2+\rho^2)/2 & 0\leq\rho\leq t\leq 1;\end{cases}$$

per $s>0$

$$\gamma_s(\rho,t)\begin{cases} = [\rho^{-s}t^s+(t\rho)^s]/s & 0\leq t\leq\rho\leq 1,\\ = [t^{-s}\rho^s+(t\rho)^s]/s & 0\leq\rho\leq t\leq 1;\end{cases}$$

per $r>2$

$$\gamma_0(\rho,t)\begin{cases} = \rho^{-r+2}+(r-2)(t^2+\rho^2)/2 & 0\leq t\leq\rho\leq 1,\\ = t^{-r+2}+(r-2)(t^2+\rho^2)/2 & 0\leq\rho\leq t\leq 1;\end{cases}$$

per $s>0$

$$\gamma_s(\rho,t)\begin{cases} = \rho^{2-r-s}t^s+(r+s-2)(t\rho)^s/s & 0\leq t\leq\rho\leq 1,\\ = t^{2-r-s}\rho^s+(r+s-2)(t\rho)^s/s & 0\leq\rho\leq t\leq 1;\end{cases}$$

si ottiene la seguente espressione per la funzione $\Gamma(\xi,\eta)$:

$$(11.9) \qquad \Gamma(\rho\vartheta,t\varphi)=\frac{1}{(r-2)\,\omega_r}\sum_{s\geq 0}\gamma_s(\rho,t)X_s[\cos\gamma(\vartheta,\varphi)] \qquad 0\leq\rho,\ t\leq 1$$

per $r>2$, mentre per $r=2$ (cfr. [18, p. 219]):

$$(11.10) \qquad \Gamma(\rho\vartheta,t\varphi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{s\geq 0}\gamma_s(\rho,t)\cos[s(\vartheta-\varphi)] \qquad 0\leq\rho,\ t\leq 1;$$

$\{X_s[\cos\gamma(\vartheta,\varphi)]\}$ è un particolare sistema di funzioni ipersferiche (per $r=3$ sono i polinomi di Legendre e per $r>3$ sono i polinomi di Gegenbauer) definite dallo sviluppo in serie

$$\sum_{s=0}^{\infty}\rho^s X_s[\cos\gamma(\vartheta,\varphi)]=(1+\rho^2-2\rho\cos\gamma(\vartheta,\varphi))^{(r-2)/2}$$

(cfr. [34, p. 51], [30, p. 233]). Sommando le serie a secondo membro di (11.9) e (11.10) si riottengono, rispettivamente, le espressioni (11.6) e (11.7). Nelle applicazioni a volte può essere conveniente considerare la funzione $\Gamma(\xi, \eta)$ fornita dallo sviluppo in serie (11.9) e (11.10) piuttosto che dalle espressioni finite (11.6) e (11.7).

11.1. *L'operatore* Γ, *la cui funzione di Green è definita in* (11.6) *e* (11.7), *appartiene alla classe* $\mathcal{C}^m$, $m > r/2$.

Ci limiteremo a fare la dimostrazione per $r = 3$. In tal caso è sufficiente dimostrare che, se $\xi, \eta \in D$ e $\xi \neq \eta$, risulta:

$$|\Gamma(\xi, \eta)| \leqslant \frac{C}{|\xi - \eta|}, \qquad C > 0. \tag{11.11}$$

Se $0 \leqslant \rho \leqslant 1/2$ e $0 \leqslant t \leqslant 1$ oppure $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ e $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ è immediato verificare che la funzione

$$h(\rho\vartheta, t\varphi) = \int_0^{t\rho} \frac{1 - \sigma\cos\gamma(\vartheta, \varphi) - (1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{3/2}}{(1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{3/2}} \frac{d\sigma}{\sigma} \tag{11.12}$$

è limitata.

Sia ora $1/2 \leqslant \rho \leqslant 1$ e $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Si può scrivere

$$h(t\varphi, \rho\vartheta) = \int_{1/2}^{\rho} \frac{\partial h(\tau\vartheta, t\varphi)}{\partial\tau} d\tau + h(\vartheta/2, t\varphi) =$$

$$= \int_{t/2}^{t\rho} \frac{1 - \sigma\cos\gamma(\vartheta, \varphi)}{(1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{3/2}} \frac{d\sigma}{\sigma} - \ln(2\rho) + h(\vartheta/2, t\varphi).$$

Per la prima parte della dimostrazione $|h(\vartheta/2, t\varphi)|$ è limitata. Inoltre risulta

$$\int_{t/2}^{t\rho} \frac{1 - \sigma\cos\gamma(\vartheta, \varphi)}{(1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{3/2}} \frac{d\sigma}{\sigma} \leqslant 4 \int_{t/2}^{t\rho} \frac{1 - \sigma\cos\gamma(\vartheta, \varphi)}{(1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{3/2}} d\sigma =$$

$$= \frac{4t\rho}{(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{1/2}} - \frac{2t}{(1 + t^2/4 - t\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{(t^{-2} + \rho^2 - 2\rho t^{-1}\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{1/2}} + \frac{2t}{(1 - t/2)} \leqslant \frac{4}{|\xi - \eta|} + 4 \leqslant \frac{8}{|\xi - \eta|}$$

da cui segue la (11.11) e, con semplici considerazioni, la tesi per $r = 3$. La dimostrazione per $r > 3$ segue linee analoghe ancorché presenti maggiori difficoltà formali.

11.2. *Sia* $\mathcal{G}_{ij}(\xi, \eta) = \int_D \Gamma_{\xi_i}(\xi, \tau)\Gamma_{\eta_j}(\tau, \eta)\, d\tau$, $\xi, \eta \in D$, $i, j = 1, \ldots, r$. *L'operatore* $\mathcal{G}$, *la cui matrice nucleare è* $\mathcal{G}(\xi, \eta) = \{\mathcal{G}_{ij}(\xi, \eta)\}$, $(i, j = 1, \ldots, r)$, $\xi, \eta \in D$, *appartiene alla classe* $\mathcal{C}^m$, $m > r/2$.

Dimostriamo il teorema per $r = 3$. È sufficiente provare che, se $\xi, \eta \in D$, risulta

$$(11.13) \qquad |\Gamma_{\xi_i}(\xi, \eta)| \leqslant \frac{C}{|\xi - \eta|^2}, \quad \xi \neq \eta, \quad C > 0, \qquad (i = 1, \dots, r).$$

Quindi, per come è definita la funzione $\Gamma(\xi, \eta)$, è sufficiente dimostrare che le (11.13) valgono per $h_{\xi_i}(\xi, \eta)$ $(i = 1, 2, 3)$, con $h(\xi, \eta)$ definita in (11.12).

Risulta $h_{\xi_i}(\xi, \eta) = h_\rho(\rho\vartheta, t\varphi)\, \rho_{\xi_i}(\xi) + \sum_{j=1}^{2} h_{\vartheta_j}(\rho\vartheta, t\varphi)\, \vartheta_{j/\xi_i}(\xi)$, con

$$h_\rho(\rho\vartheta, t\varphi) = [(1 - t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi))/(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{3/2} - 1]/\rho.$$

Inoltre da (11.12), con semplici calcoli, si deduce che

$$(11.14) \qquad h(\rho\vartheta, t\varphi) = \frac{1}{(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{1/2}} - 1 + \log 2 -$$
$$- \log[1 - t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi) + (1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{1/2}]$$

e quindi

$$h_{\vartheta_j}(\rho\vartheta, t\varphi) = [\cos\gamma(\vartheta, \varphi)]_{\vartheta_j}\{t\rho/(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma)^{3/2} +$$
$$+ [t\rho/(1 - t\rho\cos\gamma + (1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma)^{1/2})][1 + 1/(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma)^{1/2}]\}.$$

Inoltre risulta $|[\cos\gamma(\vartheta, \varphi)]_{\vartheta_j}\vartheta_{j/\xi_i}(\xi)| \leqslant 2/\rho$, $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$.

Siano $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ e $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ o $0 \leqslant t \leqslant 1$ e $0 \leqslant \rho \leqslant 1/2$. Ragionando come nella dimostrazione del teorema precedente, è facile verificare che $h_\rho(\rho\vartheta, t\varphi)\, \rho_{\xi_i}(\xi)$ e $h_{\vartheta_j}(\rho\vartheta, t\varphi)\, \vartheta_{j/\xi_i}(\xi)$, e quindi $h_{\xi_i}(\xi, \eta)$, sono funzioni limitate.

Siano $1/2 \leqslant \rho \leqslant 1$ e $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Da (11.14) segue che è sufficiente provare le (11.13) per la funzione $h^0(\rho\vartheta, t\varphi) = \log[1 - t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi) + (1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{1/2}]$. Risulta $h^0_\rho(\rho\vartheta, t\varphi) = [t/(1 - t\rho\cos\gamma + (1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma)^{1/2})] \cdot [(t\rho - \cos\gamma)/(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma)^{1/2} - \cos\gamma]$ e quindi $|h^0_\rho(\rho\vartheta, t\varphi)| \leqslant 2t/(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{1/2} = 2/(\rho^2 + t^{-2} - 2\rho t^{-1}\cos\gamma(\vartheta, \varphi))^{1/2} \leqslant 2/|\xi - \eta| \leqslant 2/|\xi - \eta|^2$.

Inoltre $h^0_{\vartheta_j}(\rho\vartheta, t\varphi) = [-t\rho[\cos\gamma]_{\vartheta_j}/(1 - t\rho\cos\gamma + (1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma)^{1/2})] \cdot [1/(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma)^{1/2} + 1]$ da cui segue che $|h^0_{\vartheta_j}(\rho\vartheta, t\varphi)\, \vartheta_{j/\xi_i}| \leqslant [2t/(1 + t^2\rho^2 - 2t\rho\cos\gamma)^{1/2}][1 + 1/(t(\rho^2 + t^{-2} - 2\rho t^{-1}\cos\gamma)^{1/2})] \leqslant [2/|\xi - \eta|][1 + 2/|\xi - \eta|] \leqslant 6/|\xi - \eta|^2$ da cui seguono le (11.13). Per un noto teorema (cfr. [30, p. 806]) risulta $|\mathcal{G}_{ij}(\xi, \eta)| \leqslant C/|\xi - \eta|$, $C > 0$, $\xi, \eta \in D$ e quindi la tesi per $r = 3$. La dimostrazione per $r > 3$ segue linee analoghe.

Quindi, nel caso in cui il campo iniziale A sia omeomorfo al campo ipersferico D, assumendo $\nu = 0$ in (8.10) è noto l'operatore N che fornisce la soluzione di (10.7).

Anche se D è il cubo r-dimensionale $\{\xi \in \boldsymbol{R}^r\colon 0 < \xi_i < \pi, i = 1, \dots, r\}$ è noto l'operatore di Green che fornisce la soluzione del problema (11.2) e quindi la soluzione di (11.1), essendo noti gli autovalori $\{\lambda_h\}$ e le autofunzioni $\{u_h\}$ del corrispondente problema: $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ in D, $\partial u/\partial n = 0$ su ∂D. Se h è un multi-indice di componenti intere non negative $(h_1, \dots, h_r)$, risulta $\lambda_h = h_1^2 + \dots + h_r^2$ e $u_h(\xi) = (2/\pi)^{r/2} \cdot \cos(h_1\xi_1) \cdot \dots \cdot \cos(h_r\xi_r)$. Si ottiene, dunque, la seguente rappresentazione dell'operatore Γ mediante lo sviluppo in serie di Hilbert-Schmidt:

$$(11.15)\qquad (\Gamma f)(\xi) = \sum_{\substack{h_1, \ldots, h_r \\ h_1 + \ldots + h_r > 0}}^{0, \infty} \frac{u_h(\xi)}{\lambda_h} \int_D f(\eta) u_h(\eta)\, d\eta .$$

È possibile maggiorare l'errore che si commette quando si sostituisce a Γ l'operatore esplicitamente noto

$$(11.16)\qquad (\Gamma_m f)(\xi) = \sum_{0 < h_1^2 + \ldots + h_r^2 < m^2} \frac{u_h(\xi)}{\lambda_h} \int_D f(\eta) u_h(\eta)\, d\eta .$$

11.4. *Fissato* $m > 1$ *risulta*

$$(11.17)\qquad \|\Gamma - \Gamma_m\| = 1/m^2 .$$

L'operatore $\Gamma - \Gamma_m$ è ancora un PCO (positivo ma non strettamente) dello spazio $L^2(D)$ così definito:

$$(\Gamma - \Gamma_m) f = \sum_{h_1^2 + \ldots + h_r^2 \geq m^2} \frac{u_h(\xi)}{\lambda_h} \int_D f(\eta) u_h(\eta)\, d\eta ,$$

il cui massimo autovalore è $1/m^2$. Segue la (11.17).

Dalla convergenza della serie

$$\sum_{h_1 + \ldots + h_r > 0} \frac{1}{(h_1^2 + \ldots + h_r^2)^{\upsilon}}, \qquad \upsilon > r/2,$$

segue che l'operatore Γ, e quindi l'operatore N, appartengono alla classe $\mathcal{C}^{\upsilon}$, $\upsilon > r/2$. Per $r = 2, 3$ Γ e $\Gamma_m \in \mathcal{C}^2$ quindi ammettono, rispettivamente, una rappresentazione integrale mediante le funzioni

$$\Gamma(\xi, \eta) = \sum_{h_1 + \ldots + h_r > 0} \frac{u_h(\xi) u_h(\eta)}{\lambda_h} \quad \text{e} \quad \Gamma_m(\xi, \eta) = \sum_{0 < h_1^2 + \ldots + h_r^2 < m^2} \frac{u_h(\xi) u_h(\eta)}{\lambda_h},$$

che appartengono allo spazio $L^2(D \times D)$. Ségue immediatamente che

11.5. *Per* $r = 2$ *e* $r = 3$, *fissato* $m > 1$, *risulta*

$$\int_D d\xi \int_D |\Gamma(\xi, \eta) - \Gamma_m(\xi, \eta)|^2 d\eta \leq \omega_r / [(4 - r) m^{4-r}] .$$

12. Costruzione di un operatore base per un campo non omeomorfo ad un campo sferico

Sia A un campo limitato dello spazio cartesiano r-dimensionale tale che $\overline{A} = \overline{A}_1 \cup \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_p$ con A_h, $h = 1, \ldots, p$, campo tale che *esiste un omeomorfismo bi-lipschitziano che trasforma* $\overline{A}_h$ *nel dominio sferico* $\overline{D} = \{|\xi| \leq 1\}$ dello spazio cartesiano $\boldsymbol{R}^r$. Sia inoltre $A_h \cap A_k = \emptyset$, $h \neq k$ e $A_h = \overline{A}_h - \partial \overline{A}_h$, $h = 1, \ldots, p$. Si denoti con

$$(12.1)\qquad x = x^{(h)}(\xi), \qquad \xi = \xi^{(h)}(x) \qquad (h = 1, \ldots, p)$$

l'omeomorfismo bi-lipschitziano fra $\overline{D}$ e $\overline{A}_h$ e il suo inverso. Ci limiteremo in questa *Nota* a considerare il caso $p = 2$.

Sia $\Lambda = A \cap \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$. Supporremo che Λ sia una $(r-1)$-*varietà differenziabile di classe* C^1 (in generale non connessa), *la quale da entrambi gli omeomorfismi* $\xi = \xi^{(h)}(x)$ $(h = 1, 2)$ *sia trasformata in una medesima* $(r-1)$-*varietà differenziabile* Ω *contenuta nella frontiera* $\partial D = \{\xi \in \boldsymbol{R}^r \colon |\xi| = 1\}$.

Se $u(\xi)$ è una funzione a valori reali appartenente a $H_1(D)$, le trasformazioni

$$U(x) = u[\xi^{(h)}(x)], \qquad u(\xi) = U[x^{(h)}(\xi)] \tag{12.2}$$

sono un isomorfismo lineare fra $H_1(A_h)$ e $H_1(D)$, $h = 1, 2$. Tale isomorfismo è anche un Banach isomorfismo fra $H_1(A_h)$ e $H_1(D)$, considerati come spazi di Banach. Dette $u \leftrightarrow U$ e $v \leftrightarrow V$ coppie di elementi corrispondenti nell'isomorfismo (12.2), definiamo in $H_1(A_h)$ il seguente prodotto scalare [cfr. (12.2)]:

$$((U, V))_h = \int_D u_{/j}(\xi)\, v_{/j}(\xi)\, d\xi. \tag{12.3}$$

Sia $\mathcal{H}(A)$ il sottospazio di $H_1(A)$ costituito dalle funzioni a valori reali U(x) tali che

$$\int_A U(x)\, dx = 0. \tag{12.4}$$

Introduciamo in $\mathcal{H}(A)$ il prodotto scalare

$$((U, V)) = ((U, V))_1 + ((U, V))_2. \tag{12.5}$$

$\mathcal{H}(A)$ è uno spazio di Hilbert, Banach-isomorfo al sottospazio di $H_1(A)$ costituito dalle funzioni $U(x)$ verificanti la (12.4). Diciamo $\mathcal{L}(A)$ il sottospazio di $L^2(A)$ costituito dalle funzioni verificanti la (12.4), con l'usuale prodotto scalare

$$(U, V) = \int_A U(x)\, V(x)\, dx.$$

Consideriamo ora il seguente problema: data $F \in \mathcal{L}(A)$ determinare $U \in \mathcal{H}(A)$ tale che

$$((U, V)) = (F, V), \qquad \forall V \in H_1(A). \tag{12.6}$$

Esiste ed è unica la soluzione U di (12.6). Sia $U = NF$. L'operatore N è un PCO dello spazio $\mathcal{L}(A)$. Se $\{W^h\}$ è un sistema ortonormale e completo nello spazio $\mathcal{H}(A)$, si ottiene il seguente sviluppo in serie della soluzione:

$$U = NF = \sum_{h=1}^{\infty} (F, W^h)\, W^h. \tag{12.7}$$

La convergenza della serie (12.7) è in $\mathcal{H}(A)$ e quindi in $H_1(A)$.

Faremo vedere come l'operatore N definito in (12.7) dia luogo ad un operatore base G_0 per il problema (10.1) che permette di applicare la teoria descritta nella sezione 10 al campo A ora considerato.

Consideriamo l'operatore esplicitamente noto

$$N_m F = \sum_{h=1}^{m} (F, W^h)\, W^h. \tag{12.8}$$

N_m è ancora un PCO (positivo ma non strettamente) dello spazio $\mathcal{L}(A)$. Faremo vedere che la successione di operatori $\{N_m\}$ approssima uniformemente l'operatore N e inoltre è possibile valutare la norma dell'operatore di $\mathcal{L}(A)$: $N-N_m$ cioè $\|N-N_m\|$.

Si ha che

$$\|N - N_m\| = \max_{\mathcal{L}(A)-\{0\}} \frac{(N\Phi - N_m\Phi, \Phi)}{\|\Phi\|^2} = \max_{\mathcal{L}(A)-\{0\}} \frac{\sum_{h>m} (\Phi, W^h)^2}{\|\Phi\|^2}.$$

Diciamo $\tilde{\mathcal{H}}(A)$ la varietà lineare contenuta in $\mathcal{H}(A)$ costituita dalle funzioni a valori reali $U \in \mathcal{H}(A)$ tali che esiste $EU \in \mathcal{L}(A)$ in modo che $((U, V)) = (EU, V)$, $\forall V \in H_1(A)$. Si ha che

$$\overline{\tilde{\mathcal{H}}(A)} = \mathcal{H}(A). \tag{12.9}$$

Sia infatti $Z \in \mathcal{H}(A)$ tale che $((U, Z)) = 0$, $\forall U \in \tilde{\mathcal{H}}(A)$. Si ha allora $(EU, Z) = 0$. Poichè può assumersi $EU = \Phi$, con Φ arbitraria funzione di $\mathcal{L}(A)$, segue la (12.9).

Per ogni $U \in \tilde{\mathcal{H}}(A)$ si ha:

$$((U, U))^2 = (EU, U)^2 \leqslant \|U\|^2 \cdot \|EU\|^2. \tag{12.10}$$

Tenendo presente la (12.10) e (12.9) si ha

$$\|N - N_m\| = \max_{\tilde{\mathcal{H}}(A)-\{0\}} \frac{\sum_{h>m} ((U, W^h))^2}{\|EU\|^2} = \max_{\tilde{\mathcal{H}}(A)-\{0\}} \frac{((U, U)) - \sum_{h=1}^{m} ((U, W^h))^2}{\|EU\|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\mathcal{H}_m(A)-\{0\}} \frac{(U, U)}{((U, U))},$$

avendo indicato con $\mathcal{H}_m(A)$ il sottospazio di $\mathcal{H}(A)$ definito dalle equazioni: $((U, W^i)) = 0$, $(i = 1, \ldots, m)$.

Definiamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}(A_h)$, relativo al campo A_h, $(h = 1, 2)$ come si è definito $\mathcal{H}(A)$ relativo al campo A. Sia $\mathcal{H}^0(A)$ lo spazio di Hilbert costituito dai vettori $\{U^1, U^2\}$ appartenenti allo spazio $\mathcal{H}(A_1) \times \mathcal{H}(A_2)$ con il prodotto scalare

$$((U^1, V^1))_1 + ((U^2, V^2))_2. \tag{12.11}$$

Risulta quindi $U^h \in H_1(A_h)$ $(h = 1, 2)$ e

$$\int_{A_1} U^1(x)\,dx = 0; \qquad \int_{A_2} U^2(x)\,dx = 0. \tag{12.12}$$

Con $\mathcal{H}(A)$ si indica lo spazio di Hilbert costituito dai vettori $\{U^1, U^2\}$ appartenenti a $H(A_1) \times H(A_2)$ verificanti le condizioni

$$\int_{\Lambda} (U^1 - U^2)\,d\Sigma = 0, \tag{12.13}$$

$$\int_{A_1} U^1(x)\,dx + \int_{A_2} U^2(x)\,dx = 0 \tag{12.14}$$

e munito del prodotto scalare (12.11) (4).

(4) È facile provare la completezza di $\mathcal{H}(A)$.

Sussistono i seguenti Lemmi:

12.1. *Il vettore* $\{U^1, U^2\}$ *appartiene a* $\mathcal{K}(A)$ *se e solo se può porsi* $U^1 = V^1 + C^1$; $U^2 = V^2 + C^2$ *dove* $\{V^1, V^2\}$ *è un vettore di* $\mathcal{K}^0(A)$ *univocamente determinato e* $\{C^1, C^2\}$ *è un vettore costante così definito*:

$$(12.15)\qquad \begin{cases} C^1 = -\dfrac{\operatorname{mis} A_2}{\operatorname{mis} \Lambda \operatorname{mis} A} \displaystyle\int_\Lambda (V^1 - V^2)\, d\Sigma = \dfrac{1}{\operatorname{mis} A_1} \displaystyle\int_{A_1} U^1 dx, \\[2ex] C^2 = \dfrac{\operatorname{mis} A_1}{\operatorname{mis} \Lambda \operatorname{mis} A} \displaystyle\int_\Lambda (V^1 - V^2)\, d\Sigma = \dfrac{1}{\operatorname{mis} A_2} \displaystyle\int_{A_2} U^2 dx. \end{cases}$$

12.2. *Sia* $U(x) \in \mathcal{H}(A)$. *Posto*

$$(12.16)\qquad U^1(x) = U(x) \quad \text{per } x \in A_1, \qquad U^2(x) = U(x) \quad \text{per } x \in A_2,$$

il vettore $\{U^1, U^2\}$ *così definito appartiene a* $\mathcal{K}(A)$.

Sia $\{\Phi^h(x)\}$ una successione di funzioni appartenenti a $C^\infty(\boldsymbol{R}^r)$ tali che

$$(12.17)\qquad \int_\Lambda \Phi^h(x)\, d\Sigma_x = 0 \qquad (\forall h \geqslant 1)$$

e costituenti un sistema completo nello spazio $\mathcal{L}(\Lambda)$ costituito dalle funzioni $U(x)$ di $L^2(\Lambda)$ tali che $\int_\Lambda U(x)\, d\Sigma_x = 0$.

Indicheremo con $\mathcal{K}_m(A)$ lo spazio costituito dai vettori $\{U^1, U^2\}$ tali che:

$$(12.18)_1\qquad \{U^1, U^2\} \in \mathcal{K}(A);$$

$$(12.18)_2\qquad ((U^1, W^h))_1 + ((U^2, W^h))_2 = 0 \qquad (h = 1, \ldots, m);$$

$$(12.18)_3\qquad \int_\Lambda \Phi^h (U^1 - U^2)\, d\Sigma = 0 \qquad (h = 1, \ldots, m).$$

Se $U \in \mathcal{H}_m(A)$ e se si definisce il vettore $\{U^1, U^2\}$ mediante le (12.16) tale vettore appartiene a $\mathcal{K}_m(A)$. Segue che

$$\sup_{\mathcal{H}_m(A) - \{0\}} \frac{(U, U)}{((U, U))} \leqslant \sup_{\mathcal{K}_m(A) - \{0\}} \frac{(U^1, U^1)_1 + (U^2, U^2)_2}{((U^1, U^1))_1 + ((U^2, U^2))_2} \; (^5).$$

12.3. *Si ponga*

$$\Phi(U) = \frac{\|U\|^2}{((U, U))}, \qquad \Psi(U^1, U^2) = \frac{(U^1, U^1)_1 + (U^2, U^2)_2}{((U^1, U^1))_1 + ((U^2, U^2))_2}.$$

Si ha:

i) *il funzionale* $\Phi(U)$ *è dotato di massimo in* $\mathcal{H}_m(A) - \{0\}$;

ii) *il funzionale* $\Psi(U^1, U^2)$ *è dotato di massimo in* $\mathcal{K}_m(A) - \{0\}$.

(5) Si denota con $(U, V)_h = \int_{A_h} U(x)\, V(x)\, dx$ il prodotto scalare in $L^2(A_h)$ $h = 1, 2$.

Limitiamoci a dimostrare ii). La proposizione i) si dimostra in modo del tutto analogo ed anzi più semplicemente. Il procedimento dimostrativo è quello classico del Calcolo delle Variazioni.

Sia $\mathcal{K}_m^1(A)$ il sottoinsieme di $\mathcal{K}_m(A)$ costituito dai vettori $\{U^1, U^2\}$ tali che $(U^1, U^1)_1 + (U^2, U^2)_2 = 1$. Dimostrare ii) equivale a dimostrare che il funzionale $\gamma(U^1, U^2) = ((U^1, U^1))_1 + ((U^2, U^2))_2$ è dotato di minimo non nullo in $\mathcal{K}_m^1(A)$. Sia $[\{U^{1,n}, U^{2,n}\}]$ una successione minimizzante il funzionale $\gamma(U^1, U^2)$ in $\mathcal{K}_m^1(A)$, cioè tale che, detto γ_0 l'estremo inferiore di $\gamma(U^1, U^2)$ in $\mathcal{K}_m^1(A)$, si abbia $\gamma(U^{1,n}, U^{2,n}) = ((U^{1,n}, U^{1,n}))_1 + ((U^{2,n}, U^{2,n}))_2 < \gamma_0 + 1/n$.

Poniamo, per il Lemma 12.1,

$$U^{1,n} = V^{1,n} - \frac{\operatorname{mis} A_2}{\operatorname{mis} \Lambda \cdot \operatorname{mis} A} \int_\Lambda (V^{1,n} - V^{2,n})\, d\Sigma,$$

$$U^{2,n} = V^{2,n} + \frac{\operatorname{mis} A_1}{\operatorname{mis} \Lambda \cdot \operatorname{mis} A} \int_\Lambda (V^{1,n} - V^{2,n})\, d\Sigma,$$

con la successione $[\{V^{1,n}, V^{2,n}\}]$ appartenente a $\mathcal{K}^0(A)$. Dato che $((V^{1,n}, V^{1,n}))_1 + ((V^{2,n}, V^{2,n}))_2 < \gamma_0 + 1/n \leq \gamma_0 + 1$ dalla successione $[\{V^{1,n}, V^{2,n}\}]$ si può estrarre una sottosuccessione $[\{V^{1,n_q}, V^{2,n_q}\}]$ la quale, per $q \to \infty$, converge debolmente verso un elemento $\{\overline{V}^1, \overline{V}^2\}$ di $\mathcal{K}^0(A)$. La successione $\{V^{1,n_q}\}$ contiene una sottosuccessione, che seguitiamo a chiamare $\{V^{1,n_q}\}$, la quale converge fortemente in $L^2(\Lambda)$, per noti teoremi di Analisi Funzionale (cfr. [35, p. 111, Teor. VII]), verso $\overline{V}^1$. Analogamente possiamo supporre che $\{V^{2,n_q}\}$ converga fortemente in $L^2(\Lambda)$ verso $\overline{V}^2$. Posto

$$\overline{U}^1 = \overline{V}^1 - \frac{\operatorname{mis} A_2}{\operatorname{mis} \Lambda \cdot \operatorname{mis} A} \int_\Lambda (\overline{V}^1 - \overline{V}^2)\, d\Sigma$$

$$\overline{U}^2 = \overline{V}^2 + \frac{\operatorname{mis} A_1}{\operatorname{mis} \Lambda \cdot \operatorname{mis} A} \int_\Lambda (\overline{V}^1 - \overline{V}^2)\, d\Sigma,$$

il vettore $\{\overline{U}^1, \overline{U}^2\}$ appartiene a $\mathcal{K}(A)$ ed è limite debole in $\mathcal{K}(A)$ della successione $[\{U^{1,n_q}, U^{2,n_q}\}]$. Poichè, per ogni q, $\{U^{1,n_q}, U^{2,n_q}\}$ verifica le $(12.18)_2$, $(12.18)_3$ che definiscono $\mathcal{K}_m(A)$, tali condizioni sono anche verificate da $\{\overline{U}^1, \overline{U}^2\}$. Inoltre $\{\overline{U}^1, \overline{U}^2\}$ appartiene a $\mathcal{K}_m^1(A)$. Essendo il funzionale $\gamma(U^1, U^2)$ semicontinuo inferiormente in $\mathcal{K}(A)$ rispetto alla convergenza debole, si ha $\gamma(\overline{U}^1, \overline{U}^2) \leq \leq \min\lim_{q \to \infty} \gamma(U^{1,n_q}, U^{2,n_q}) \leq \gamma_0$ e quindi $\gamma(\overline{U}^1, \overline{U}^2) = \gamma_0$. Ciò prova ii).

Poniamo

$$\tau_m = \max_{\mathcal{K}_m(A) - \{0\}} \Psi(U^1, U^2). \tag{12.19}$$

12.4. *Si ha che*

$$\lim_{m \to \infty} \tau_m = 0.$$

Per il teorema precedente esiste un elemento $\{Z^{1,m}, Z^{2,m}\}$ appartenente a $\mathcal{K}_m(A)$

tale che $((Z^{1,m}, Z^{1,m}))_1 + ((Z^{2,m}, Z^{2,m}))_2 = 1$ e $(Z^{1,m}, Z^{1,m})_1 + (Z^{2,m}, Z^{2,m})_2 = \tau_m$. Servendosi del Lemma 12.1 e ragionando come nella dimostrazione del teorema precedente si vede che da $[\{Z^{1,m}, Z^{2,m}\}]$ può estrarsi una sottosuccessione $[\{Z^{1,m_q}, Z^{2,m_q}\}]$ la quale converge debolmente in $\mathcal{H}(A)$ e fortemente in $L^2(A)$ verso un vettore $\{Z^1, Z^2\}$ di $\mathcal{H}(A)$ tale che $(Z^1, Z^1)_1 + (Z^2, Z^2)_2 = \tau = \lim_{m\to\infty} \tau_m$. Come nella dimostrazione del Teorema 12.3 si prova che la successione $[\{Z^{1,m_q}, Z^{2,m_q}\}]$ converge fortemente in $L^2(\Lambda) \times L^2(\Lambda)$. Pertanto $\int_\Lambda \Phi^j (Z^1 - Z^2)\, d\Sigma = 0$ $(\forall j)$ che, ricordando che $\{Z^1, Z^2\}$ soddisfa la (12.13), implica $Z^1 = Z^2$ su Λ (nel senso di $H_1(A)$). Esiste quindi $Z \in \mathcal{H}(A)$ tale che $Z = Z^1$ in A_1 e $Z = Z^2$ in A_2. Ma, dato che $\{Z^1, Z^2\}$ verifica le $(12.18)_2$ che intervengono nella definizione di $\mathcal{H}_m(A)$, si deduce che $((Z, W^h)) = 0$ $h = 1, \dots, m$ per ogni m, che implica $Z = 0$ e quindi $\tau = 0$.

Dato che $\|N - N_m\| \leq \tau_m$ dal Teorema 12.4 segue che $\lim_{m\to\infty} \|N - N_m\| = 0$ cioè l'approssimazione uniforme dell'operatore N mediante la successione di operatori $\{N_m\}$. Vogliamo ora ottenere il *calcolo per eccesso* di τ_m cioè costruire esplicitamente una successione $\{\tau_{m,n}\}$ la quale, per $n \to \infty$, converge decrescendo verso τ_m.

Dobbiamo preliminarmente risolvere questo problema: dati $\Phi \in L^2(\Lambda)$ e $F \in L^2(A_1)$ tali che

$$\int_{A_1} F(x)\, dx - \int_\Lambda \Phi(x)\, d\Sigma_x = 0, \tag{12.20}$$

determinare esplicitamente $U \in \mathcal{H}(A_1)$ soluzione del problema

$$((U, V))_1 = (F, V)_1 - (\Phi, V)_\Lambda, \qquad \forall V \in H_1(A_1). \tag{12.21}$$

L'esistenza e l'unicità di U si ottengono con il metodo standard dell'Analisi Funzionale. Se si considera l'omeomorfismo (12.1) $(h = 1)$ tra $\overline{A}_1$ e $\overline{D}$, posto $f(\xi) = F[x^{(1)}(\xi)]$ e $\phi(\xi) = \Phi[x^{(1)}(\xi)]$, il problema (12.21) è equivalente a determinare $u(\xi) \in H_1(D)$ tale che

$$\int_D u(\xi)\, |J^1(\xi)|\, d\xi = 0 \tag{12.22}$$

e, per ogni $v \in H_1(D)$,

$$\int_D u_{/j}(\xi)\, v_{/j}(\xi)\, d\xi = \int_D f(\xi)\, v(\xi)\, |J^1(\xi)|\, d\xi - \int_\Omega \phi(\xi)\, v(\xi)\, \gamma^1(\xi)\, d\omega_\xi \tag{12.23}$$

dove con $J^1(\xi)$ si è indicato il determinante della matrice jacobiana della trasformazione $x = x^{(1)}(\xi)$ e con $\gamma^1(\xi)$ una ben determinata funzione misurabile e limitata in $\overline{\Omega}$ ed avente un estremo inferiore positivo in $\overline{\Omega}$, mentre $d\omega$ indica l'elemento di misura su ∂D.

Sia $\Gamma(\xi, \eta)$ la *funzione di Green* per il problema di Neumann nel disco D di $\boldsymbol{R}^r$, costruita nella sezione 11, la quale è analitica in $D \times D - \delta$, gode delle proprietà (11.8) e di quelle espresse nei Teoremi 11.1 e 11.2. Usando la classica teoria del problema di Neumann nel disco D si vede che la soluzione del problema (12.22), (12.23) è data da

$$u(\xi) = \int_D \Gamma^1(\xi, \eta) f(\eta) \, |J^1(\eta)| \, d\eta - \int_\Omega \Gamma^1(\xi, \eta) \, \phi(\eta) \, \gamma^1(\eta) \, d\omega_\eta$$

dove la funzione

$$\Gamma^1(\xi, \eta) = \Gamma(\xi, \eta) - Q^1(\xi) - Q^1(\eta) \quad \text{e} \quad Q^1(\xi) = (\text{mis} A_1)^{-1} \int_D \Gamma(\xi, \eta) \, |J^1(\eta)| \, d\eta$$

(cfr. [18, p. 222]).

Posto $N^1(x, y) = \Gamma^1(\xi^{(1)}(x), \xi^{(1)}(y))$, la soluzione in $\mathcal{H}(A_1)$ del problema (12.21) è data da

$$U(x) = \int_{A_1} N^1(x, y) F(y) \, dy - \int_{\Lambda} N^1(x, y) \Phi(y) \, d\Sigma_y . \tag{12.24}$$

Essendo l'omeomorfismo bi-lipschitziano la funzione $N^1(x, y)$ gode ancora delle proprietà (11.8) e di quelle espresse nei Teoremi 11.1 e 11.2, delle quali gode $\Gamma(\xi, \eta)$ in D, riferite però al campo A_1.

In modo analogo si pone il problema (12.21) in $\mathcal{H}(A_2)$ e, introdotte le funzioni $\Gamma^2(\xi, \eta)$ e $N^2(x, y)$, si ottiene la soluzione:

$$U(x) = \int_{A_2} N^2(x, y) F(y) \, dy - \int_{\Lambda} N^2(x, y) \Phi(y) \, d\Sigma_y . \tag{12.25}$$

Sia $W^{1,h}$ la soluzione del problema (12.21) assumendo $F = 0$ e $\Phi = -\Phi^h$ ($h = 1, \ldots, m$) essendo verificata la (12.20) a causa della (12.17). Considerando l'analogo di (12.21) in A_2, con $F = 0$ e $\Phi = \Phi^h$ ($h = 1, \ldots, m$), sia $W^{2,h}$ la soluzione. Per (12.24) e (12.25) il vettore $\{W^{1,h}, W^{2,h}\}$ di $\mathcal{H}(A_1) \times \mathcal{H}(A_2)$ è esplicitamente noto. Posto $W^{1,h+m} = W^h$ in A_1 e $W^{2,h+m} = W^h$ in A_2 ($h = 1, \ldots, m$), le condizioni $(12.18)_2$ e $(12.18)_3$, che servono per definire $\mathcal{K}_m(A)$, possono così raggrupparsi: $((U^1, W^{1,h}))_1 + ((U^2, W^{2,h}))_2 = 0$ ($h = 1, \ldots, 2m$).

Torniamo ora al calcolo (per eccesso) di τ_m definita in (12.19). Con tecniche standard si vede che τ_m è il *massimo autovalore* del seguente problema:

$$\begin{cases} (U^1, E^1)_1 + (U^2, E^2)_2 = \mu[((U^1, E^1))_1 + ((U^2, E^2))_2], \\ \{U^1, U^2\} \in \mathcal{K}_m(A), \qquad \forall \{E^1, E^2\} \in \mathcal{K}_m(A). \end{cases} \tag{12.26}$$

Se denotiamo con $\mathcal{U}$ il vettore di $\mathcal{K}(A)$ di componenti $\{U^1, U^2\}$, con $\mathcal{E}$ il vettore $\{E^1, E^2\}$; $[\mathcal{U}, \mathcal{E}] = (U^1, E^1)_1 + (U^2, E^2)_2$ e $[(\mathcal{U}, \mathcal{E})] = ((U^1, E^1))_1 + ((U^2, E^2))_2$, il problema di autovalori (12.26) si riscrive nel seguente modo:

$$[\mathcal{U}, \mathcal{E}] = \mu[(\mathcal{U}, \mathcal{E})] \qquad \mathcal{U} \in \mathcal{K}_m(A), \qquad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{K}_m(A). \tag{12.27}$$

Possiamo supporre, alterando alcuni di essi per un vettore costante (cfr. Lemma 12.1), che i vettori $\mathcal{W}^h = \{W^{1,h}, W^{2,h}\}$ ($h = 1, \ldots, 2m$), che intervengono nella definizione di $\mathcal{K}_m(A)$, appartengano tutti a $\mathcal{K}(A)$. Deduciamo dal sistema $\{\mathcal{W}^h\}$ ($h = 1, \ldots, 2m$) un sistema ortonormale cioè tale che $[(\mathcal{W}^h, \mathcal{W}^k)] = \delta_{hk}$ ($h, k = 1, \ldots, 2m$) che seguitiamo, per semplicità, a chiamare con $\{\mathcal{W}^h\}$ ($h = 1, \ldots, 2m$). Il più arbitrario vettore $\mathcal{E}$ di

$\mathcal{K}_m(A)$ è dato da

$$\mathcal{E} = \mathcal{Z} - \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{Z}, \mathcal{W}^h)]\, \mathcal{W}^h ,$$

essendo $\mathcal{Z} = \{Z^1, Z^2\}$ un arbitrario vettore di $\mathcal{K}(A)$. La (12.27) si trasforma quindi in:

$$(12.28) \qquad [\mathcal{U}, \mathcal{Z}] - \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{Z}, \mathcal{W}^h)][\mathcal{U}, \mathcal{W}^h] = \mu[(\mathcal{U}, \mathcal{Z})] \qquad \mathcal{U} \in \mathcal{K}_m(A), \quad \forall \mathcal{Z} \in \mathcal{K}(A).$$

Sia $\mathcal{V} = \{V^1, V^2\}$ il vettore di $\mathcal{K}^0(A)$ determinato univocamente da $\mathcal{U} \in \mathcal{K}(A)$ secondo il Lemma 12.1 cioè

$$(12.29) \qquad \begin{cases} \mathcal{U} = \mathcal{V} + \mathcal{C}, \qquad \mathcal{C} = \{C^1, C^2\}, \\[2mm] C^1 = [-\operatorname{mis} A_2/(\operatorname{mis}\Lambda \cdot \operatorname{mis} A)] \displaystyle\int_\Lambda (V^1 - V^2)\, d\Sigma, \\[2mm] C^2 = [\operatorname{mis} A_1/(\operatorname{mis}\Lambda \cdot \operatorname{mis} A)] \displaystyle\int_\Lambda (V^1 - V^2)\, d\Sigma. \end{cases}$$

Poniamo, per $\mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A)$,

$$\mathcal{N}\mathcal{V} = \left\{ \int_{A_1} N^1(x,y)\, V^1(y)\, dy, \int_{A_2} N^2(x,y)\, V^2(y)\, dy \right\} = \{N^1 V^1, N^2 V^2\}.$$

Risulta $\mathcal{N}\mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A)$ e, per come sono state definite le funzioni $N^1(x,y)$ e $N^2(x,y)$,

$$(12.30) \qquad [(\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{Z})] = [\mathcal{V}, \mathcal{Z}], \qquad \forall \mathcal{Z} \in \mathcal{K}(A).$$

Indichiamo con T l'isomorfismo lineare di $\mathcal{K}(A)$ in $\mathcal{K}^0(A)$ stabilito dal Lemma 12.1, poniamo cioè $\mathcal{V} = T\mathcal{U}$ con $\mathcal{U} \in \mathcal{K}(A)$, $\mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A)$. La (12.29) è quindi data da $\mathcal{U} = T^{-1}\mathcal{V}$. Poichè $\mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A)$ si ha, dalla (12.29): $[(\mathcal{N}\mathcal{V}, T\mathcal{Z})] = [\mathcal{V}, T\mathcal{Z}]$, $\forall T\mathcal{Z} \in \mathcal{K}^0(A)$.

Per la (12.29) e (12.30) il problema di autovalori (12.28) si trasforma nel problema equivalente

$$(12.31) \qquad [(\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{Z})] - \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{Z}, \mathcal{W}^h)][(\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{W}^h)] + [\mathcal{C}, \mathcal{Z}] - \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{Z}, \mathcal{W}^h)][\mathcal{C}, \mathcal{W}^h] =$$
$$= \mu[(\mathcal{V}, \mathcal{Z})], \ \mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A) \text{ t.c. } [(\mathcal{V}, \mathcal{W}^h)] = 0 \quad (h = 1, \ldots, 2m), \quad \forall \mathcal{Z} \in \mathcal{K}(A).$$

Posto $\mathcal{S} = T\mathcal{Z}$ dalla (12.29) e dalla (12.15) segue che

$$[\mathcal{C}, \mathcal{Z}] = (\operatorname{mis}\Lambda)^{-1} \int_\Lambda (V^1 - V^2)\, d\Sigma_y \int_{A_2} Z^2 dx = \alpha^2 \int_\Lambda (V^1 - V^2)\, d\Sigma_y \int_\Lambda (S^1 - S^2)\, d\Sigma_x$$

con $\alpha = (\operatorname{mis} A_1 \cdot \operatorname{mis} A_2/\operatorname{mis} A)^{1/2}\, (\operatorname{mis}\Lambda)^{-1}$.

Per ogni $\mathcal{V} = \{V^1, V^2\} \in \mathcal{K}^0(A)$ consideriamo il funzionale $\mathcal{A}(\mathcal{V}) = \alpha \int_\Lambda (V^1 - V^2)\, d\Sigma$. Risulta, quindi,

$$(12.32) \qquad [\mathcal{C}, \mathcal{Z}] = \mathcal{A}(\mathcal{V})\, \mathcal{A}(\mathcal{S}), \qquad \mathcal{V}, \mathcal{S} \in \mathcal{K}^0(A).$$

Per il teorema di traccia il funzionale lineare $\mathcal{A}(\mathcal{V})$, definito in $\mathcal{H}^0(A)$, è ivi continuo. Esiste quindi $\mathcal{Y} = \{\mathcal{Y}^1, \mathcal{Y}^2\} \in \mathcal{H}^0(A)$ tale che

$$\mathcal{A}(\mathcal{V}) = [(\mathcal{V}, \mathcal{Y})]. \tag{12.33}$$

Dalla (12.32) segue che

$$[\mathcal{C}, \mathcal{Z}] = [(\mathcal{V}, \mathcal{Y})][(\mathcal{S}, \mathcal{Y})]. \tag{12.34}$$

Posto $\mathcal{Y}^h = T\mathcal{W}^h$ risulta ancora $[(\mathcal{Y}^h, \mathcal{Y}^k)] = \delta_{hk}$ $(h, k = 1, \ldots, 2m)$. La (12.31) si può dunque riscrivere nel seguente modo:

$$\left[\left(\mathcal{N}\mathcal{V} - \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{Y}^h)]\, \mathcal{Y}^h + [(\mathcal{V}, \mathcal{Y})]\, \mathcal{Y} - [(\mathcal{V}, \mathcal{Y})] \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{Y}^h, \mathcal{Y})]\, \mathcal{Y}^h - \mu\mathcal{V}, \mathcal{S}\right)\right] = 0$$

$$\forall \mathcal{S} \in \mathcal{H}^0(A), \quad \mathcal{V} \in \mathcal{H}^0(A)\colon [(\mathcal{V}, \mathcal{Y}^h)] = 0, \quad h = 1, \ldots, 2m$$

che implica

$$\mathcal{N}\mathcal{V} - \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{Y}^h)]\, \mathcal{Y}^h - [(\mathcal{V}, \mathcal{Y})] \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{Y}^h, \mathcal{Y})]\, \mathcal{Y}^h + [(\mathcal{V}, \mathcal{Y})]\, \mathcal{Y} = \mu\mathcal{V} \tag{12.35}$$

$$\mathcal{V} \in \mathcal{H}^0(A)\colon [(\mathcal{V}, \mathcal{Y}^h)] = 0, \quad h = 1, \ldots, 2m.$$

Sia $\mathcal{P}_m$ il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}^0(A)$ sulla varietà lineare generata da $(\mathcal{Y}^1, \ldots, \mathcal{Y}^{2m})$ cioè $\mathcal{P}_m \mathcal{V} = \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{V}, \mathcal{Y}^h)]\, \mathcal{Y}^h$ e $\mathcal{Q}_m = \mathcal{I} - \mathcal{P}_m$ ($\mathcal{I}$ denota l'operatore identità in $\mathcal{H}^0(A)$). Risulta quindi $\mathcal{Q}_m \mathcal{V} = \mathcal{V} - \sum_{h=1}^{2m} [(\mathcal{V}, \mathcal{Y}^h)]\, \mathcal{Y}^h$.

La (12.35) si può così riscrivere:

$$\mathcal{Q}_m \mathcal{N}\mathcal{V} + [(\mathcal{Y}, \mathcal{V})]\, \mathcal{Q}_m \mathcal{Y} = \mu\mathcal{V}, \quad \mathcal{V} \in \mathcal{H}^0(A)\colon [(\mathcal{V}, \mathcal{Y}^h)] = 0, \quad h = 1, \ldots, 2m \tag{12.36}$$

che, per $\mu \neq 0$, è equivalente a

$$\mathcal{Q}_m \mathcal{N} \mathcal{Q}_m \mathcal{V} + [(\mathcal{Q}_m \mathcal{Y}, \mathcal{V})]\, \mathcal{Q}_m \mathcal{Y} = \mu\mathcal{V}, \qquad \mathcal{V} \in \mathcal{H}^0(A). \tag{12.37}$$

Definiamo ora lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}^0(D^2)$ costituito dai vettori $u = \{u^1(\xi), u^2(\xi)\} \in H_1(D) \times H_1(D)$ tali che $\int_D u^1(\xi)\, |J^1(\xi)|\, d\xi = 0$ e $\int_D u^2(\xi)\, |J^2(\xi)|\, d\xi = 0$, munito del prodotto scalare $((u, v))_D = \int_D u^1_{/j}(\xi)\, v^1_{/j}(\xi)\, d\xi + \int_D u^2_{/j}(\xi)\, v^2_{/j}(\xi)\, d\xi$. Quindi $\mathcal{H}^0(D^2)$ è lo spazio trasformato, mediante gli isomorfismi (12.1), dello spazio $\mathcal{H}^0(A)$.

Siano

$$\mathcal{G}u = \left\{ \int_D \Gamma^1(\xi,\eta)\, |J^1(\eta)|\, u^1(\eta)\, d\eta, \int_D \Gamma^2(\xi,\eta)\, |J^2(\eta)|\, u^2(\eta)\, d\eta \right\} = \{\mathcal{G}^1 u^1, \mathcal{G}^2 u^2\}, v, y, z, \psi$$

gli elementi di $\mathcal{H}^0(D^2)$ trasformati, mediante gli isomorfismi (12.1), dai vettori $\mathcal{N}\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}$ di $\mathcal{H}^0(A)$.

Se P_m è il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}^0(D^2)$ sulla varietà lineare determinata da $(y^1, \ldots, y^{2m})$ e $Q_m = I - P_m$ (I ora denota l'identità in $\mathcal{H}^0(D^2)$) cioè $Q_m v = v -$

$-\sum_{h=1}^{2m}((v, y^h))_D\, y^h$, il problema di autovalori (12.37) è perfettamente equivalente a

(12.38) $$Q_m \mathcal{G} Q_m v + ((Q_m \psi, v))_D Q_m \psi = \mu v, \qquad v \in \mathcal{K}^0(D^2).$$

Calcolare $\|N - N_m\|$ equivale, dunque, a calcolare il più grande autovalore del problema (12.38). Prima occorre calcolare esplicitamente il vettore $\psi = \{\psi^1, \psi^2\} \in \mathcal{K}^0(D^2)$ che, per (12.33), è tale che

(12.39) $$\alpha \int_\Omega [v^1(\xi)\gamma^1(\xi) - v^2(\xi)\gamma^2(\xi)]\, d\Sigma_\xi = ((v, \psi))_D, \qquad \forall v \in \mathcal{K}^0(D^2).$$

Dato che $v = \{v^1, v^2\} \in \mathcal{K}^0(D^2)$ si ha, $\forall \xi \in \overline{D}$, (cfr. [38, p. 273])

(12.40) $$v^h(\xi) = \int_D \Gamma^h_{r_j}(\xi, \eta)\, v^h_{/j}(\eta)\, d\eta \qquad (h = 1, 2)$$

che, sostituito in (12.39), implica

$$\alpha\left\{\int_D v^1_{/j}(\eta)\, d\eta \int_\Omega \Gamma^1_{r_j}(\xi, \eta)\, \gamma^1(\xi)\, d\omega_\xi - \int_D v^2_{/j}(\eta)\, d\eta \int_\Omega \Gamma^2_{r_j}(\xi, \eta)\, \gamma^2(\xi)\, d\omega_\xi\right\} =$$

$$= \int_D v^1_{/j}(\eta)\, \psi^1_{/j}(\eta)\, d\eta + \int_D v^2_{/j}(\eta)\, \psi^2_{/j}(\eta)\, d\eta, \qquad \forall v = \{v^1, v^2\} \in \mathcal{K}^0(D^2).$$

Segue che $\psi = \{\psi^1, \psi^2\}$ è dato da

(12.41) $$\begin{cases} \psi^1(\eta) = \alpha \displaystyle\int_\Omega \Gamma^1(\xi, \eta)\, \gamma^1(\xi)\, d\omega_\xi + \frac{\alpha \operatorname{mis} A}{(\operatorname{mis} A_1)^2} \int_D |J^1(\xi)|\, d\xi \int_D |J^1(\tau)|\, \Gamma(\xi, \tau)\, d\tau, \\[2ex] \psi^2(\eta) = -\alpha \displaystyle\int_\Omega \Gamma^2(\xi, \eta)\, \gamma^2(\xi)\, d\omega_\xi - \frac{\alpha \operatorname{mis} A}{(\operatorname{mis} A_2)^2} \int_D |J^2(\xi)|\, d\xi \int_D |J^2(\tau)|\, \Gamma(\xi, \tau)\, d\tau. \end{cases}$$

Le (12.41) forniscono il vettore ψ esplicitamente.

Per ogni vettore $v = \{v^1, v^2\} \in \mathcal{K}^0(D^2)$ indicheremo con $\operatorname{grad} v$ il vettore di componenti $\{v^1_{/1}, \dots, v^1_{/r}, v^2_{/1}, \dots, v^2_{/r}\}$ appartenente a $[L^2(D)]_{2r}$. Detto $(\zeta, \tau)_{2r}$ il prodotto scalare di due vettori di $[L^2(D)]_{2r}$ risulta $(\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u)_{2r} = ((v, u))_D$.

Dalle (12.40) segue che

(12.42) $$v(\xi) = \{v^1, v^2\} = \left\{\int_D \Gamma^1_{r_j}(\xi, \eta)\, v^1_{/j}(\eta)\, d\eta, \int_D \Gamma^2_{r_j}(\xi, \eta)\, v^2_{/j}(\eta)\, d\eta\right\}.$$

La (12.42) fornisce una rappresentazione analitica esplicita dell'operatore d'immersione di $\mathcal{K}^0(D^2)$ in $[L^2(D)]_2$.

Si denoti con $\mathfrak{J}$ l'operatore di $[L^2(D)]_{2r}$ in $[L^2(D)]_2$ definito nel modo seguente: $\mathfrak{J}\zeta = \left\{\int_D \Gamma^1_{r_j}(\xi, \eta)\, \zeta_j(\eta)\, d\eta, \int_D \Gamma^2_{r_j}(\xi, \eta)\, \zeta_{j+r}(\eta)\, d\eta\right\}$. La (12.42) può quindi riscriversi così:

(12.43) $$v = \mathfrak{J}(\operatorname{grad} v).$$

Sia $[\tilde{L}^2(D)]_{2r}$ il sottospazio di $[L^2(D)]_{2r}$ descritto da grad v quando v descrive $\mathcal{K}^0(D^2)$. Tenendo conto che

(12.44) $\mathcal{G}\mathfrak{J}(\text{grad}\, v) =$

$$= \left\{ \int_D v_{lj}^1(t)\, dt \int_D \Gamma^1(\xi, \eta) \Gamma^1_{t_j}(\eta, t)\, |J^1(\eta)|\, d\eta, \int_D v_{lj}^2(t)\, dt \int_D \Gamma^2(\xi, \eta) \Gamma^2_{t_j}(\eta, t)\, |J^2(\eta)|\, d\eta \right\},$$

l'equazione (12.38), considerata in $[\tilde{L}^2(D)]_{2r}$, dà luogo alla seguente [6]:

(12.45) $$\text{grad}\, \mathcal{G}\mathfrak{J}(\text{grad}\, v) - \sum_{h=1}^{2m} (\text{grad}\, v, \text{grad}\, \mathcal{G}y^h)_{2r}\, \text{grad}\, y^h -$$

$$- \sum_{h=1}^{2m} (\text{grad}\, v, \text{grad}\, y^h)_{2r}\, \text{grad}\, \mathcal{G}y^h + \sum_{h,k}^{1,2m} (\text{grad}\, v, \text{grad}\, y^h)_{2r} ((y^k, \mathcal{G}y^h))_D\, \text{grad}\, y^k +$$

$$+ (\text{grad}\, Q_m \psi, \text{grad}\, v)_{2r}\, \text{grad}\, Q_m \psi = \mu\, \text{grad}\, v, \qquad v \in \mathcal{K}^0(D^2).$$

La (12.45) è perfettamente equivalente alla (12.38).

Segue che l'operatore a primo membro di (12.45) è la restrizione a $[\tilde{L}^2(D)]_{2r}$ di un operatore $R^{(m)}$, definito da $[L^2(D)]_{2r}$ in $[L^2(D)]_{2r}$, dato da:

$$R^{(m)} \zeta = \text{grad}\, \mathcal{G}\mathfrak{J}\, \zeta - \sum_{h=1}^{2m} (\zeta, \text{grad}\, \mathcal{G}y^h)_{2r}\, \text{grad}\, y^h - \sum_{h=1}^{2m} (\zeta, \text{grad}\, y^h)_{2r}\, \text{grad}\, \mathcal{G}y^h +$$

$$+ \sum_{h=1}^{2m} \sum_{k=1}^{2m} (\zeta, \text{grad}\, y^h)_{2r} ((y^k, \mathcal{G}y^h))_D\, \text{grad}\, y^k + (\zeta, \text{grad}\, \psi)_{2r}\, \text{grad}\, \psi -$$

$$- \sum_{h=1}^{2m} (\zeta, \text{grad}\, y^h)_{2r} (\text{grad}\, y^h, \text{grad}\, \psi)_{2r}\, \text{grad}\, \psi -$$

$$- \sum_{h=1}^{2m} (\zeta, \text{grad}\, \psi)_{2r} (\text{grad}\, y^h, \text{grad}\, \psi)_{2r}\, \text{grad}\, y^h +$$

$$+ \sum_{h=1}^{2m} \sum_{k=1}^{2m} (\zeta, \text{grad}\, y^h)_{2r} (\text{grad}\, y^h, \text{grad}\, \psi)_{2r} (\text{grad}\, y^k, \text{grad}\, \psi)_{2r}\, \text{grad}\, y^k.$$

12.5. *L'operatore $R^{(m)}$ è simmetrico nello spazio $[L^2(D)]_{2r}$:*

$$(R^{(m)} \zeta, \tau)_{2r} = (\zeta, R^{(m)} \tau)_{2r}.$$

Per dimostrare il teorema è sufficiente provare che

(12.46) $$(\text{grad}\, \mathcal{G}\mathfrak{J}\zeta, \tau)_{2r} = (\zeta, \text{grad}\, \mathcal{G}\mathfrak{J}\tau)_{2r}.$$

Infatti, sostituendo a primo membro di (12.46) l'espressione di $\mathcal{G}\mathfrak{J}\zeta$, fornita da (12.44), si ottiene

$$\sum_{h,j}^{1,r} \int_D \tau_h(\xi)\, d\xi \int_D \zeta_j(t)\, dt \int_D \Gamma^1_{\xi_h}(\xi, \eta) \Gamma^1_{t_j}(\eta, t)\, |J^1(\eta)|\, d\eta +$$

$$+ \sum_{h,j}^{1,r} \int_D \tau_{h+r}(\xi)\, d\xi \int_D \zeta_{j+r}(t)\, dt \int_D \Gamma^2_{\xi_h}(\xi, \eta) \Gamma^2_{t_j}(\eta, t)\, |J^2(\eta)|\, d\eta = (\zeta, \text{grad}\, \mathcal{G}\mathfrak{J}\, \tau)_{2r}.$$

[6] Tenendo presente che $((v, \mathcal{G}u))_D = ((\mathcal{G}v, u))_D$, $u, v \in \mathcal{K}^0(D^2)$.

12.6. *L'operatore* $R^{(m)}$ *è positivo,* (*ma non strettamente*), *nello spazio* $[L^2(D)]_{2r}$:

(12.47) $$(R^{(m)}\zeta, \zeta)_{2r} \geqslant 0, \qquad \forall \zeta \in [L^2(D)]_{2r}.$$

Osserviamo innanzitutto che risulta, $\forall \zeta \in [L^2(D)]_{2r}$:

(12.48) $$(\operatorname{grad} \mathcal{G} y^h, \zeta)_{2r} = (\operatorname{grad} y^h, \operatorname{grad} \mathcal{G}\mathfrak{I}\zeta)_{2r}$$

come segue da (12.46) e dall'essere $y^h = \mathfrak{I}(\operatorname{grad} y^h)$.

Sia Π_m il proiettore ortogonale di $[L^2(D)]_{2r}$ sulla varietà lineare, contenuta in $[\tilde{L}^2(D)]_{2r}$, generata da $(\operatorname{grad} y^h)$, $h = 1, \ldots, 2m$ cioè $\Pi_m \zeta = \sum_{h=1}^{2m} (\zeta, \operatorname{grad} y^h)_{2r} \operatorname{grad} y^h$. Se I denota l'identità in $[L^2(D)]_{2r}$ con semplici calcoli si ottiene che

(12.49) $$R^{(m)}\zeta = (I-\Pi_m) \operatorname{grad} \mathcal{G}\mathfrak{I}(I-\Pi_m)\zeta + (\zeta, (I-\Pi_m)\operatorname{grad}\psi)_{2r}(I-\Pi_m)\operatorname{grad}\psi.$$

Quindi

$$(R^{(m)}\zeta, \zeta)_{2r} = ((I-\Pi_m)\operatorname{grad}\mathcal{G}\mathfrak{I}(I-\Pi_m)\zeta, \zeta)_{2r} + \{(\zeta, (I-\Pi_m)\operatorname{grad}\psi)_{2r}\}^2.$$

Dato che

$$((I-\Pi_m)\operatorname{grad}\mathcal{G}\mathfrak{I}(I-\Pi_m)\zeta, \zeta)_{2r} = (\operatorname{grad}\mathcal{G}\mathfrak{I}(I-\Pi_m)\zeta, (I-\Pi_m)\zeta)_{2r}$$

è sufficiente provare che $(\operatorname{grad}\mathcal{G}\mathfrak{I}\zeta, \zeta)_{2r} \geqslant 0$. Infatti dalla (12.44) e (12.43) si ottiene che:

$$(\operatorname{grad}\mathcal{G}\mathfrak{I}\zeta, \zeta)_{2r} = \int_D dt \left\{ \left[\int_D \Gamma^1_{\xi_j}(t, \xi)\, \zeta_j(\xi)\, d\xi \right]^2 + \left[\int_D \Gamma^2_{\xi_j}(t, \eta)\, \zeta_{j+r}(\eta)\, d\eta \right]^2 \right\} \geqslant 0.$$

Da (12.49), da (12.44) e dall'espressione di Π_m si ottiene la seguente rappresentazione integrale dell'operatore $R^{(m)}\zeta = \{R_1^{(m)}\zeta, \ldots, R_{2r}^{(m)}\zeta\}$ di $[L^2(D)]_{2r}$: $R_i^{(m)}\zeta = \int_D R_{i,j}^{(m)}(\xi, \eta)\, \zeta_j(\eta)\, d\eta$ $\quad (i = 1, \ldots, 2r)$ dove, per $i, j = 1, \ldots, r$ e $p, q = 1, 2$:

$$R^{(m)}_{i+(p-1)r,\, j+(q-1)r}(\xi, \eta) = \delta_{pq} \int_D \Gamma^p_{\xi_i}(\xi, t)\, \Gamma^p_{\eta_j}(t, \eta)\, |J^p(t)|\, dt + \delta_{pq}\, \psi^p_{/\xi_i}(\xi)\, \psi^p_{/\eta_j}(\eta) -$$

$$- \sum_{h=1}^{2m} [y^{p,h}_{/\xi_i}(\xi)(\mathcal{G}^q y^{q,h})_{\eta_j}(\eta) + y^{p,h}_{/\xi_i}(\xi)\, \psi^q_{\eta_j}(\eta)(\operatorname{grad} y^h, \operatorname{grad}\psi)_{2r} +$$

$$+ y^{q,h}_{/\eta_j}(\eta)(\mathcal{G}^p y^{p,h}_i)_{\xi_i}(\xi) + y^{q,h}_{/\eta_j}(\eta)\, \psi^p_{\xi_i}(\xi)(\operatorname{grad} y^h, \operatorname{grad}\psi)_{2r}] +$$

$$+ \sum_{h,k}^{1,2m} y^{p,h}_{/\xi_i}(\xi)\, y^{q,k}_{/\eta_j}(\eta)[((\mathcal{G}y^h, y^k))_D + (\operatorname{grad} y^h, \operatorname{grad}\psi)_{2r}(\operatorname{grad} y^k, \operatorname{grad}\psi)_{2r}].$$

Dalla definizione segue che, per $\xi, \eta \in D$,

(12. 50) $$R^{(m)}_{i,j}(\xi, \eta) = R^{(m)}_{j,i}(\eta, \xi) \qquad i, j = 1, \ldots, 2r.$$

12.7. *L'operatore* $R^{(m)}$ *appartiene alla classe* $\mathcal{C}^\upsilon$, *per* $\upsilon > r/2$.

Questo teorema segue dal Teorema 11.2 e dall'espressione di $R^{(m)}_{i,j}(\xi, \eta)$.

Dai Teorr. 12.5, 12.6 e 12.7 segue che

12.8. *L'operatore* $R^{(m)}$ *è un PCO, positivo ma non strettamente, dello spazio* $[L^2(D)]_{2r}$.

Sussiste, infine, il seguente fondamentale teorema:

12.9. *Ogni autovalore positivo dell'equazione*

$$R^{(m)}\zeta = \mu\zeta, \qquad \zeta \in [L^2(D)]_{2r} \tag{12.51}$$

è autovalore del problema (12.45) *e quindi di* (12.26).

Per costruzione il problema (12.45) è equivalente a (12.51), ristretto a $[\tilde{L}^2(D)]_{2r}$. Facciamo ora vedere che se μ è un autovalore di (12.51) e se $\zeta \in [L^2(D)]_{2r}$ è la corrispondente autofunzione, allora $\zeta \in [\tilde{L}^2(D)]_{2r}$. Dalla (12.49) segue che $R^{(m)}\zeta = \operatorname{grad}\tau$ e, dalla (12.38), si deduce la seguente espressione per τ: $\tau = Q_m \mathcal{G} Q_m \mathfrak{I}\zeta + (\operatorname{grad} Q_m\psi, \zeta)_{2r} Q_m\psi$. Se $\mu > 0$ allora $\zeta = (1/\mu)\operatorname{grad}\tau$ con $\tau \in \mathcal{K}^0(D^2)$ cioè $\zeta \in [\tilde{L}^2(D)]_{2r}$.

Se $U=(U_1,\ldots,U_r)$ e $V=(V_1,\ldots,V_r)$ sono r-vettori di $H_1(A)$ e $F=(F_1,\ldots,F_r) \in L^2(A)$, posto

$$((U, V)) = \int_D u^1_{i/j}(\xi)\, v^1_{i/j}(\xi)\, d\xi + \int_D u^2_{i/j}(\xi)\, v^2_{i/j}(\xi)\, d\xi, \tag{12.52}$$

dove $u^h(\xi) = U[x^{(h)}(\xi)]$, $h = 1, 2$, $\xi \in D$, e $(U, V) = \int_A U_i(x)\, V_i(x)\, dx$, la soluzione $U = MF$ del problema

$$((U, V)) = (F, V), \qquad \forall V \in H_1(A) \tag{12.53}$$

si esprime mediante l'operatore N, definito in (12.7), che fornisce la soluzione di (12.6). È inoltre evidente come vada modificato il Teorema 12.9 per la maggiorazione esplicita dell'errore $\|M - M_m\|$ che si commette quando si sostituisce a M l'operatore esplicitamente noto M_m, che si esprime mediante N_m.

12.10. *Esiste una costante* $\tilde{q}_0 > 0$, *che dipende dal campo A, tale che* $B(U, U) \geq \tilde{q}_0((U, U))$, $\forall U \in W(A)$, *dove* $((U, U))$ *è il prodotto scalare definito in* (12.52).

Per (10.5) è sufficiente provare che esiste $q_1 > 0$ tale che $\int_A U_{i/j} U_{i/j}\, dx \geq q_1((U, U))$ $\forall U \in W(A)$ oppure, per (12.1) e (12.52), equivalentemente, che

$$\int_D u^1_{i/p} u^1_{i/q} \xi^{(1)}_{p/j} \xi^{(1)}_{q/j} |J^1(\xi)|\, d\xi + \int_D u^2_{i/p} u^2_{i/q} \xi^{(2)}_{p/j} \xi^{(2)}_{q/j} |J^2(\xi)|\, d\xi \geq q_1 \left[\int_D u^1_{i/j} u^1_{i/j}\, d\xi + \int_D u^2_{i/j} u^2_{i/j}\, d\xi \right].$$

Se $c_0^{(h)}$ e $c_1^{(h)}$ sono le costanti che intervengono in (9.5), relative all'omeomorfismo $x = x^{(h)}(\xi)$, $h = 1, 2$, procedendo come in [31, pp. 510-511] e come nella dimostrazione del Lemma 9.1, si deduce che

$$\int_D u^h_{i/p} u^h_{i/q} \xi^{(h)}_{p/j} \xi^{(h)}_{q/j} |J^h(\xi)|\, d\xi \geq r^{-r-r/2} [c_0^{(h)}]^r [c_1^{(h)}]^{-2} \int_D u^h_{i/j} u^h_{i/j}\, d\xi \qquad (h = 1, 2).$$

Quindi $q_1 = r^{-r-r/2} \min\limits_{h=1,2} \{[c_0^{(h)}]^r [c_1^{(h)}]^{-2}\}$.

Consideriamo, dunque, il problema di determinare $U \in W(A)$ tale che

$$((U, V)) = \int_A F_i V_i\, dx, \qquad \forall V \in W(A), \tag{12.54}$$

data $F \in L^2_0(A) = \{F \in L^2(A)\colon (F, \rho) = 0, \ \forall \rho \in R(A)\}$.

Se con $\mathcal{H}(A)$ si denota lo spazio $H_1(A)$, nel quale si è introdotto il prodotto scalare (12.52), sia Π il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}(A)$ sul sottospazio $\mathcal{W}(A) = \{U \in \mathcal{H}(A): (U, \rho) = 0, \forall \rho \in R^1(A)\}$ e sia Λ il proiettore ortogonale di $L^2(A)$ su $L_0^2(A)$. La soluzione del problema (12.54) è data da $U = \Pi M \Lambda F$ (cfr. sez. 10), con l'operatore M soluzione di (12.53).

Posto $B_0(U, V) = q_0((U, V))$, $(0 < q_0 < \tilde{q}_0)$ data $F \in L_0^2(A)$ il problema di determinare $U \in W(A)$ tale che

$$B_0(U, V) = (F, V), \qquad \forall V \in W(A), \tag{12.55}$$

ha come soluzione $U = G_0 F = (1/q_0)\Pi M \Lambda F$. G_0 è un PCO (positivo ma non strettamente) di $L^2(A)$. Assumendo come spazio S lo spazio delle funzioni di $L^2(A)$ e come spazio H lo spazio $W(A)$, per il Lemma 12.10, il problema (12.55) costituisce un problema base per il problema (10.4).

Sostituendo a G_0 l'operatore esplicitamente noto $G_{0,m} F = (1/q_0)\Pi M_m \Lambda F$ è possibile applicare la teoria degli operatori intermedi per la costruzione di una successione di operatori $\{G_{n,m}\}$, esplicitamente noti, che approssimano uniformemente G. Per il Teorema 12.4 risulta $\lim_{m \to \infty} \|G_0 - G_{0,m}\| \leq (1/q_0) \lim_{m \to \infty} \tau_m = 0$. La conoscenza esplicita della successione $\{\tau_{n,m}\}$ tale che $\|G_0 - G_{0,m}\| \leq (1/q_0)\, \tau_{n,m}$, insieme ai Teoremi 4.6 e 4.7, permette la maggiorazione dell'errore di approssimazione uniforme $\|G - G_{n,m}\|$ con la precisione voluta. Se N, e quindi G_0, $G_{n,m}$ e G appartengono alla classe $\mathcal{C}^2$ si proceda a quanto accennato nella sez. 9 per il calcolo della matrice di Green $g^{n,m}(x, y) = \{g_{h,k}^{n,m}(x, y)\}$ $(h, k = 1, \ldots, r)$ corrispondente a G e del relativo errore di approssimazione.

Lavoro svolto con il finanziamento dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica «Francesco Severi», Roma.

BIBLIOGRAFIA

[31] P. CASTELLANI RIZZONELLI, *Sul calcolo delle autofrequenze di un corpo elastico libero al bordo e con coefficienti elastici discontinui.* Rend. Mat., s. VI, vol. 11, Roma 1978, 495-519.

[32] L. E. PAYNE - H. F. WEINBERGER, *On Korn's Inequality.* Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 8, n. 1, 1961, 89-98.

[33] A. CIALDEA, *Formule di maggiorazione e teoremi di completezza relativi al sistema dell'elasticità tridimensionale.* Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 14, 4, 1988, 283-302.

[34] G. FICHERA, *Sviluppi in serie e teoremi di decomposizione in somma per le funzioni iperarmoniche.* Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. LXIII, 1941, 41-64.

[35] G. FICHERA, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno.* Atti Acc. Lincei Mem. fis., s. 8, vol. VII, sez. 1ª, fasc. 5, 1964, 91-140.

[36] S. BERGMAN - M. SCHIFFER, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics.* Pure and Appl. Math., Acad. Press, New York 1953.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 2 - 00185 ROMA