

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE LINCEI CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

---

EUGENIO BRUZZESE, FRANCESCO RUSSO SPENA,  
RENATO SPARACIO

## Contributo di diaframmi orizzontali alla resistenza sismica di strutture murarie a navata

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni,  
Serie 9, Vol. 4 (1993), n.1, p. 63–77.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLIN\\_1993\\_9\\_4\\_1\\_63\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1993_9_4_1_63_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1993.

**Meccanica dei solidi.** — *Contributo di diaframmi orizzontali alla resistenza sismica di strutture murarie a navata.* Nota di EUGENIO BRUZZESE, FRANCESCO RUSSO SPENA e RENATO SPARACIO, presentata (\*) dal Socio E. Giangreco.

ABSTRACT. — *Strengthening performances of lattice diaphragms against seismic actions on monumental masonry buildings.* The paper deals with the problem concerning the retrofitting and rehabilitation of the architectural heritage of monumental value. In sect. 1 the state-of-art and technical implications concerning historical masonry buildings in seismic areas are presented. Section 2 is devoted to the formulation of the mathematical model needed for the analysis of this class of structures. Referring to an effective situation, paradigmatic for the class of structures in argument, computational results of technical interest are presented. Finally, in Appendix, the problem weak formulation is given and the computational solution algorithm based on discretization using non-conforming bi-cubic flat-shell finite elements is presented in full detail.

KEY WORDS: Non-linear mechanics; Structural reliability; Restoring and retrofitting.

RIASSUNTO. — Con riferimento a configurazioni geometriche schematiche di strutture murarie tipiche dell'edilizia monumentale si analizzano gli stati tensionali di carattere prevalentemente flessionale indotti nelle pareti verticali da azioni orizzontali da sisma. L'analisi è finalizzata alla definizione quantitativa della efficacia di interventi di integrazione statica che prevedono l'inserimento di un traliccio orizzontale in acciaio al livello del piano di gronda del tetto, capace di costituire diaframma orizzontale in copertura e di trasferire le azioni orizzontali sulle pareti di testata. Si descrive la metodologia di calcolo utilizzata, e si illustrano i risultati delle analisi eseguite.

## 1. INTRODUZIONE

Nel campo delle costruzioni in muratura, in zona sismica, risultano largamente diffusi sistemi strutturali riconducibili a schemi a pareti portanti, completati da un insieme di elementi aventi la funzione di assicurare la ripartizione delle azioni orizzontali fra tutte le strutture verticali destinate ad assorbirle.

In questa tipologia rientrano alcuni edifici monumentali — particolarmente quelli dedicati al culto — e le vetuste costruzioni in muratura che compongono la parte predominante dei centri storici.

Una gran parte dei primi è caratterizzata dalla presenza di lunghi muri longitudinali, spesso privi di contrafforti, e da tetti in legno che conferiscono all'insieme la tipica configurazione di struttura scatolare.

Tuttavia, lo stato di sconnessione e di obsolescenza dei tetti sovente priva l'opera di un diaframma orizzontale capace sia di distribuire sugli elementi resistenti le azioni da sisma che di conservare la indeformabilità della sezione orizzontale dell'edificio e fa assumere alla vulnerabilità sismica di questo ed al rischio sismico conseguente, livelli inaccettabili per la comparsa di regime flessionale di notevole entità nei lunghi muri non controventati.

(\*) Nella seduta del 12 giugno 1992.

I tipi di intervento volti al miglioramento o all'eventuale adeguamento sismico degli edifici in parola, dovendo essere definiti in modo da non snaturare la identità ed i valori storico-artistici del monumento, quando le particolari connotazioni dell'opera lo consentono, prevedono la sostituzione del tetto in legno con capriate metalliche e la utilizzazione di elementi strutturali disposti nel piano d'imposta (briglia inferiore e correnti a sostegno di soffitti decorati) integrati con aste diagonali.

In questo modo elementi già presenti nella struttura, sebbene con altre funzioni, opportunamente integrati, consentono la realizzazione nel piano orizzontale di un diaframma avente le richiamate proprietà di indeformabilità e di capacità di trasferimento delle azioni orizzontali ai muri trasversali.

Tale diaframma realizza, inoltre, un vincolo di notevole efficacia in grado di ridurre drasticamente gli effetti di carattere flessionale dovuti alle azioni ortogonali alle pareti.

Ulteriori vantaggi – riguardanti il livellamento delle sollecitazioni nei muri e la limitazione delle deformazioni – possono ottenersi qualora sia possibile rendere solidale ai muri, anche flessionalmente, il complesso spaziale degli elementi costituenti la copertura.

La definizione quantitativa dell'efficacia di interventi del tipo descritto pone il problema della schematizzazione strutturale che, nel caso di opere in muratura, si presenta assai complesso; è infatti ben noto che le ipotesi fondamentali della teoria della elasticità classica – cioè di piccoli spostamenti e deformazioni, di legame costitutivo linearmente elastico e bilaterale del materiale – non possono tutte ritenersi accettabili quando si intenda analizzare il problema dell'equilibrio di elementi strutturali in muratura.

Questa impossibilità ha dato origine in anni recenti e prevalentemente in Italia ad una intensa fioritura di studi e ricerche che hanno portato contributi notevoli alla corretta formulazione di questo singolare problema di meccanica delle strutture.

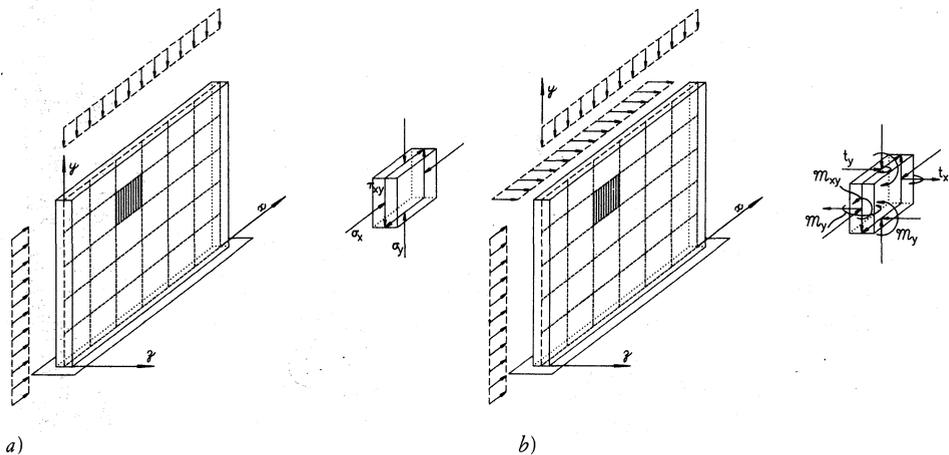


Fig. 1.

Le ricerche in parola hanno avuto come oggetto di principale interesse il solido bidimensionale pluriconnesso in muratura - *pannello* -, sollecitato da azioni contenute nel proprio piano medio e sede di stato tensionale piano generalizzato (fig. 1a).

In questo contesto e nell'ambito di un modello costitutivo elastico unilaterale il problema statico-cinematico è stato generalmente affrontato, dal punto di vista teorico, esaminando le questioni di esistenza, unicità e proprietà qualitative di soluzioni deboli [1, 2, 3], e dal punto di vista applicativo, definendo metodologie computazionali non lineari per la ricerca di soluzioni approssimate caratterizzate da proprietà di convergenza e di stabilità [4, 5, 6].

Tuttavia, nella schematizzazione statica degli edifici di cui si discute, l'aspetto prevalente è rappresentato dal comportamento strutturale del solido murario bidimensionale inflesso da azioni di tipo sismico (fig. 1b), ortogonali a quest'ultimo aspetto, al contrario di quanto già precisato riguardo al pannello, appaiono, allo stato, non ancora conclusive e, pertanto, non sono suscettibili di applicazioni di concreto significato ingegneristico.

Nondimeno, la necessità di conseguire elementi di giudizio di pratica utilità riguardo a situazioni strutturali differenziate, ad esempio, per diversa distribuzione di elementi resistenti, costringe ad accettare limitazioni al campo di indagine.

In quest'ordine di idee, in [7] viene analizzato il comportamento dinamico, in campo lineare, di una struttura muraria, monocellulare ad un piano, composta da pareti considerate quali lastre piane inflesse, variamente irrigidite con cordoli in c.a. inseriti sia a coronamento che nel corpo stesso dei muri; lo studio è volto a valutare l'efficacia di tipologie di rafforzamento diversificate e alla individuazione delle zone di maggiore concentrazione tensionale.

Un tema analogo viene affrontato, dal punto di vista sperimentale in [8], con riferimento ad edifici del tipo rurale a struttura muraria.

Nella presente *Nota*, dopo aver brevemente richiamato le caratteristiche essenziali del metodo di calcolo utilizzato, vengono illustrati i risultati di una lunga serie di indagini intese ad accertare l'entità della risposta ad azioni sismiche di modelli schematici di edifici murari ad un piano ed a pianta sensibilmente allungata, integrati da graticci metallici disposti in copertura e resi solidali ai muri di perimetro.

## 2. IL MODELLO STRUTTURALE

Il modello utilizzato per la simulazione del comportamento strutturale, unitamente al sistema cartesiano di riferimento globale di assi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ed alla indicazione del reticolo di discretizzazione, è mostrato in fig. 2a. Le dimensioni del modello sono di  $12\text{ m} \times 21\text{ m}$  in pianta, con altezza delle pareti di  $10\text{ m}$  e spessore costante di  $0.7\text{ m}$ .

In fig. 2b è mostrato lo stesso modello, integrato dalla presenza di una trave in c. a. di coronamento delle pareti verticali di sezione  $0.70\text{ m} \times 0.40\text{ m}$ , congiuntamente al diaframma reticolare di aste in acciaio le cui sezioni possono desumersi dalla fig. 3.

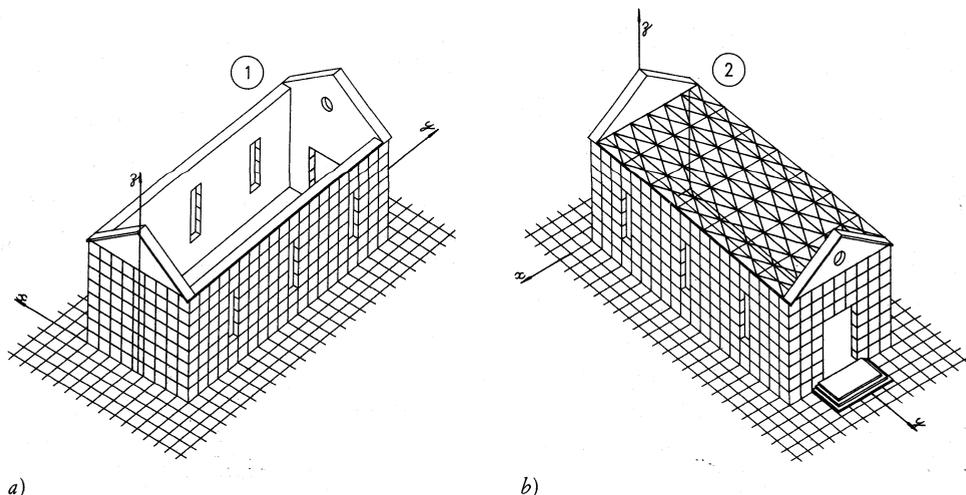


Fig. 2.

Nella schematizzazione descritta, gli elementi finiti costituenti le pareti sono considerati quali lastre piane sottili dotate di rigidezza flesso-estensionale; la trave di coronamento è schematizzata con elementi monodimensionali ad asse rettilineo, dotati di rigidezza estensionale e flesso-torsionale, mentre le aste del diaframma reticolare sono schematizzate come elementi monodimensionale rettilinei, dotati di sola rigidezza estensionale. Per la definizione dello stato tensionale indotto da carichi verticali ed orizzontali agenti sullo schema, si è utilizzato il metodo degli elementi finiti nella classica formulazione che assume quali incognite gli spostamenti generalizzati dei nodi del grigliato. Nel procedimento di soluzione agli elementi finiti si è assunto, per gli elementi bi-dimensionali piani, un modello di spostamento espresso da una forma algebrica bi-lineare per il campo delle componenti di spostamento nel piano ed un modello espresso da un polinomio cubico per la componente di spostamento ad esso ortogonale, come dettagliatamente descritto in Appendice. Con riferimento alla simbologia utilizzata in Appendice, a partire dalle matrici di rigidezza degli elementi espresse nei sistemi di riferimento locali, con le consuete procedure di trasformazione dei sistemi di riferimento da locale a globale, il legame costitutivo per l'insieme di  $m$  elementi assemblati può esprimersi nella seguente forma condensata:

$$(1) \quad \underline{F} = \underline{\hat{K}} \underline{r}$$

essendo  $\underline{F}$  ed  $\underline{r}$  rispettivamente le matrici-colonne a blocchi d'ordine  $24m$  ottenute dalle matrici  $\underline{\hat{Q}}_e$  e  $\underline{\hat{q}}_e$  espresse nel riferimento globale;  $\underline{\hat{K}}$  la matrice diagonale a blocchi  $(24m, 24m)$  ottenuta dalle matrici  $\underline{\hat{K}}_e$  degli elementi espresse nel riferimento globale. Indicata con  $\underline{x}$  la matrice-colonna d'ordine  $6n$  degli spostamenti generalizzati degli  $n$  nodi del modello strutturale, la condizione di compatibilità cinematica da associare alla relazione di assemblaggio espressa dalla (1), è data da:

$$(2) \quad \underline{r} = \underline{\mathcal{B}} \underline{x}$$

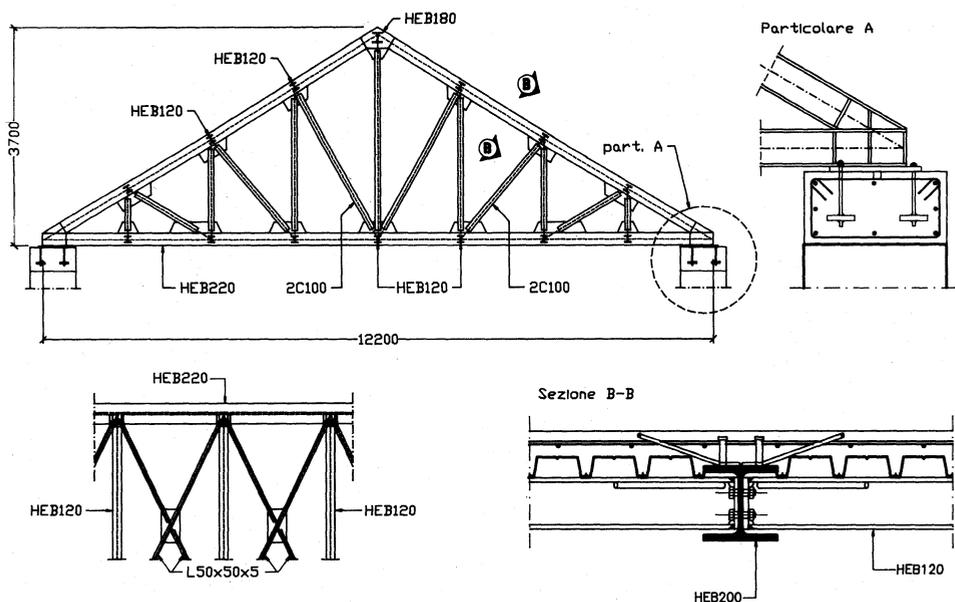


Fig. 3.

in cui  $\underline{\underline{\beta}}$  è matrice booleana (composta cioè solo di 0 e 1) d'ordine  $(24m, 6m)$  cosiddetta di congruenza. La condizione di equilibrio degli  $n$  nodi del modello sotto l'azione delle forze esterne generalizzate agenti sui nodi e raccolte nella matrice-colonna  $\underline{P}$  d'ordine  $6n$ , può ricavarsi attraverso l'applicazione del principio dei lavori virtuali:

$$(3) \quad \underline{r}^T \underline{F} = \underline{x}^T \underline{P}.$$

Tenuto conto della (2), la (3) assume la forma

$$\underline{x}^T (\underline{\beta}^T \underline{F} - \underline{P}) = 0$$

da cui per l'arbitrarietà di  $\underline{x}$ , risulta

$$(4) \quad \underline{P} = \underline{\beta}^T \underline{F}.$$

Infine tenuto conto del legame costitutivo espresso dalla (1), la (4) assume l'aspetto

$$(5) \quad \underline{P} = \underline{K}_s \underline{x}$$

nella quale

$$(6) \quad \underline{K}_s = \underline{\underline{\beta}}^T \underline{\widehat{K}} \underline{\underline{\beta}}$$

è la matrice di rigidezza semi-definita positiva  $(6n, 6n)$  del modello strutturale assemblato.

La (5) definisce le condizioni di equilibrio elastico del modello discretizzato; ad essa occorre associare le condizioni al contorno che traducono la presenza dei vincoli esterni.

Nel caso analizzato, si è ipotizzata la presenza di incastro rigido per i punti della frontiera inferiore del modello.

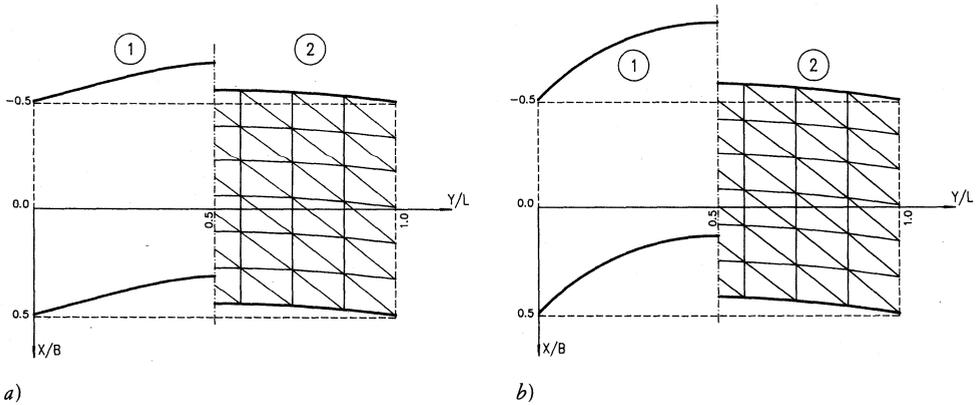


Fig. 4. - a) Diagramma cinematico  $U(y)$  per la sezione  $Z/H = 0.5$ ; b) diagramma cinematico  $U(y)$  per la sezione  $Z/H = 1.0$ .

### 3. DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Il modello strutturale la cui geometria è descritta nel paragrafo precedente, è stato analizzato con riferimento ad una situazione di carico che prevede l'azione contemporanea di forze verticali - dovute ai carichi morti - e di forze orizzontali la cui intensità è fissata dalla Normativa tecnica italiana per zone caratterizzate da grado di sismicità  $s = 9$  con valore del coefficiente di struttura pari a 4.

Per quanto attiene alle caratteristiche elastiche dei materiali, si è assunto:  $E = 2000 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0.1$  per la muratura;  $E = 206000 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0.3$  per l'acciaio.

In corrispondenza della medesima situazione di carico, si è analizzata la risposta della sola ossatura muraria integrata dal graticcio in acciaio disposto al livello dell'imposta del tetto (fig. 2b).

Nelle figg. da 4 a 8 sono utilizzati i risultati delle analisi numeriche eseguite, con riferimento ai due schemi statici rappresentati nelle figg. 2a e 2b.

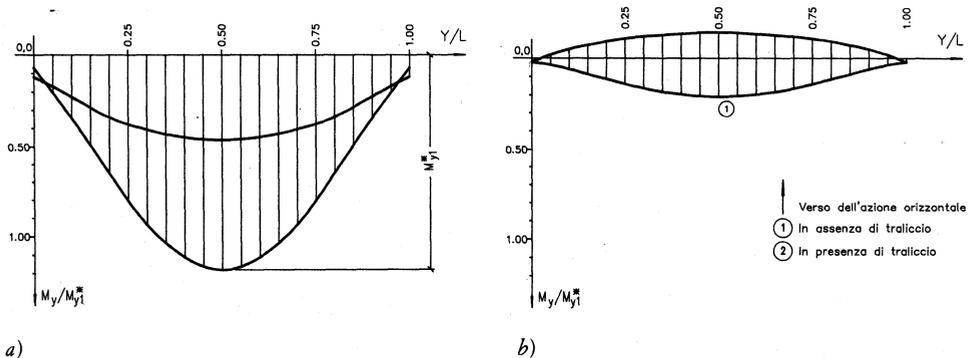


Fig. 5. - a) Diagramma dei momenti flettenti  $M_y(y)$  nella fibra  $Z/H = 0.0$ ; b) diagrammi dei momenti flettenti nella fibra  $Z/H = 0.4$ .

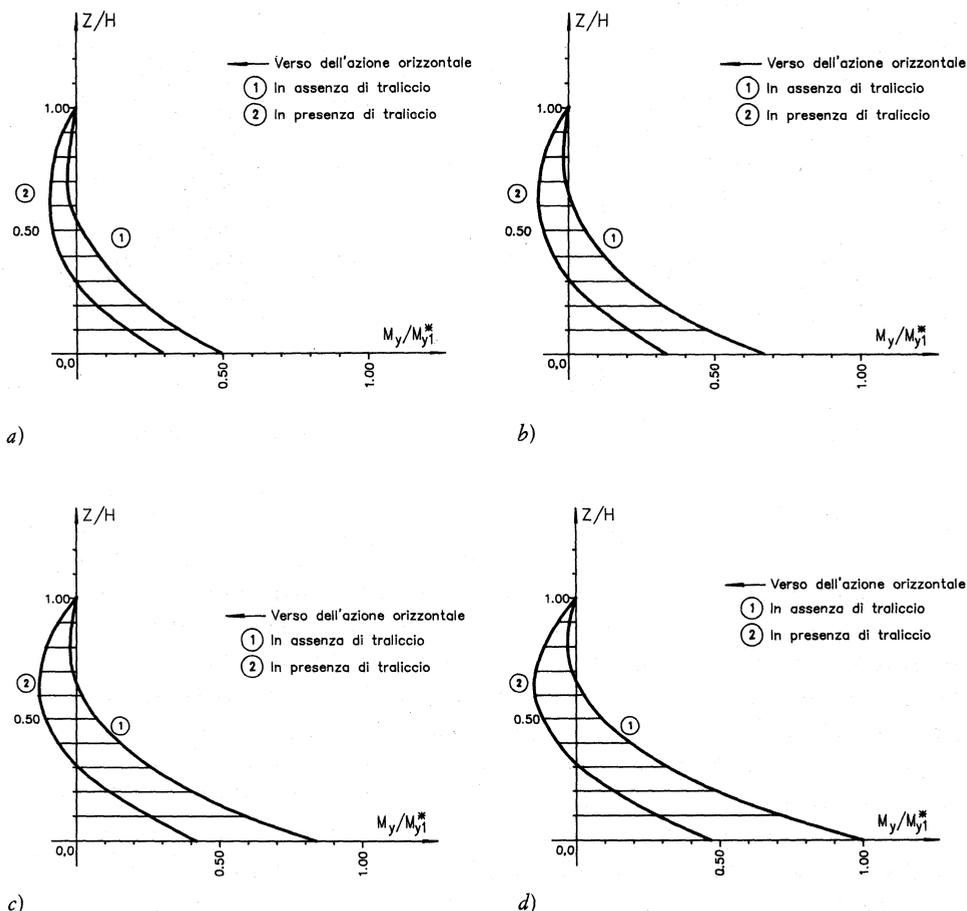


Fig. 6. - Diagramma dei momenti flettenti  $M_y(z)$  nella fibra  $Y/L = 0.20$ ; b) digramma dei momenti flettenti  $M_y(z)$  nella fibra  $Y/L = 0.30$ ; c) diagramma dei momenti flettenti  $M_y(z)$  nella fibra  $Y/L = 0.35$ ; d) diagramma dei momenti flettenti  $M_y(z)$  nella fibra  $Y/L = 0.50$ .

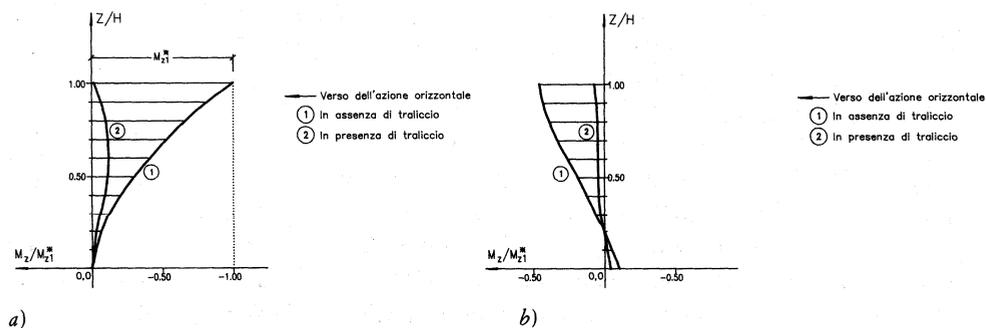


Fig. 7. - a) Diagramma dei momenti flettenti  $M_z(z)$  nella fibra  $Y/L = 0.00$ ; b) diagramma dei momenti flettenti  $M_z(z)$  nella fibra  $Y/L = 0.50$ .

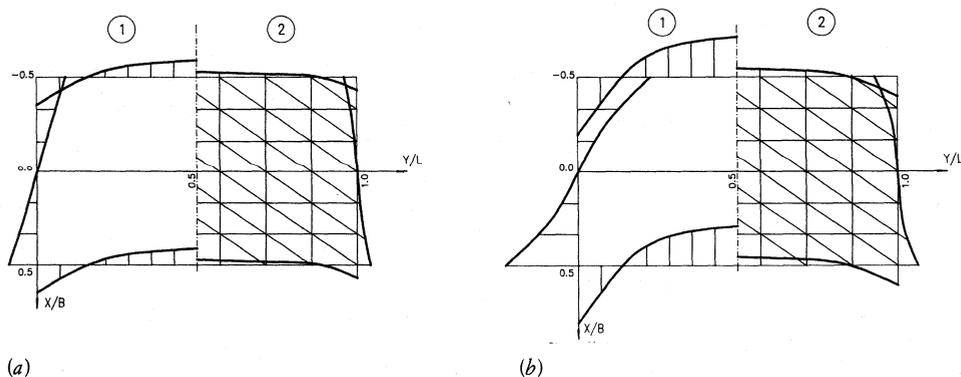


Fig. 8. - a) Diagramma dei momenti flettenti  $Mz(y)$  e  $Mz(x)$  a quota  $Z/H = 0.5$ ; b) diagramma dei momenti flettenti  $Mz(y)$  e  $Mz(x)$  a quota  $Z/H = 1.0$ .

In particolare nelle figg. 4a e 4b, sono riportati i diagrammi della componente di spostamento secondo l'asse dei punti appartenenti rispettivamente alle sezioni orizzontali alle quote  $Z/H = 1$  e  $Z/H = 0.5$ . I valori diagrammati sono resi adimensionali rapportandoli al valore massimo della componente di spostamento che si verifica in corrispondenza della mezzeria della sezione  $Z/H = 1$  nel caso di ossatura muraria sprovvista di diaframma reticolare orizzontale (schema di fig. 2a).

Le figg. 5 e 6 riportano, sempre con riferimento agli schemi statici di figg. 1a e 1b, le distribuzioni del momento flettente intorno all'asse  $Y$  del riferimento globale in corrispondenza delle sezioni orizzontali alle quote  $Z/H = 0$  e  $Z/H = 0.4$  e rispettivamente quelle in corrispondenza delle sezioni verticali  $Y/L = 0$ ;  $Y/L = 0.3$ ;  $Y/L = 0.35$  e  $Y/L = 0.4$ . Nelle figg. 7 e 8 sono infine rappresentate le distribuzioni del momento flettente intorno all'asse  $Z$  del riferimento globale in corrispondenza delle sezioni verticali  $Y/L = 0$  e  $Y/L = 0.5$  e rispettivamente quelle relative alle sezioni orizzontali  $Z/H = 0.5$  e  $Z/H = 1$ .

In tutte le distribuzioni di momento flettente rappresentate, i valori diagrammati sono resi adimensionali rapportandoli al valore massimo del momento flettente  $M^*$  che viene attinto in una delle sezioni appartenenti alla successione di sezioni omologhe che si considera.

Dall'insieme dei risultati ottenuti, si deduce il significato quantitativo della efficacia della tipologia di intervento che prevede l'inserimento del diaframma reticolare in acciaio a livello della copertura.

In particolare, il confronto tra i diagrammi in termini di enti statici e cinematici, relativi ai due schemi esaminati, pone in rilievo il contributo determinante del traliccio piano, pur nella esilità delle sue membrature, nei riguardi della limitazione dei valori degli spostamenti e delle caratteristiche della sollecitazione negli elementi murali longitudinali. In effetti, dall'esame dei diagrammi delle figg. 4-8, si deduce che oltre alla riduzione dei valori di questi enti, che risulta non minore dell'80% di quelli relativi all'ossatura muraria senza traliccio in copertura, si ottiene anche una sensibile riduzione dei momenti flettenti  $M$ , con più razionale distribuzione delle eccentricità della forza normale lungo l'altezza del muro.

4. APPENDICE

Qui di seguito si dà conto sinteticamente dei modelli di spostamento polinomiali utilizzati per la determinazione della matrice di rigidità dei soli elementi rettangolari bidimensionali, in quanto per gli elementi monodimensionali le matrici di rigidità possono essere desunte direttamente dalla trattazione di Saint-Venant.

L'elemento infinitesimo  $dx, dy$  di lastra piana sottile inflessa di spessore  $2h$  è rappresentato in fig. 9a unitamente al sistema cartesiano ortogonale di riferimento locale  $x, y, z$  ed all'indicazione delle caratteristiche della sollecitazione. (1)

Gli sforzi generalizzati  $m_{xx}, m_{yy}, m_{xy} = m_{yx}, t_{xz}$  e  $t_{yz}$  sono rispettivamente organizzati nelle matrici-colonna:  $\underline{\zeta} = [m_{xx} \ m_{yy} \ m_{xy}]^T$  e  $\underline{t} = [t_{xz} \ t_{yz}]^T$  in cui risulta:

$$m_{ij} = \int_{-b}^b \sigma_{ij} z dz, \quad i, j = x, y; \quad t_{ij} = \int_{-b}^b \sigma_{iz} dz, \quad i = z, y.$$

Introdotti gli operatori differenziali simbolici:

$$\underline{\mathcal{D}} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\partial} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{vmatrix}$$

e con riferimento alla situazione rappresentata in fig. 9a, le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno ad  $x$  e ad  $y$ , e quelle di equilibrio alla traslazione in direzione  $z$ , si scrivono rispettivamente:

(7)  $\underline{\underline{\mathcal{D}}}^T \underline{\zeta} = \underline{t},$

(8)  $\underline{\partial}^T \underline{t} + p = 0$

ove con  $p$  si è indicata la forza superficiale agente in direzione  $z$ .

Sostituendo formalmente nella (8) l'espressione di  $\underline{t}$  fornita dalla (7), si ottiene la

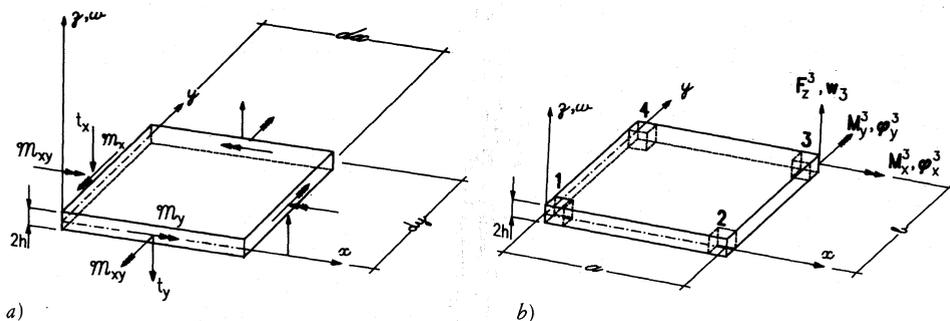


Fig. 9.

(1) Indicate con  $\sigma_{ij} (i, j = x, y, z)$  le componenti cartesiane ortogonali del tensore di Cauchy delle tensioni, si assumono le consuete ipotesi di Kirchhoff-Love: a) l'elemento lineare normale al piano medio rimane lineare e normale alla superficie media della lastra; b) risulta ovunque nel dominio della lastra  $\sigma_{zz} = 0$ , e nei punti della superficie media  $\sigma_{ij} = 0 (i, j = x, y, z)$ .

seguinte equazione indefinita di equilibrio generalizzato:

$$(9) \quad \underline{\partial}_2^T \underline{\zeta} = p$$

in cui si è posto  $\underline{\partial}_2 \equiv \underline{\mathcal{D}} \underline{\partial} = -[\partial^2/\partial x^2 \quad \partial^2/\partial y^2 \quad 2\partial^2/\partial x\partial y]^T$ .

Le deformazioni generalizzate sono rappresentate dalle curvature linearizzate e vengono raccolte nella matrice-colonna di ordine 3  $\underline{\varepsilon} = [\chi_x \quad \chi_y \quad \chi_{xy}]^T$ . Esse sono legate alla funzione-inflessione  $w(x, y)$  dalla seguente equazione di congruenza esplicita

$$(10) \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\partial}_2 w.$$

Il legame costitutivo generalizzato tra momenti e curvature si scrive infine

$$(11) \quad \underline{\zeta} = \underline{C} \underline{\varepsilon}$$

ove, per materiale isotropo, risulta:

$$\underline{C} = \frac{2Eb^3}{3(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}$$

con  $E$  e  $\nu$  rispettivamente modulo di elasticità normale e coefficiente di Poisson del materiale.

Sostituendo le (9) e (10) nella (11) si ottiene la classica equazione di Germain e Lagrange  $\underline{\partial}_2^T[\underline{C}(\underline{\partial}_2 w)] = p$ .

L'elemento finito rettangolare di lastra piana sottile inflessa di lati  $a, b$  è mostrato in fig. 9b unitamente alle forze nodali ed agli spostamenti nodali generalizzati che, nodo per nodo, sono rispettivamente definiti da:

$$(12) \quad \begin{aligned} \underline{Q}_i &= [F_z^i \quad M_x^i \quad M_y^i] & \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ \underline{q}_i &= \left[ w_i \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} - \frac{\partial w_i}{\partial x} \right]^T & \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Per rappresentare l'incognita funzione  $w(x, y)$  nel dominio rettangolare dell'elemento, si assume il polinomio cubico completo in  $x, y$  con l'aggiunta dei due termini emisimmetrici del polinomio quartico<sup>(2)</sup>:

$$(13) \quad w = \underline{f} \underline{a}$$

in cui si è indicata con  $\underline{f}$  la matrice-riga d'ordine 12 dei termini monomi

$$\underline{f} = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2 \cdot y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3 \cdot y \quad y^3 \cdot x]$$

e con  $\underline{a}$  la matrice-colonna di ordine 12 dei coefficienti:  $\underline{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad \dots \quad a_{12}]^T$  da determinare in funzione degli spostamenti generalizzati  $\underline{q}_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Introdotta la matrice-colonna simbolica d'ordine 3:

$$(14) \quad \underline{\partial}_1 = [\partial/\partial y \quad -\partial/\partial x]^T$$

(2) La proprietà di convergenza monotona della soluzione ottenuta mediante l'approssimazione (13) per un insieme di  $m$  elementi, al crescere di  $m$ , è provata in [9].

le (12) tenuto conto delle (13) e (14), si scrivono per il generico nodo  $i$ -mo

$$(15) \quad \underline{q}_i = \underline{\mathcal{F}}_i \underline{a}$$

avendo posto  $\underline{\mathcal{F}}_i = (\partial_1 \underline{f})_i$  matrice d'ordine (3, 12).

Le (15),  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$  costituiscono il sistema di equazioni algebriche lineari, non omogeneo, nel vettore incognito  $\underline{a}$ , che con notazione condensata può scriversi

$$(16) \quad \underline{q} = \underline{\mathcal{F}}_i \underline{a}$$

ove con  $\underline{q}$  e  $\underline{\mathcal{F}}_i$  si sono indicate rispettivamente le matrici-colonna a blocchi delle  $\underline{q}_i$  e la matrice quadrata a blocchi delle  $\underline{\mathcal{F}}_i$  d'ordine 12:

$$\underline{q} = [\underline{q}_1 \underline{q}_2 \underline{q}_3 \underline{q}_4]^T$$

e

$$\underline{\mathcal{F}}_e = [\underline{\mathcal{F}}_1 \underline{\mathcal{F}}_2 \underline{\mathcal{F}}_3 \underline{\mathcal{F}}_4]^T.$$

La (16) può formalmente essere invertita:  $\underline{a} = \underline{\mathcal{F}}_4^{-1} \underline{q}$  e può essere sostituita nella (7), per fornire

$$(17) \quad \underline{w} = \underline{N} \underline{q}$$

con:  $\underline{N} = \underline{f} \underline{\mathcal{F}}_4^{-1}$  matrice-riga d'ordine 12 delle cosiddette funzioni-forma dell'elemento finito rettangolare inflesso.

Tenuto conto della (17), il legame di congruenza generalizzato puntuale (10), fornisce il seguente legame di congruenza punto-nodo:

$$(18) \quad \underline{\chi} = \underline{B} \underline{q}$$

con  $\underline{B} = \partial_1 \underline{N}$  operatore matriciale di congruenza (3, 12).

Il legame di equilibrio punto-nodo tra forze nodali generalizzate  $\underline{Q}$  e sforzi puntuali generalizzati  $\underline{\zeta}$ , può ottenersi uguagliando il lavoro virtuale compiuto dall'insieme  $(\underline{Q} - \underline{\zeta})$  per un insieme di spostamenti nodali  $\underline{q}_i$ , congruenti con le deformazioni  $\underline{\varepsilon}$ .

Si ha pertanto, indicando con  $\Omega$  il dominio piano dell'elemento

$$(19) \quad \underline{q}^T \underline{Q} = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}^T \underline{\zeta} d\Omega$$

e poichè l'insieme  $(\underline{q} - \underline{\varepsilon})$  soddisfa la (18), si ha

$$\underline{q}^T \left( \underline{Q} - \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\zeta} d\Omega \right) = 0$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $\underline{q}$ , risulta

$$(20) \quad \underline{Q} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\zeta} d\Omega.$$

Infine il legame costitutivo tra le forze nodali  $\underline{Q}$  e spostamenti nodali  $\underline{q}$ , per l'elemento, si ottiene dall'equazione di bilancio (19), tenendo conto delle (11), (18) e (20).

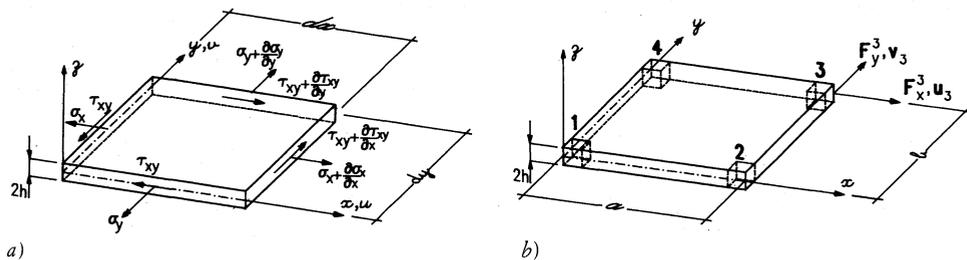


Fig. 10.

Risulta pertanto:

$$(21) \quad \underline{Q} = \underline{K} \underline{q}$$

in cui

$$(22) \quad \underline{K} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} d\Omega$$

è la matrice quadrata di ordine 12 di rigidezza dell'elemento inflesso.

Con riferimento all'elemento infinitesimo di lastra estensionale \$dx\$, \$dy\$ rappresentato in fig. 10a ed indicando con \$\underline{s} = [u \ v]^T\$, \$\underline{\varepsilon}^\* = [\varepsilon\_{xx} \ \varepsilon\_{yy} \ \varepsilon\_{xy}]^T\$, \$\underline{\sigma}^\* = [\sigma\_{xx} \ \sigma\_{yy} \ \sigma\_{xy}]^T\$ rispettivamente le componenti cartesiane dello spostamento \$\underline{s}(x, y)\$, le componenti cartesiane attive dei tensori di deformazione e di tensione, risulta: per il legame di congruenza:

$$(23) \quad \underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{s}$$

per il legame di equilibrio:

$$(24) \quad \underline{D}^T \underline{\sigma}^* - \underline{p}_v = 0$$

per il legame costitutivo:

$$(25) \quad \underline{\sigma}^* = \underline{C}^* \underline{\varepsilon}^* .$$

Nella (24) con \$\underline{p}\_v\$ si è indicata la matrice-colonna delle due componenti cartesiane delle forze di massa; nella (25) con

$$\underline{C}^* = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 1 \\ \nu & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}$$

la matrice di *rigidezza materiale*.

L'elemento finito di lastra piana estensionale di lati \$a\$, \$b\$ è mostrato in fig. 10b, unitamente alle forze nodali ed agli spostamenti nodali che, nodo per nodo, sono rispettivamente definiti da \$\underline{Q}\_i^\* = [F\_x^i \ F\_y^i]^T\$, \$\underline{q}\_i^\* = [u\_i \ v\_i]^T\$.

Per rappresentare il campo vettoriale \$\underline{s}\$ nel dominio rettangolare dell'elemento,

si assume [10] la funzione algebrica bi-lineare in  $x, y$ . Risulta pertanto  $u = \underline{g} \underline{b}_1$ ,  $v = \underline{g} \underline{b}_2$  in cui si è posto  $\underline{g} = [1 \ x \ y \ xy]$ ,  $\underline{b}_1 = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]^T$ ,  $\underline{b}_2 = [b_5 \ b_6 \ b_7 \ b_8]^T$ .

Per il nodo  $i$ -mo dell'elemento, risulta dunque  $\underline{s}_i = \underline{\mathcal{G}}_i \underline{b}$  essendo:

$$\underline{\mathcal{G}}_i = \begin{vmatrix} \underline{g}_i & o_4 \\ o_4 & \underline{g}_i \end{vmatrix}$$

matrice rettangolare (2, 8),  $\underline{b}$  la matrice-colonna a blocchi d'ordine 8 della  $\underline{b}_1$  e  $\underline{b}_2$  e  $o_4$  la matrice-riga nulla d'ordine 4.

Per gli spostamenti nodali, raccolti nella matrice-colonna a blocchi di ordine 8  $\underline{q}^* = [\underline{q}_1^* \ \underline{q}_2^* \ \underline{q}_3^* \ \underline{q}_4^*]$  risulta

$$(26) \quad \underline{q}^* = \underline{\mathcal{G}}_e \underline{b}$$

ove si è posto  $\underline{\mathcal{G}}_e = [\underline{\mathcal{G}}_1 \ \underline{\mathcal{G}}_2 \ \underline{\mathcal{G}}_3 \ \underline{\mathcal{G}}_4]^T$ .

Dalla (26) si ricava formalmente  $\underline{b} = \underline{\mathcal{G}}_e^{-1} \underline{q}^*$  e quindi  $\underline{\varepsilon} \equiv \underline{\mathcal{G}} \underline{\mathcal{G}}_e^{-1} \underline{q}^* = \underline{\tilde{N}} \underline{q}^*$  essendo  $\underline{\tilde{N}}$  la matrice (2, 8) delle funzioni-forma dell'elemento.

Procedendo in perfetta analogia formale con il caso dell'elemento di lastra inflessa risulta, successivamente:

– per il legame di congruenza puntuale-nodale:

$$(27) \quad \underline{\varepsilon}^* = \underline{\mathcal{Q}} \underline{\tilde{N}} \underline{q}^* \equiv \underline{\tilde{B}} \underline{q}^* ,$$

– per il legame di equilibrio puntuale-nodale:

$$(28) \quad \underline{Q}^* = 2b \int_{\Omega} \underline{\tilde{B}}^T \underline{\sigma}^* d\Omega ,$$

– per il legame costitutivo elementare:

$$(29) \quad \underline{Q}^* = \underline{K}^* \underline{q}^*$$

ove:

$$(30) \quad \underline{K}^* = 2b \int_{\Omega} \underline{\tilde{B}}^T \underline{C}^* \underline{\tilde{B}} d\Omega$$

è la matrice (8, 8) di rigidezza dell'elemento rettangolare di lastra estensionale e  $\underline{Q}^*$  la matrice-colonna a blocchi d'ordine 8:

$$\underline{Q}^* = [\underline{Q}_1^* \ \underline{Q}_2^* \ \underline{Q}_3^* \ \underline{Q}_4^*]^T .$$

Allo scopo di rappresentare congiuntamente il comportamento flessionale e quello estensionale dell'elemento finito rettangolare, si introducono le seguenti matrici-colonna a blocchi d'ordine 24 degli spostamenti nodali e delle forze nodali generalizzate:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{q}}_e &= [\underline{\hat{q}}_1 \ \underline{\hat{q}}_2 \ \underline{\hat{q}}_3 \ \underline{\hat{q}}_4]^T , \\ \underline{\hat{Q}}_e &= [\underline{\hat{Q}}_1 \ \underline{\hat{Q}}_2 \ \underline{\hat{Q}}_3 \ \underline{\hat{Q}}_4]^T , \end{aligned}$$

in cui si è posto rispettivamente

$$\hat{q}_i = [q_i^* \ q_i \ \phi_z^i]^T \equiv [u_i v_i w_i \ \phi_x^i \ \phi_y^i \ \phi_z^i]^T \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\hat{Q}_i = [Q_i^* \ Q_i \ M_z^i]^T \equiv [F_x^i F_y^i F_z^i M_x^i M_y^i M_z^i]^T \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Risulterà allora in generale  $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \hat{Q}_i = \hat{K}_{ij} \hat{q}_i$  in cui si è posto

$$\hat{K}_{ij} = \begin{vmatrix} \underline{K}_{ij}^* & \underline{O}_{23} & \underline{O}_{21} \\ \underline{O}_{32} & \underline{K}_{ij} & \underline{O}_{31} \\ \underline{O}_{12} & \underline{O}_{13} & \underline{O} \end{vmatrix}$$

con  $\underline{O}_{lm}$  matrici nulle ( $l, m$ ).

Per l'elemento si ha infine:

$$(31) \quad \hat{Q}_e = \hat{K}_e \hat{q}_e$$

con

$$\hat{K}_e = \begin{vmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} & \underline{K}_{13} & \underline{K}_{14} \\ & \underline{K}_{22} & \underline{K}_{23} & \underline{K}_{24} \\ \text{sym} & & \underline{K}_{33} & \underline{K}_{34} \\ & & & \underline{K}_{44} \end{vmatrix}.$$

Si osserva infine che la (31) può formalmente rappresentare anche il legame forze-spostamenti nodali per gli elementi monodimensionali, purché si ponga:

$$\hat{K}_e = \begin{vmatrix} \underline{K}_m & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{O} \end{vmatrix}$$

in cui  $\underline{K}_m$  rappresenta la matrice di rigidezza d'ordine 12 dell'elemento di trave monodimensionale e  $\underline{O}$  la matrice quadrata nulla d'ordine 12.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. ROMANO - M. ROMANO, *Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 67, 1979, 104-113.
- [2] A. BARATTA - R. TOSCANO, *Stati tensionali in pannelli di materiale non resistente a trazione*. Atti VI Congr. Naz.le AIMETA, Genova 1982.
- [3] S. DI PASQUALE, *Questioni di meccanica dei solidi non reagenti a trazione*. Atti VI Congr. Naz.le AIMETA, Genova 1982.
- [4] G. ROMANO - E. SACCO, *Sul calcolo di strutture non resistenti a trazione*. Atti VI Congr. Naz.le AIMETA, Genova 1982.
- [5] G. MAJER - A. NAPPI, *A Theory of Perfectly No-tension Discretized Structural System*. In: *Scritti in onore di S. Dei Poli*. Tamburini, Milano 1986.
- [6] F. RUSSO SPENA - R. SPARACIO, *Metodi numerici per l'analisi tensionale di pareti murarie*. Atti Congr. Int.: *Lo stato dell'arte in Italia sulla meccanica delle murature*. Dipartimento di Ingegneria Civile, II Università di Roma, 1985.

- [7] E. BAZAN - M. PADILLA - R. MELI, *Siguridad ante sismas de casa de adobe*. Techn. Rep. 107, Instituto de Ingenieria, Universidad Nacional de Mexico, 1979.
- [8] C. SCAWTHORN - A. BECKER, *Relative Benefits of Alternative Strengthening Methods for Low Strength Masonry Buildings*. 3th U.S. Conf. on Earthquake Eng., Charleston, S. Carolina, 1986.
- [9] J. E. WALZ - R. E. FULTON - N. J. CYRUS, *Accuracy and Convergence of Finite Element Approximations*. Proc. 2nd Conf. on *Matrix Methods in Struct. Mech.* AFFDL TR 1968, 68-150.
- [10] R. H. GALLAGHER, *Finite Elements Analysis: Fundamentals*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliff, N.J., 1975.

Dipartimento di Scienza delle Costruzioni - Facoltà di Ingegneria  
Università degli Studi di Napoli «Federico II»  
Piazzale V. Tecchio, 80 - 80125 NAPOLI