

RENDICONTI LINCEI

MATEMATICA E APPLICAZIONI

ADOLFO BACCI

Un modello semplice per giustificare la legge di Paris

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 4 (1993), n.2, p. 145–155.

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1993_9_4_2_145_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1993_9_4_2_145_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1993.

Meccanica. — *Un modello semplice per giustificare la legge di Paris.* Nota di ADOLFO BACCI, presentata (*) dal Corrisp. T. Manacorda.

ABSTRACT. — *A simple model to obtain the Paris' law.* It is considered an indefinite body under plane strain with a semiinfinite crack. A plastic region is localized around the crack tip. If loads increase in a monotonous and quasi-static way, it is possible to calculate the crack growth rate. The results so obtained are extended wisely to cyclic loading. That allows to find a relationship between the increase of the crack length and the variation range of the strength intensity factor, so that the Paris' law is justified.

KEY WORDS: Fracture; Fatigue; Plasticity.

RIASSUNTO. — Si considera un corpo indefinito in deformazione piana con una fessura semiinfinita al cui apice è localizzata una zona plastica. Se i carichi crescono monotonamente in forma quasi statica, si determina la velocità di avanzamento dell'apice della fessura. Il risultato è esteso, sotto opportune ipotesi, a variazioni di carico cicliche. Ciò permette di trovare una relazione fra l'incremento di lunghezza della fessura e l'oscillazione del fattore di concentrazione degli sforzi, giustificando così la legge di Paris.

INTRODUZIONE

La velocità di avanzamento di una fessura per fatica è predetta con sufficiente precisione, nei materiali duttili, da una relazione empirica chiamata comunemente *legge di Paris* [1], secondo la quale l'incremento ciclico di lunghezza è proporzionale alla quarta potenza dell'ampiezza dell'intervallo di variazione del fattore di concentrazione degli sforzi.

L'importanza della legge di Paris risiede nella sua semplicità e nella capacità di prevedere i risultati delle esperienze eseguite su materiali con microstruttura anche molto diversa tra loro. Questo fatto interessante portò Johnson e Paris [2] a ritenere che la causa del fenomeno fosse la stessa per tutti i materiali duttili, spingendo molti autori a cercare modelli razionali per descrivere il meccanismo che ne è alla base. Alcuni tentativi di spiegazione fanno ricorso all'intervento della microstruttura del materiale, la quale verrebbe ad essere alterata durante il processo periodico di carico e scarico (ad es. [3, 4]), altri, invece, si basano su considerazioni di tipo macroscopico. In essi si suppone che si sia formata una regione plastica all'apice della fessura e che tale zona evolva con il moltiplicarsi dei cicli (ad es. [5-8]). Da questa osservazione prendono spunto le considerazioni energetiche svolte da Cherepanov e Halmanov [9] e da Izumi *et al.* [10]. Cherepanov ed Halmanov, per mezzo di considerazioni qualitative, ricavarono un'uguaglianza fra il lavoro dissipato nell'evoluzione monotona della zona plastica e l'energia di superficie liberata per far avanzare la frattura, ottenendo una relazione formalmente analoga a quella di Paris. L'ordine di grandezza del fattore di proporzionalità non fu valutato esplicitamente, ma determinato in modo empirico per avere un accordo con le esperienze. Izumi *et al.*, invece, avanzarono l'i-

(*) Nella seduta del 9 gennaio 1993.

potesi che alla fine di ogni ciclo di carico esistesse una condizione di stazionarietà dell'energia libera del sistema, esplicitando il bilancio energetico solo in un caso particolare. Tuttavia, in nessuno dei lavori precedenti venne determinata una relazione generale fra i parametri che descrivono l'evoluzione della frontiera elastoplastica e l'incremento di lunghezza della fessura.

Lo scopo di questo lavoro è quello di determinare, riprendendo l'idea di Cherepanov ed Halmanov, una relazione esplicita fra la velocità di avanzamento della fessura e l'oscillazione del fattore di concentrazione degli sforzi. A tale scopo, si considera un corpo elastoplastico con una frattura, in cui lo stato di sforzo cresce in modo monotono e quasi statico. Le deformazioni plastiche si suppongono localizzate solo in regioni che circondano le estremità della fessura, le dimensioni delle quali sono piccole rispetto alla lunghezza della fessura stessa. Si può così ritenere che la trasformazione della zona plastica sia composta di un moto di traslazione, solidale con l'apice, e di una variazione della sua forma. Il cambiamento di configurazione è noto dalla soluzione del problema al contorno formulato per un mezzo elastoplastico illimitato con una fessura semiinfinita e soggetto ad uno stato di tensione fondamentale. In questa semplice situazione, istituendo un'equazione di bilancio energetico, si trova una relazione che lega la velocità di avanzamento dell'apice all'evoluzione della frontiera elastoplastica e, di conseguenza, alla variazione dello stato di tensione imposto. L'estensione dei risultati al caso della fatica porta ad una espressione analoga a quella di Paris, permettendo la valutazione esplicita dell'ordine di grandezza del coefficiente di proporzionalità.

EQUAZIONI DI BILANCIO

Consideriamo un corpo elastoplastico indefinito, in deformazione o tensione piana, nel cui interno c'è una fessura, e supponiamo che il mezzo sia soggetto ad uno

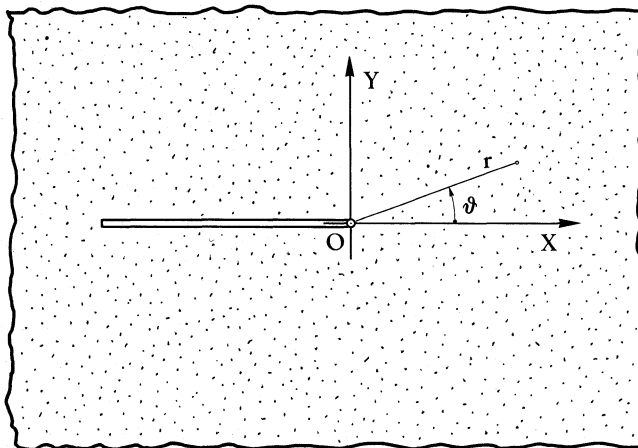


Fig. 1.

stato di tensione fondamentale che cresce lentamente con il tempo. Indicata con O un'estremità della fessura coincidente (v. fig. 1), all'istante iniziale $t = t_0$, con l'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y) , limitiamo la nostra attenzione ad una piccola regione V del corpo che contiene il punto O , le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a quelle della fessura, che, in essa, è pensata rettilinea e semi-infinita.

In V , lo stato di sforzo è dominato dalle caratteristiche asintotiche della soluzione singolare dell'analogo problema elastico. Infatti, essendo la variazione dei carichi quasi statica, l'influenza della temperatura sulle deformazioni e sulle tensioni è trascurabile. Inoltre, se le deformazioni plastiche sono localizzate all'interno di una regione S , contenuta in V e piccola rispetto ad essa, la soluzione del problema elastoplastico dipende dal fattore di concentrazione degli sforzi K , definito dal coefficiente della singolarità delle tensioni elastiche in O . Ciò è possibile, poiché il decadimento all'infinito della soluzione elastica coincide con quello della soluzione elastoplastica.

Sotto queste ipotesi, la velocità dell'apice della fessura, \dot{l} , è funzione del solo fattore di concentrazione degli sforzi. Pertanto, volendo determinare una tale relazione, supponiamo che, durante l'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$, la funzione $K = K(t)$ cresca da K_{\min} a K_{\max} in modo monotono e quasi statico e che l'apice della fessura avanzi nella direzione positiva dell'asse x . Si può così ritenere, trascurando le plasticizzazioni sui bordi della fessura, che un incremento infinitesimo di K provoca una traslazione della zona plastica insieme ad una sua contemporanea espansione. La legge di conservazione dell'energia, scritta per il processo di evoluzione della regione S , se non teniamo conto del contributo del flusso termico e di quello dell'energia cinetica, impone (ad es. [6]) che la potenza $\dot{\mathcal{E}}$ delle forze agenti sulla frontiera elastoplastica C , di normale esterna $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$, sia uguale alla velocità di variazione dell'energia intrinseca U della regione S più la potenza di frattura \dot{I} :

$$(1) \quad \dot{\mathcal{E}} = \frac{d}{dt} U + \dot{I}.$$

Ponendo

$$\dot{\mathcal{E}} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, ds, \quad U = \iint_S \rho E \, dS, \quad \dot{I} = 2\gamma^* \dot{l},$$

si ha

$$(2) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, ds = \frac{d}{dt} \iint_S \rho E \, dS + 2\gamma^* \dot{l},$$

dove $\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ è il vettore tensione agente su C , \mathbf{T} è il tensore degli sforzi, $\dot{\mathbf{u}}$ è la velocità dei punti della frontiera elastoplastica, ρ è la densità di massa, E quella dell'energia interna e γ^* è una costante propria del materiale, il cui significato è quello di energia di superficie spesa nell'incremento unitario di lunghezza della fessura (ad es. [11], [12, pp. 551-590]). Il verso di percorrenza del contorno C è preso antiorario.

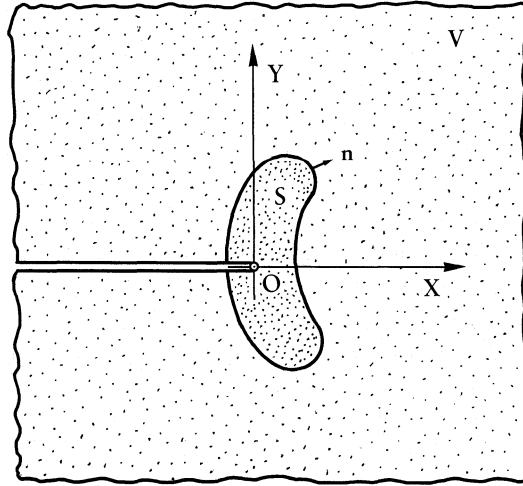


Fig. 2.

Indicato con $\boldsymbol{\varepsilon}$ il tensore di deformazione, postulando l'esistenza di una funzione $W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}$ tale che $\rho \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$, nel caso di deformazioni infinitesime e, dopo aver applicato il teorema del trasporto al primo termine del secondo membro della (2), otteniamo

$$(3) \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} ds = \oint_C W(\boldsymbol{\varepsilon})(\dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{n}) ds + 2\gamma^* \dot{l}.$$

Nella (3) $\dot{\mathbf{u}}_0 \equiv (-\dot{l} + u_{0k} \dot{K}, v_{0k} \dot{K})$, mentre u_{0k} e v_{0k} sono le componenti del vettore \mathbf{u}_{0k} , definito su C , da cui dipende la sola espansione della frontiera elastoplastica.

Dalla (3) si ricava una relazione di controllo della velocità di accrescimento della fessura. Infatti, poichè, al tempo $t > t_0$, lo stato del sistema dipende sia della distanza, $l(t)$, dell'apice della fessura da O , sia dal fattore di concentrazione degli sforzi, $K(t)$, abbiamo

$$(4) \quad \left\{ 2\gamma^* - \oint_C \left[W(\boldsymbol{\varepsilon}) n_x - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right] ds \right\} \dot{l} = \dot{K} \oint_C \left[\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial K} - W(\boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{u}_{0k} \cdot \mathbf{n}) \right] ds,$$

dalla quale, per l'ipotesi di caricamento monotono, secondo cui le relazioni $l = l(t)$ e $K = K(t)$ sono biunivoche ed esprimibili nella forma $l = l(K)$, segue

$$(5) \quad \frac{dl}{dK} = \frac{\oint_C \left[\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial K} - W(\boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{u}_{0k} \cdot \mathbf{n}) \right] ds}{2\gamma^* - \oint_C \left[W(\boldsymbol{\varepsilon}) n_x - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right] ds}.$$

Il secondo membro della precedente equazione differenziale è funzione solo del fattore di concentrazione degli sforzi.

ANALISI QUALITATIVA DELL'AVANZAMENTO DI UNA FESSURA PER FATICA

Per individuare alcune proprietà qualitative della propagazione monotona dell'apice di una fessura, supponiamo che il corpo, in deformazione piana, sia soggetto ad una tensione fondamentale di trazione diretta ortogonalmente all'asse x e che il materiale segua il criterio di plasticità di Tresca-S.Venant. Ricordando che, all'esterno di S , la soluzione elastica singolare è una buona approssimazione di quella esatta limitata [13], la frontiera elastoplastica C , in un sistema di coordinate polari (r, θ) di polo O , ha espressione [14, p. 106]

$$(6) \quad r_p(\theta, K) = \frac{K^2}{\sigma_0^2} \bar{f}(\theta) = \frac{K^2}{\sigma_0^2} (2\pi)^{-1} \cos^2(\theta/2) [1 - 2\nu + \sin(\theta/2)]^2.$$

Le componenti della tensione, dello spostamento e la funzione $W(\varepsilon)$, scritte su C , sono

$$\sigma_{xx}(r_p, \theta) = \sigma_0 \bar{\sigma}_{xx}(\theta) = \sigma_0 [2\pi \bar{f}(\theta)]^{-1/2} \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)],$$

$$\sigma_{yy}(r_p, \theta) = \sigma_0 \bar{\sigma}_{yy}(\theta) = \sigma_0 [2\pi \bar{f}(\theta)]^{-1/2} \cos(\theta/2) [1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)],$$

$$\sigma_{xy}(r_p, \theta) = \sigma_0 \bar{\sigma}_{xy}(\theta) = \sigma_0 [2\pi \bar{f}(\theta)]^{-1/2} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2),$$

$$\sigma_{zz}(r_p, \theta) = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad \sigma_{xz}(r_p, \theta) = \sigma_{yz}(r_p, \theta) = 0,$$

$$u(r_p, \theta) = (K^2/G\sigma_0) \bar{u}(\theta) = (K^2/2G\sigma_0) [\bar{f}(\theta)/2\pi]^{1/2} \cos(\theta/2) [1 - 2\nu + \sin^2(\theta/2)],$$

$$v(r_p, \theta) = (K^2/G\sigma_0) \bar{v}(\theta) = (K^2/2G\sigma_0) [\bar{f}(\theta)/2\pi]^{1/2} \cos(\theta/2) [2 - 2\nu - \cos^2(\theta/2)],$$

$$W[\varepsilon(r_p, \theta)] = (\sigma_0^2/4G) \bar{W}(\theta) = (\sigma_0^2/4G) \{[\bar{\sigma}_{xx}^2(\theta) + \bar{\sigma}_{yy}^2(\theta)](1 - \nu) - 2\nu \bar{\sigma}_{xx}(\theta) \bar{\sigma}_{yy}(\theta) + 2\bar{\sigma}_{xy}^2(\theta)\},$$

dove G è il modulo di elasticità tangenziale e ν è il coefficiente di Poisson. Sostituendo le precedenti espressioni nella (5) ed osservando che le componenti del vettore u_{0k} sono proporzionali a $\partial r_p(\theta, K)/\partial K$, segue

$$\oint_C \left[\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial K} - W(\varepsilon)(u_{0k} \cdot \mathbf{n}) \right] ds \propto K^3, \quad \oint_C \left[W(\varepsilon) \mathbf{n}_x - \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right] ds \propto K^2.$$

La forma del contorno C influenza solo le costanti di proporzionalità, ma non altera la dipendenza analitica dell'accrescimento della fessura da K , che, invece, dipende solo dal tipo di singolarità della soluzione elastica nell'origine.

L'equazione (5) diviene

$$(7) \quad \frac{dl}{dK} = \frac{\beta_1 K^3}{2\gamma^* - \beta_2 K^2},$$

con β_1 e β_2 costanti di proporzionalità che dipendono dalle proprietà costitutive del

corpo. Se $\beta_2 \neq 0$, ponendo $K_c^2 = 2\gamma^* / \beta_2$, $\beta_3 = \beta_1 / \beta_2$ si ricava

$$(8) \quad \frac{dl}{dK} = \beta_3 \frac{K^3}{K_c^2 - K^2},$$

in accordo con i risultati ottenuti per altra via da Cherepanov e Halmanov [9]. K_c è una costante del materiale.

Se K cresce da K_{\min} a K_{\max} , l'aumento di lunghezza della fessura è

$$(9) \quad \Delta l = -\beta \left[\frac{K_{\max}^2 - K_{\min}^2}{K_c^2} + \ln \left(\frac{K_c^2 - K_{\max}^2}{K_c^2 - K_{\min}^2} \right) \right],$$

dove $\beta = \beta_3 K_c^2 / 2$. Quando $K_c \gg K_{\max}$ o $\beta_2 = 0$, l'espressione precedente assume la forma più semplice

$$(10) \quad \Delta l = c(K_{\max}^4 - K_{\min}^4),$$

con $c = \beta_1 / 8\gamma^* \propto (\sigma_0^2 G \gamma^*)^{-1}$.

L'equazione differenziale (5) è stata ottenuta nell'ipotesi di incremento monotono del fattore di concentrazione degli sforzi. In un processo ciclico, invece, l'ipotesi fatta sulla crescita di K non è più valida e la storia di carico influenza l'evoluzione della zona plastica. Comunque, se si accettano alcune semplificazioni, la (5) vale ancora in ogni singola fase di variazione monotona di K , ad esempio: durante un ciclo, quando il fattore di concentrazione degli sforzi cresce da K_{\min} a K_{\max} . Infatti, se supponiamo che le proprietà costitutive del mezzo non dipendano dalla storia di carico, che l'influenza della plasticizzazione presente sui bordi della fessura sia trascurabile e che la fessura stessa non si chiuda in corrispondenza di K_{\min} , si può ritenere che l'apice avanzi durante tutta la fase di incremento monotono di K . In questa situazione, la storia di carico pesa solo sulla dimensione della zona plastica residua dopo lo scarico completo. È facile provare [15, pp. 282-284] che, mantenendo costanti i limiti di variazione del fattore di concentrazione degli sforzi, la dimensione della zona plastica residua dipende solo dall'ampiezza dell'intervallo di carico, $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$. Pertanto, in una variazione ciclica di K , dove non vi sia chiusura della fessura, la zona plastica residua, presente a scarico avvenuto, ha sempre la stessa estensione. Questo significa che, in prima approssimazione, durante ogni fase di crescita monotona di K , al di là della frontiera elastoplastica non c'è memoria significativa dei cicli passati. Il fattore di proporzionalità dell'equazione (8) diviene, apparentemente, una costante del materiale.

Per estendere il risultato dell'espressione (5) al caso della fatica basta osservare che l'equazione (10) rappresenta l'incremento di lunghezza della fessura al ciclo di carico ennesimo. Se consideriamo N come una variabile continua, la velocità di avanzamento è dl/dN , e, se poniamo $K_{\min} = 0$, la (10) diviene

$$(11) \quad \frac{dl}{dN} = cK_{\max}^4,$$

in accordo con l'espressione proposta da Paris ed Erdogan [1].

UNA VALUTAZIONE ESPLICITA DELLA VELOCITÀ DI AVANZAMENTO
DELLA FESSURA PER FATICA

Per determinare esplicitamente la velocità di propagazione di una fessura per fatica, nell'ipotesi che il corpo, soggetto a tensione fondamentale di trazione, si trovi in uno stato di deformazione piana, supponiamo che la zona plastica, collocata in corrispondenza dell'apice della fessura, sia costituita da due segmenti sedi di plasticizzazioni localizzate (ad es. [15, p. 277], [16], [17, p. 149]).

Nel sistema di riferimento O, x, y di fig. 3, la fessura è rappresentata dalla semiretta $y = 0, -\infty < x < 0$, mentre la regione plastica è individuata dai due segmenti $y = \pm x, 0 < x < b/\sqrt{2}$, di lunghezza incognita b , lungo i quali la componente tangenziale del vettore tensione, secondo il criterio di Tresca-S. Venant, è quella limite del materiale: $\tau_0 = \sigma_0/2$.

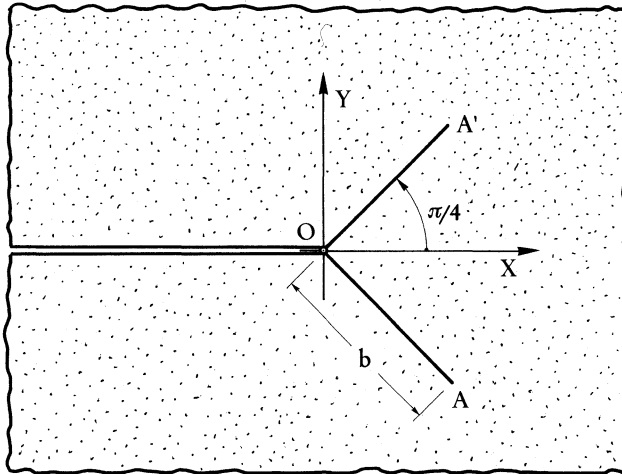


Fig. 3.

Con queste posizioni, il problema con dati al contorno può essere formulato completamente nell'ambito dell'elasticità lineare. Infatti, all'interno del corpo deve essere soddisfatta l'equazione $\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$, mentre le relazioni

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, & & y = 0, & & -\infty < x < 0; \\ \llbracket \sigma_{nn} \rrbracket = 0, & & y = \pm x, & & 0 < x < b/\sqrt{2}; \\ \sigma_{nt} = \tau_0, & & y = \pm x, & & 0 < x < b/\sqrt{2}; \\ \llbracket \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{n} \rrbracket = 0, & & y = \pm x, & & 0 < x < b\sqrt{2}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{2\pi x} \sigma_{yy}] = K, & & y = 0; \end{aligned}$$

valgono sul suo contorno. $\llbracket \cdot \rrbracket$ indicano, come è usuale, le discontinuità, mentre σ_{nn}, σ_{nt} sono, rispettivamente, la tensione normale e quella tangenziale sulle linee di scorrimento.

Utilizzando la rappresentazione di Kolosov Muskhelishvili dello stato di tensione e

di spostamento in termini dei potenziali complessi $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, funzioni della variabile $z = x + iy$, possiamo scrivere

$$(12) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \\ 2G(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \end{aligned}$$

Le funzioni $\overline{\varphi(z)} = \overline{\varphi(\bar{z})}$, $\overline{\psi(z)} = \overline{\psi(\bar{z})}$ sono le coniugate dei potenziali $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, mentre $\bar{z} = x - iy$, e $\kappa = 3 - 4\nu$. Le condizioni al contorno, scritte in forma complessa, divengono

$$(13) \quad \begin{aligned} \sigma_{yy} + i\sigma_{xy} &= 0, & y &= 0, & -\infty < x < 0; \\ \llbracket \sigma_{nn} + i\sigma_{nt} \rrbracket &= 0, & y &= \pm x, & 0 < x < b/\sqrt{2}; \\ 2G\llbracket u + iv \rrbracket &= f(z), & y &= \pm x, & 0 < x < b/\sqrt{2}; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sigma_{yy} \sqrt{2\pi x}] &= K, & y &= 0. \end{aligned}$$

Inoltre, poiché in un sistema di coordinate polari (r, θ) di polo O si ha $\llbracket u + iv \rrbracket = e^{i\theta} \llbracket u_r + iu_\theta \rrbracket = e^{i\theta} \chi(r)$, otteniamo

$$(14) \quad \begin{aligned} \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) &= 0, & y &= 0, & -\infty < x < 0; \\ \llbracket \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \rrbracket &= 0, & y &= \pm x, & 0 < x < b/\sqrt{2}; \\ \llbracket \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \rrbracket &= 2Ge^{\pm i\pi/4} \chi(r), & y &= \pm x, & 0 < x < b/\sqrt{2}; \\ \lim_{z \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi z} \varphi'(z)] &= \frac{K}{2}; \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \{\sqrt{2\pi z} [z\varphi''(z) + \psi'(z)]\} &= 0. \end{aligned}$$

La seconda delle equazioni precedenti è l'equivalente della condizione (13.2), avendone fatto l'integrale rispetto alla variabile z .

Le relazioni (14) possono essere agevolmente manipolate per ottenerne altre più semplici. Infatti, sommando la (14.2) alla (14.3), sostituendo il risultato ottenuto ancora nell'equazione (14.2), derivando rispetto alla variabile $z = re^{\pm i\pi/4}$ e ponendo $\Omega(z) = z\varphi''(z) + \psi'(z)$, si ha

$$\llbracket \varphi'(z) \rrbracket = [2G/(\kappa + 1)] \chi'(r), \quad \llbracket \Omega(z) \rrbracket = [2G/(\kappa + 1)] [(1 \pm i)r\chi''(r) \pm 2i\chi'(r)].$$

Se osserviamo che le funzioni $\varphi'(z)$, $\Omega(z)$ sono sezionalmente olomorfe e se la funzione $\chi(r)$ è presa nella forma

$$(15) \quad \chi(r) = A(b - r)^2,$$

i potenziali complessi possono essere ricavati utilizzando le formule di Plemelj-Privalov [18, p. 429]. Inoltre, poiché, per l'assenza di carichi concentrati in A ed A' e per la monodromia degli spostamenti, valgono le relazioni $\llbracket \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \rrbracket_{\gamma_1} = 0$, $\llbracket \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \rrbracket_{\gamma_2} = 0$, dove γ_1 e γ_2 sono due circuiti di integrazione presi

intorno a $z = be^{\pm i\pi/4}$, si ricava

$$(16) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{[\Phi(t)]}{t-z} dt + \bar{\Phi}_0(z), \quad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{[\Omega(t)]}{t-z} dt + \Omega_0(z),$$

in cui $\Phi(z) = \varphi'(z)$, L è la linea AOA' di fig. 3, mentre $\bar{\Phi}_0(z)$ e $\Omega_0(z)$ sono funzioni olomorfe da determinarsi per soddisfare le rimanenti condizioni al contorno ed all'infinito.

Sostituendo le espressioni (16.1) e (16.2) nella (14.1), si ottiene la condizione

$$(17) \quad \bar{\Phi}_0(z) + \overline{\bar{\Phi}_0(z)} + \Omega_0(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{[\Phi(t)]}{t-x} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{[\Omega(t)]}{t-x} dt = F(x),$$

che permette di determinare $\bar{\Phi}_0(z)$ e $\Omega_0(z)$ nella classe delle funzioni limitate. La ricerca della soluzione dell'equazione funzionale precedente è equivalente a quella del problema di Riemann-Hilbert:

$$(18) \quad \begin{aligned} & [\bar{\Phi}_0(z) + \overline{\bar{\Phi}_0(z)} + \Omega_0(z)]^+ + [\bar{\Phi}_0(z) + \overline{\bar{\Phi}_0(z)} + \Omega_0(z)]^- = 2F(x), \\ & [\bar{\Phi}_0(z) - \overline{\bar{\Phi}_0(z)} + \Omega_0(z)] = 0. \end{aligned}$$

Dalle equazioni (18.2), (14.4) e (14.5) segue che $\Re[\Omega_0(z)] = 0$. Inoltre, essendo $F(x)$ limitata e, per la (15) e la (17) solo reale, risulta anche $\Im[\Omega_0(z)] = 0$. Si ha così: $\bar{\Phi}_0(z) = \overline{\bar{\Phi}_0(z)}$, $\Omega_0(z) = 0$,

$$(19) \quad \bar{\Phi}_0(z) = \frac{\sqrt{z}}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{F(x)}{\sqrt{x}(x-z)} dx,$$

e, per l'assenza di poli della funzione $\bar{\Phi}_0(z)$, la seguente condizione di compatibilità

$$(20) \quad -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{F(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{K}{\sqrt{2\pi}},$$

che lega tra loro le costanti A e b dell'equazione (15). Infatti, sostituendo la (17) nella (20) ed osservando che

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-t)} = \frac{-\pi i}{\sqrt{t}},$$

risulta

$$(21) \quad Ab^{3/2} = \frac{K\pi(1+\kappa)}{8\sqrt{2\pi}G[\sin(\pi/8) + \cos(\pi/8)]}.$$

Operando in modo analogo, il secondo membro della (19) diviene

$$\frac{\sqrt{z}}{4\pi^2} \int_L [2\bar{\Phi} + \Omega] dt \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-z)(t-x)},$$

da cui (Gradshteyn e Ryzhik [19, p. 300, n° 3.264.2]) si ottiene

$$(22) \quad \Phi(z) = \frac{\sqrt{z}}{4\pi i} \int_L \frac{[2\Phi + \Omega]}{\sqrt{t(t-z)}} dt - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{[\Omega]}{(t-z)} dt, \quad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{[\Omega]}{(t-z)} dt.$$

Sostituendo la (15) nelle (22), le espressioni esplicite dei potenziali complessi sono

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{\pi(1+\kappa)}{2AG} \Phi(z) &= i \left(b - z \cos \frac{\pi}{4} \right) \ln \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} - \\ &- z \sin \frac{\pi}{4} \ln \frac{(z - \bar{z}_0)(z - z_0)}{z^2} - 2i \left(b - 3z \cos \frac{\pi}{4} \right) \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{\bar{z}_0}}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} + \\ &+ 2b \ln \frac{(\sqrt{z} + \sqrt{\bar{z}_0})(\sqrt{z} + \sqrt{z_0})}{z} + 6\sqrt{b}\sqrt{z} - 3b, \\ \frac{-\pi(1+\kappa)}{4AG} \Omega(z) &= \left(b - z \cos \frac{\pi}{4} \right) \ln \frac{(z - \bar{z}_0)(z - z_0)}{z^2} + i\sqrt{2}z \ln \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} - 3b. \end{aligned}$$

Si osserva che l'aver imposto *a priori* il dato sullo spostamento, tramite l'equazione (15), non ci permette di ottenere una tensione tangenziale sulla linea di scorrimento uguale a quella limite del materiale. Comunque, seguendo il metodo approssimato di Annin e Cherepanov [17, p. 155], si può ritenere che la relazione

$$(24) \quad \int_0^b \sigma_{r\theta} dr = \tau_0 b,$$

sia sufficientemente accurata per i nostri scopi. Pertanto, essendo

$$\sigma_{r\theta} = \Im \{ e^{\pm i\pi/2} [(\bar{z} - z)\Phi'(z) + \Omega(z)] \},$$

dalle (23) e (24) risulta $GA b = 0,133 \pi(1+\kappa) \tau_0$, da cui $A \approx [0,066 \pi^2(1+\kappa)/G] \sigma_0^3/K^2$, $b \approx K^2/\sigma_0^2 \pi$.

Utilizzando le espressioni precedenti di A e b , si determina esplicitamente la velocità di avanzamento della fessura per fatica. Infatti, sviluppando i semplici calcoli, l'equazione (11) diviene $dl/dN = 0,0035 [(1+\kappa)/G\sigma_0^2\gamma^*] K_{\max}^4$.

CONCLUSIONI

La velocità di avanzamento di una fessura, durante un incremento monotono di carico, è determinata completamente dalla soluzione statica del problema al contorno formulato per un corpo elastoplastico indefinito con una fessura semiinfinita e soggetto a tensione fondamentale. L'avanzamento ciclico, sotto opportune ipotesi, può essere considerato come il risultato di un effetto che si sviluppa durante ogni singola fase di crescita monotona del fattore di concentrazione degli sforzi. La dipendenza della velocità di accrescimento della lunghezza della fessura per fatica dalla quarta potenza di K è una proprietà di tutti i materiali duttili, la cui risposta elastica sia lineare. Ciò mostra che la microstruttura del materiale entra in gioco solo nei parametri macroscopici che ne descrivono la risposta meccanica. Infine, l'ordine di grandezza della costante di proporzionalità della legge di Paris è $(\sigma_0^2 G \gamma^*)^{-1}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. C. PARIS - F. ERDOGAN, *A critical analysis of crack propagation laws*. Journ. Basic. Eng., Trans. ASME, vol. 85, 1963, 528-534.
- [2] H. H. JOHNSON - P. C. PARIS, *Sub-critical flaw growth*. Eng. Fract. Mech., vol. 1, 1968, 3-45.
- [3] J. R. RICE, *A note on models of fatigue crack growth*. Lehigh Univ. Inst. Res. Rep., 1964.
- [4] T. YOKOBORI - A. KAMEI, *A criterion for low-stress brittle fracture of materials with crack or sharp notch based on combined micro-and-macro fracture mechanics*. Eng. Fract. Mech., vol. 5, 1973, 819-836.
- [5] G. P. CHEREPANOV, *On quasi brittle fracture*. PMM, vol. 32, 1968, 1050-1058.
- [6] G. P. CHEREPANOV, *Cracks in solids*. Int. Journ. Solids Struct., vol. 4, 1968, 811-831.
- [7] M. P. WNUK, *Slow growth of cracks in a rate sensitive Tresca solid*. Eng. Fract. Mech., vol. 5, 1973, 605-625.
- [8] E. W. HART, *A theory for stable crack extension rates in ductile materials*. Int. Journ. Solids Struct., vol. 16, 1980, 807-823.
- [9] G. P. CHEREPANOV - H. HALMANOV, *On the theory of fatigue crack growth*. Eng. Fract. Mech., vol. 4, 1972, 219-230.
- [10] Y. IZUMI *et al.*, *Energy considerations in fatigue crack propagation*. Int. Journ. Fract., vol. 17, 1981, 15-25.
- [11] A. A. GRIFFITH, *The phenomena of rupture and flow in solids*. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., fasc. 221, 1921, 163-198.
- [12] G. R. IRWIN, *Fracture*. In: *Handbuch der Physik*. Vol. VI, Springer-Verlag, Berlin 1958, 551-590.
- [13] G. R. IRWIN, *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*. Journ. Appl. Mech., Trans. ASME, vol. 24, 1957, 361-364.
- [14] A. P. PARKER, *The Mechanics of Fracture and Fatigue*. Spon, London 1981.
- [15] J. R. RICE, *Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue*. ASTM STP 415, 1967, 247-309.
- [16] G. P. CHEREPANOV, *Plastic rupture lines at the tip of a crack*. PMM, vol. 40, 1976, 666-674.
- [17] B. D. ANNIN - G. P. CHEREPANOV, *Elastic-Plastic Problems*. ASME PRESS, New York 1988.
- [18] N. I. MUSKHELISHVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff, Groningen 1953.
- [19] I. S. GRADSHTEYN - I. M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York 1965.

Istituto di Scienza delle Costruzioni
Università degli Studi di Pisa
Via Diotisalvi, 2 - 56100 PISA