Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Flavia Lanzara

Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema misto e i problemi di trasmissione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **4** (1993), n.2, p. 87–98.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1993_9_4_2_87_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1993.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 4:87-98 (1993)

Matematica. — *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema misto e i problemi di trasmissione.* Nota IV di FLAVIA LANZARA, presentata (*) dal Socio G. Fichera.

ABSTRACT. — *Theory and applications of intermediate operators: elastostatics with discontinuous coefficients, the mixed problem and the transmission problems.* The theory of *Note* I is applied to the boundary value problem of Elastostatics when mixed conditions are given on the boundary. The elastic coefficients are only supposed to be bounded and measurable. A detailed analysis is carried out for determining the base operator. It is shown how to apply the theory developed in the previous *Notes* to the transmission problems for an elastic body which is formed by two or more different anisotropic and heterogeneous elastic bodies, one being clamped onto the other.

KEY WORDS: Elastostatics with discontinuous coefficients; Green's operator; Green's matrix.

RIASSUNTO. — Viene applicata la teoria della *Nota* I al problema al contorno dell'elastostatica quando sul contorno vengono prescritte condizioni miste. I coefficienti elastici sono supposti solo limitati e misurabili. Viene fatta un'analisi dettagliata per determinare l'operatore base. Si fa inoltre vedere come i problemi di trasmissione, relativi a due o più solidi elastici non isotropi e non omogenei incastrati l'uno nell'altro, rientrano nella teoria sviluppata nelle *Note* precedenti.

In questa *Nota* vengono applicati i metodi sviluppati nella *Nota* I (1) al problema al contorno dell'elastostatica corrispondente al *problema misto*: assegnate le forze di massa e le forze superficiali su una parte del contorno, il corpo è vincolato lungo la restante parte. Supporremo, per semplicità, che le forze superficiali assegnate su una parte del contorno siano nulle. Faremo vedere che, in virtù delle ipotesi assai generali assunte sui coefficienti elastici, nei problemi fino ad ora considerati (2) rientrano i cosiddetti *problemi di trasmissione*.

Le numerazioni delle sezioni e della bibliografia proseguono quelle delle *Note* precedenti.

13. Metodo elementare per la costruzione di un operatore base per il problema misto

Sia A un campo limitato dello spazio cartesiano r-dimensionale, che assumiamo come la configurazione naturale di un corpo elastico. Sia $\partial_h A \subset \partial A$ ($h = 1, 2$), $\partial_1 A \cap \cap\, \partial_2 A = \emptyset$, $\partial A = \overline{\partial_1 A} \cup \overline{\partial_2 A}$. Supponiamo che il corpo elastico A sia fisso lungo $\partial_1 A$ e

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1992.

(1) *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: risultati generali*. Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, vol. 3, 1992, 79-101.

(2) *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema degli spostamenti*. Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, vol. 3, 1992, 149-171.

Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema delle tensioni. Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, vol. 4, 1993, 3-27.

sia libero da ogni vincolo lungo $\partial_2 A$. Sia $F \equiv (F_1, \ldots, F_r) \in L^2(A)$ la funzione vettoriale che determina la forza di massa che agisce su A. Si denoti con $V(A) = \{U \in H_1(A),\ U(x) = 0,\ x \in \partial_1 A\}$ la varietà lineare costituita dagli spostamenti ammissibili di A.

Le equazioni dell'equilibrio (9.3) del corpo elastico A, nell'incognita $U \in V(A)$, sono date da

$$B(U, V) = \int_A F_i(x)\, V_i(x)\, dx, \qquad \forall V \in V(A) \tag{13.1}$$

avendo indicato $B(U, V) = \int_A a_{ihjk}(x)\, U_{i/h}\, V_{j/k}\, dx$. $a_{ihjk}(x)$ sono i coefficienti elastici di A, limitati e misurabili, che soddisfano le proprietà di simmetria (9.1) e l'ipotesi di positività uniforme (9.2).

Esiste ed è unica la soluzione $U \in V(\mathrm{A})$ del problema (13.1). Si può ripetere esattamente ciò che è stato detto per dimostrare l'esistenza della soluzione del problema (10.1) (cfr. sez. 10) dato che la seconda diseguaglianza di Korn seguita a valere nella varietà $V(A) \subset H_1(A)$. L'unicità segue dal fatto che l'equazione $B(U, V) = 0$ non ammette autosoluzioni in $V(A)$.

13.1. *È possibile determinare una costante* p_2, *che dipende da* A, *tale che*

$$B(U, U) \geqslant p_2 \int_A U_{i/h}\, U_{i/h}\, dx, \qquad \forall U \in V(A). \tag{13.2}$$

(Cfr. Teorema 10.1). Risulta $p_2 = p_0 c_3/(1 + p_0 \tilde{\lambda}^{-1})$ dove c_3 è la costante, che dipende da A, che interviene nella diseguaglianza (10.3), p_0 quella che interviene in (9.2) e $\tilde{\lambda}$ è tale che $0 < \tilde{\lambda} \leqslant \lambda_1$ dove λ_1 è il più piccolo autovalore, certamente positivo, del problema $B(U, V) = \lambda \int_A U_i(x)\, V_i(x)\, dx$, $U, \forall V \in V(A)$.

Supponiamo che *esista un omeomorfismo* $\xi = \xi(x)$ *bi-lipschitziano che trasforma la chiusura* $\overline{A}$ *di* A *nella chiusura* $\overline{D^+}$ *del campo semisferico* $D^+ = \{\xi \in \boldsymbol{R}^r\colon |\xi| < 1, \xi_r > 0\}$ in modo tale che la parte di frontiera $\partial_2 A$ sia trasformata nel campo $(r-1)$-dimensionale Ω dello spazio $\xi_r = 0$ definito da $\xi_1^2 + \ldots + \xi_r^2 < 1$. Quindi l'immagine Λ di $\partial_1 A$ è definita da $|\xi| = 1$, $\xi_r > 0$. La varietà lineare $V(A)$ si trasforma nella varietà lineare $V(D^+) = \{u \in H_1(D^+)\colon u(\xi) = 0,\ \xi \in \partial_1 D^+\}$.

Il problema (13.1) si trasforma nel problema equivalente, nell'incognita $u \in V(D^+)$:

$$\mathcal{B}(u, v) = \int_{D^+} f_i(\xi)\, v_i(\xi)\, d\xi, \qquad \forall v \in V(D^+), \tag{13.3}$$

avendo definito la forma $\mathcal{B}(u, v)$ e la funzione $f \in L^2(D^+)$ analogamente a come è stato fatto nella sezione 9. Sia $u = Gf$ la soluzione. G è un PCO dello spazio $L^2(D^+)$.

Per (13.2) e ripetendo dimostrazione analoghe a quelle dei Lemmi 9.1 e 10.2 si prova che

13.2. *Esiste una costante positiva* $\tilde{q}_0$, *che dipende da* D^+, *tale che*

$$\mathcal{B}(u, u) \geq \tilde{q}_0 \int_{D^+} u_{i/h}(\xi)\, u_{i/h}(\xi)\, d\xi, \qquad \forall u \in V(D^+).$$

Posto

$$((u, v)) = \int_{D^+} u_{i/h}(\xi)\, v_{i/h}(\xi)\, d\xi, \qquad \forall u, v \in H_1(D^+), \tag{13.4}$$

consideriamo il problema della determinazione di $u \in V(D^+)$ tale che

$$((u, v)) = \int_{D^+} f_i(\xi)\, v_i(\xi)\, d\xi, \qquad \forall v \in V(D^+), \tag{13.5}$$

data $f \in L^2(D^+)$. Sia $u = Mf$ la soluzione.

Se $D = \{\xi \in \boldsymbol{R}^r : |\xi| < 1\}$ denota il campo sferico unitario di $\boldsymbol{R}^r$, si consideri la funzione $\Phi \in L^2(D)$ così definita:

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_r) \begin{cases} = f(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_r), & \xi_r > 0, \\ = f(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, -\xi_r), & \xi_r \leq 0. \end{cases}$$

È nota la soluzione del seguente problema: determinare $\mathcal{U} \in \overset{\circ}{H}_1(D)$ tale che

$$-\Delta_2 \mathcal{U} = \Phi \qquad \text{in } D. \tag{13.6}$$

Risulta $\mathcal{U}(\xi) = \int_D \gamma(\xi, \eta)\, \Phi(\eta)\, d\eta$, $\xi \in D$, dove $\gamma(\xi, \eta) = \{\delta_{hk} \Gamma(\xi, \eta)\}$ $(h, k = 1, \ldots, r)$ e $\Gamma(\xi, \eta)$ è la funzione scalare di Green, definita nella sezione 9, del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel campo sferico unitario D. Posto $\bar{\eta} = \{\eta_1, \ldots, \eta_{r-1}, -\eta_r\}$ la soluzione $\mathcal{U}$ di (13.6) si riscrive nel modo seguente: $\mathcal{U}(\xi) = \int_{D^+} [\gamma(\xi, \eta) + \gamma(\xi, \bar{\eta})] f(\eta)\, d\eta$, $\xi \in D$, ed è facile verificare che

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0 \qquad \text{su } \Omega. \tag{13.7}$$

Quindi la funzione

$$u(\xi) = Mf = \int_{D^+} [\gamma(\xi, \eta) + \gamma(\xi, \bar{\eta})] f(\eta)\, d\eta = \int_{D^+} M(\xi, \eta) f(\eta)\, d\eta, \qquad \xi \in D^+, \tag{13.8}$$

appartiene a $V(D^+)$ e, per (13.6) e per (13.7), è la soluzione del problema (13.5). M è l'operatore di Green relativo al problema (13.5); $M(\xi, \eta) = \{M_{hk}(\xi, \eta)\}$ è la corrispondente matrice di Green così definita: $M_{hk}(\xi, \eta) = \delta_{hk} [\Gamma(\xi, \eta) + \Gamma(\xi, \bar{\eta})]$ $(h, k = 1, \ldots, r)$. Abbiamo così tutti gli elementi per applicare la teoria esposta nella *Nota* I.

Supponiamo ora che l'omeomorfismo bi-lipschitziano che trasforma il campo $A \subset \boldsymbol{R}^r$ nel campo semisferico D^+ di $\boldsymbol{R}^r$ muti $\partial_1 A$ nel campo $(r-1)$-dimensionale Ω dello spazio $\xi_r = 0$ e muti $\partial_2 A$ in Λ. Anche in questo caso è possibile determinare esplicitamente la soluzione di (13.5). A tal fine si consideri la funzione così definita, per $\xi \in D$:

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_r) \begin{cases} = f(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_r), & \xi_r > 0, \\ = -f(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, -\xi_r), & \xi_r \leqslant 0. \end{cases}$$

Risulta $\Phi \in L^2(D)$ e $\int_D \Phi(\xi)\, d\xi = 0$.

Consideriamo il problema della determinazione di $\mathcal{U} \in H_1(D)$ tale che

$$\begin{cases} -\Delta_2 \mathcal{U} = \Phi & \text{in } D, \\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial D. \end{cases}$$

Risulta $\mathcal{U}(\eta) = \int_D N(\xi, \eta)\, \Phi(\eta)\, d\eta$, $\xi \in D$, dove $N(\xi, \eta) = \{\delta_{hk} \Gamma(\xi, \eta)\}$ $(h, k = 1, \ldots, r)$; $\Gamma(\xi, \eta)$ è ora la funzione scalare di Green, definita in (11.6) e (11.7), del problema di Neumann per l'equazione di Laplace in D. Quindi, dalla definizione di Φ, segue che $\mathcal{U}(\xi) = \int_{D^+} [N(\xi, \eta) - N(\xi, \bar{\eta})] f(\eta)\, d\eta$, $\xi \in D$, e risulta $\mathcal{U}(\xi) = 0$ su $\partial_1 D^+$. Segue, quindi, che la funzione

$$u(\xi) = Mf = \int_{D^+} [N(\xi, \eta) - N(\xi, \bar{\eta})] f(\eta)\, d\eta = \int_{D^+} M(\xi, \eta) f(\eta)\, d\eta, \qquad \xi \in D^+, \tag{13.9}$$

appartiene a $V(D^+)$ ed è la soluzione di (13.5). La matrice di Green $M(\xi, \eta) = \{M_{hk}(\xi, \eta)\}$ ora è così definita: $M_{hk}(\xi, \eta) = \delta_{hk}[\Gamma(\xi, \eta) - \Gamma(\xi, \bar{\eta})]$ $(h, k = 1, \ldots, r)$ e $\Gamma(\xi, \eta)$ è definita in (11.6) e (11.7). In tal modo abbiamo nuovamente la possibilità di applicare la teoria generale della *Nota* I.

14. Costruzione di un operatore base per un campo non omeomorfo ad un campo semisferico

Supponiamo che il campo A verifichi le stesse ipotesi richieste nella sezione 12, cioè che sia $\bar{A} = \bar{A}_1 \cup \ldots \cup \bar{A}_p$, $A_h \cap A_k = \emptyset$ $(h \neq k)$ e $A_h = \bar{A}_h - \partial A_h$ $(h = 1, \ldots, p)$, con A_h campo tale che esiste un omeomorfismo $\xi = \xi^{(h)}(x)$ bi-lipschitziano che trasforma il dominio $\bar{A}_h$ nel dominio sferico $\bar{D} = \{\xi \in \boldsymbol{R}^r \colon |\xi| \leqslant 1\}$ $(h = 1, \ldots, p)$. Consideriamo il caso $p = 2$. Supponiamo che la varietà $\Lambda = A \cap \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$, differenziabile e di classe C^1, sia mutata da entrambi gli omeomorfismi nella medesima $(r-1)$-varietà differenziabile Ω contenuta nella frontiera $\partial D = \{\xi \in \boldsymbol{R}^r \colon |\xi| = 1\}$. Sia $\Lambda_h = \partial_1 A \cap \partial A_h$ (3) una $(r-1)$-varietà differenziabile (in generale non connessa) la quale viene mutata, dall'omeomorfismo $\xi = \xi^{(h)}(x)$, nella $(r-1)$-varietà Ω_h contenuta in ∂D, $(h = 1, 2)$. $V(A)$ denota ora il sottospazio di $H_1(A)$ costituito dalle funzioni (scalari) U tali che $U = 0$ su $\partial_1 A$. Sia $\mathcal{V}(A)$ la varietà lineare ottenuta

(3) Risultando eventualmente $\Lambda_h = \emptyset$, per $h = 1$ oppure per $h = 2$.

introducendo in $V(A)$ il prodotto scalare $((U, V)) = ((U, V))_1 + ((U, V))_2$ definito in (12.5) e (12.3).

Consideriamo il seguente problema: data una funzione a valori reali $F \in L^2(A)$, determinare $U \in V(A)$ tale che

$$((U, V)) = (F, V), \qquad \forall V \in V(A). \tag{14.1}$$

(F, V) denota l'usuale prodotto scalare in $L^2(A)$. Il problema (14.1) ammette una e una sola soluzione $U = NF$. N è un PCO di $L^2(A)$. Se $\{W^h\}$ è un sistema ortonormale e completo nello spazio $\mathcal{V}(A)$ la soluzione U di (14.1) è data da $U = NF = = \sum_{h=1}^{\infty} (F, W^h) W^h$. La convergenza di questa serie è in $\mathcal{V}(A)$ e quindi in $H_1(A)$. Poniamo $N_m F = \sum_{h=1}^{m} (F, W^h) W^h$.

Risulta

$$\|N - N_m\| = \max_{L^2(A)-\{0\}} \frac{(N\Phi - N_m\Phi, \Phi)}{(\Phi, \Phi)} = \max_{L^2(A)-\{0\}} \frac{\sum_{h>m} (\Phi, W^h)^2}{(\Phi, \Phi)} =$$

$$= \max_{\tilde{\mathcal{V}}(A)-\{0\}} \frac{\sum_{h>m} ((U, W^h))^2}{(EU, EU)} = \max_{\tilde{\mathcal{V}}(A)-\{0\}} \frac{((U, U)) - \sum_{h=1}^{m} ((U, W^h))^2}{(EU, EU)},$$

avendo indicato con $\tilde{\mathcal{V}}(A)$ la varietà lineare costituita dalle funzioni $U \in \mathcal{V}(A)$ tali che esiste $EU \in L^2(A)$ in modo che $((U, V)) = (EU, V)$, $\forall V \in \mathcal{V}(A)$. Se $\mathcal{V}_m(A)$ denota il sottospazio di $\mathcal{V}(A)$ definito dalle equazioni $((U, W^h)) = 0$, $h = 1, \ldots, m$, tenendo presente la (12.10), si ottiene che

$$\|N - N_m\| \leq \sup_{\mathcal{V}_m(A)-\{0\}} \frac{((U, U))}{(EU, EU)} \leq \sup_{\mathcal{V}_m(A)-\{0\}} \frac{(U, U)}{((U, U))}.$$

Sia $\{\Psi^h(x)\}$ una successione di funzioni appartenenti a $C^\infty(\boldsymbol{R}^r)$ tali che

$$\int_{\partial_1 A} \Psi^h(x)\, d\Sigma_x = 0 \qquad (h \geq 1) \tag{14.2}$$

e costituenti un sistema completo in $\mathcal{L}(\partial_1 A) = \left\{\Psi \in L^2(\partial_1 A): \int_{\partial_1 A} \Psi(x)\, d\Sigma_x = 0\right\}$. Se $\mathcal{H}_m(A)$ è la varietà lineare costituita dalle funzioni $U \in H_1(A)$ tali che

$$\int_{\partial_1 A} U(x)\, d\Sigma_x = 0; \tag*{$(14.3)_1$}$$

$$\int_{\partial_1 A} \Psi^h(x)\, U(x)\, d\Sigma_x = 0, \qquad (h = 1, \ldots, m); \tag*{$(14.3)_2$}$$

$$((U, W^h)) = 0, \qquad (h = 1, \ldots, m) \tag*{$(14.3)_3$}$$

e munita del prodotto scalare (12.5), risulta

$$\sup_{\mathcal{V}_m(A)-\{0\}} \frac{(U, U)}{((U, U))} \leq \sup_{\mathcal{H}_m(A)-\{0\}} \frac{(U, U)}{((U, U))}.$$

Sia $\mathcal{K}(A)$ lo spazio di Hilbert costituito dai vettori $\{U^1, U^2\} \in H_1(A_1) \times H_1(A_2)$ tali che

$$(14.4)_1 \qquad \int_{\Lambda} U^1 d\Sigma = \int_{\Lambda} U^2 d\Sigma;$$

$$(14.4)_2 \qquad \int_{\Lambda_1} U^1 d\Sigma + \int_{\Lambda_2} U^2 d\Sigma = 0,$$

munito del prodotto scalare (12.11).

Se $\{\Phi^h\}$ è il sistema introdotto nella sezione 12, verificante le (12.17) e costituente un sistema completo in $\mathcal{L}(\Lambda)$, sia $\mathcal{K}_m(A)$ lo spazio dei vettori $\{U^1, U^2\}$ tali che

$$(14.5)_1 \qquad \{U^1, U^2\} \in \mathcal{K}(A);$$

$$(14.5)_2 \qquad \int_{\Lambda_1} \Psi^h U^1 d\Sigma + \int_{\Lambda_2} \Psi^h U^2 d\Sigma = 0, \quad (h = 1, \dots, m);$$

$$(14.5)_3 \qquad \int_{\Lambda} \Phi^h [U^1 - U^2] d\Sigma = 0, \qquad (h = 1, \dots, m);$$

$$(14.5)_4 \qquad ((U^1, W^h))_1 + ((U^2, W^h))_2 = 0, (h = 1, \dots, m).$$

Se $U \in \mathcal{H}_m(A)$, definendo il vettore $\{U^1, U^2\}$ mediante le (12.12), esso appartiene a $\mathcal{K}_m(A)$. Introdotte le seguenti notazioni: $\mathcal{U} = \{U^1, U^2\}$, $\mathcal{V} = \{V^1, V^2\}$, $[\mathcal{U}, \mathcal{V}] = (U^1, V^1)_1 + (U^2, V^2)_2$, $[(\mathcal{U}, \mathcal{V})] = ((U^1, V^1))_1 + ((U^2, V^2))_2$ si ottiene che

$$\sup_{\mathcal{H}_m(A) - \{0\}} \frac{(U, U)}{((U, U))} \leq \sup_{\mathcal{K}_m(A) - \{0\}} \frac{[\mathcal{U}, \mathcal{U}]}{[(\mathcal{U}, \mathcal{U})]}.$$

Come nella sezione 12 sia $\mathcal{K}^0(A)$ lo spazio di Hilbert costituito dai vettori $\{U^1, U^2\} \in H_1(A_1) \times H_1(A_2)$ verificanti le (12.12), munito del prodotto scalare (12.11). Sussiste il seguente Lemma:

14.1. *Il vettore $\mathcal{U} = \{U^1, U^2\}$ appartiene a $\mathcal{K}(A)$ se e solo se esiste un vettore $\mathcal{V} = \{V^1, V^2\}$ appartenente a $\mathcal{K}^0(A)$, univocamente determinato, tale che $\mathcal{U} = \mathcal{V} + \mathcal{C}$, dove $\mathcal{C} = \{C^1, C^2\}$ è un vettore costante così definito:*

$$C^1 = \frac{1}{\operatorname{mis} A_1} \int_{A_1} U^1 dx = \frac{-\operatorname{mis} A_2}{\operatorname{mis} \Lambda \cdot \operatorname{mis} \partial_1 A} \int_{\Lambda} (V^1 - V^2) d\Sigma - \frac{1}{\operatorname{mis} \partial_1 A} \left[\int_{\Lambda_1} V^1 d\Sigma + \int_{\Lambda_2} V^2 d\Sigma \right];$$

$$C^2 = \frac{1}{\operatorname{mis} A_2} \int_{A_2} U^2 dx = \frac{\operatorname{mis} A_1}{\operatorname{mis} \Lambda \cdot \operatorname{mis} \partial_1 A} \int_{\Lambda} (V^1 - V^2) d\Sigma - \frac{1}{\operatorname{mis} \partial_1 A} \left[\int_{\Lambda_1} V^1 d\Sigma + \int_{\Lambda_2} V^2 d\Sigma \right].$$

Se $\mathcal{U} \in \mathcal{K}(A)$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A)$, sia $\mathcal{V} = T\mathcal{U}$ l'isomorfismo lineare stabilito dal Lemma 14.1. Ripetendo dimostrazioni analoghe a quelle dei Teoremi 12.3 e 12.4 si prova che

14.2. *Il funzionale $\dfrac{(U, U)}{((U, U))}$ è dotato di massimo in $\mathcal{H}_m(A) - \{0\}$. Il funzionale $\dfrac{[\mathcal{U}, \mathcal{U}]}{[(\mathcal{U}, \mathcal{U})]}$ è dotato di massimo in $\mathcal{K}_m(A) - \{0\}$.*

Date le funzioni $F \in L^2(A_h)$, $\Phi \in L^2(\Lambda)$ e $\Psi \in L^2(\Lambda_h)$ tali che

$$(14.6)_h \qquad \int_{A_h} F(x)\,dx - \int_{\Lambda} \Phi(x)\,d\Sigma_x - \int_{\Lambda_h} \Psi(x)\,d\Sigma_x = 0$$

è esplicitamente nota la soluzione $U \in H_1(A_h)$, tale che $\int_{A_h} U(x)\,dx = 0$, del problema:

$$(14.7)_h \qquad ((U, V))_h = \int_{A_h} F(x)\,V(x)\,dx - \int_{\Lambda} \Phi(x)\,V(x)\,d\Sigma_x - \int_{\Lambda_h} \Psi(x)\,V(x)\,d\Sigma_x ,$$

$$\forall V \in H_1(A_h), \qquad h = 1, 2 .$$

Risulta, infatti,

$$(14.8)_h \quad U(x) = \int_{A_h} N^h(x, y)\,F(y)\,dy - \int_{\Lambda} N^h(x, y)\,\Phi(y)\,d\Sigma_y - \int_{\Lambda_h} N^h(x, y)\,\Psi(y)\,d\Sigma_y$$

$x \in A_h$, dove la funzione $N^h(x, y)$ è definita nella sezione 12, $h = 1, 2$.

Assumendo $F = 0$ in A_1, $\Psi = -\Psi^h$ su Λ_1 e $\Phi = \dfrac{1}{\operatorname{mis}\Lambda} \displaystyle\int_{\Lambda_1} \Psi^h\,d\Sigma$ su Λ, la $(14.6)_1$ è verificata. La $(14.8)_1$ permette di determinare $W^{1,h} \in H_1(A_1)$ tale che, per $h = 1, \ldots, m$, (4)

$$((W^{1,h}, V^1))_1 = (\Psi^h, V^1)_{\Lambda_1} - \frac{1}{\operatorname{mis}\Lambda} \int_{\Lambda_1} \Psi^h(x)\,d\Sigma_x \cdot \int_{\Lambda} V^1(y)\,d\Sigma_y , \qquad \forall V^1 \in H_1(A_1).$$

Analogamente assumendo $F = 0$ in A_2, $\Psi = -\Psi^h$ su Λ_2 e $\phi = \dfrac{1}{\operatorname{mis}\Lambda} \displaystyle\int_{\Lambda_2} \Psi^h\,d\Sigma$ su Λ, sia $W^{2,h} \in H_1(A_2)$ la soluzione del problema $(14.7)_2$ cioè sia tale che, per $h = 1, \ldots, m$,

$$((W^{2,h}, V^2))_2 = (\Psi^h, V^2)_{\Lambda_2} - \frac{1}{\operatorname{mis}\Lambda} \int_{\Lambda_2} \Psi^h(x)\,d\Sigma_x \cdot \int_{\Lambda} V^2(y)\,d\Sigma_y , \qquad \forall V^2 \in H_1(A_2) .$$

Segue che le condizioni $(14.5)_2$, dovendo valere per ogni $\{U^1, U^2\} \in \mathcal{K}(A)$, tenendo presente la (14.2), possono così riscriversi: $((U^1, W^{1,h}))_1 + ((U^2, W^{2,h}))_2 = 0$, $h = 1, \ldots, m$.

Se $W^{1,h+m} \in H_1(A_1)$ è la soluzione di $(14.7)_1$ assumendo $F = 0$ in A_1, $\Psi = 0$ su Λ_1 e $\Phi = -\Phi^h$ su Λ e $W^{2,h+m} \in H_1(A_2)$ è la soluzione di $(14.7)_2$ assumendo $F = 0$ in A_2, $\Psi = 0$ su Λ_2 e $\Phi = \Phi^h$ su Λ, le condizioni $(14.5)_3$ si riscrivono nel modo seguente:

$$((U^1, W^{1,h+m}))_1 + ((U^2, W^{2,h+m}))_2 = 0, \qquad h = 1, \ldots, m .$$

Posto $W^{1,h+2m} = W^h$ in A_1, $W^{2,h+2m} = W^h$ in A_2 e $\mathcal{W}^h = \{W^{1,h}, W^{2,h}\}$ ($h = 1, \ldots, 3m$) le condizioni $(14.5)_2$, $(14.5)_3$, $(14.5)_4$, che servono per definire $\mathcal{K}_m(A)$, possono così riscriversi: $[(\mathcal{U}, \mathcal{W}^h)] = 0$, $h = 1, \ldots, 3m$.

(4) Risulta $(U, V)_{\Lambda_h} = \int_{\Lambda_h} U(x)\,V(x)\,d\Sigma_x$ $\forall U, V \in L^2(\Lambda_h)$ $h = 1, 2$.

Come nella sezione 12 il calcolo di τ_m si riconduce al calcolo del più grande autovalore del problema

$$(14.9)\qquad [\mathcal{U}, \mathcal{E}] = \mu[(\mathcal{U}, \mathcal{E})], \qquad \mathcal{U} \in \mathcal{K}_m(A), \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{K}_m(A).$$

A noi interessa calcolare per eccesso τ_m. Vedremo come questo può farsi con il metodo degli Invarianti Ortogonali.

Possiamo supporre che i vettori $\mathcal{W}^h = \{W^{1,h}, W^{2,h}\}$, $h = 1, \ldots, 3m$, appartengano allo spazio $\mathcal{K}(A)$ e che sia $[(\mathcal{W}^h, \mathcal{W}^k)] = \delta_{hk}$ $(h, k = 1, \ldots, 3m)$.

Se $\mathcal{U} = \mathcal{V} + \mathcal{C}$, dove $\mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A)$ è univocamente determinato da $\mathcal{U} \in \mathcal{K}(A)$ e $\mathcal{C} = \{C^1, C^2\}$ è il vettore costante determinato dal Lemma 14.1, tenendo conto di (12.30) e procedendo come nella sezione 12, il problema (14.9) si trasforma nel problema equivalente:

$$(14.10)\qquad [(\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{Z})] + [\mathcal{C}, \mathcal{Z}] - \sum_{h=1}^{3m} [(\mathcal{Z}, \mathcal{W}^h)][(\mathcal{N}\mathcal{V}, \mathcal{W}^h)] - \sum_{h=1}^{3m} [(\mathcal{Z}, \mathcal{W}^h)][\mathcal{C}, \mathcal{W}^h] =$$
$$= \mu[(\mathcal{V}, \mathcal{Z})], \qquad \mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A): [(\mathcal{V}, \mathcal{W}^h)] = 0, \quad h = 1, \ldots, 3m, \qquad \forall \mathcal{Z} \in \mathcal{K}(A).$$

Se $\mathcal{S} = T\mathcal{Z}$, posto $\mathcal{A}_1(\mathcal{V}) = \int_\Lambda (V^1 - V^2)\, d\Sigma$ e $\mathcal{A}_2(\mathcal{V}) = \int_{\Lambda_1} V^1 d\Sigma + \int_{\Lambda_2} V^2 d\Sigma$, dal Lemma 14.1 si deduce che

$$[\mathcal{C}, \mathcal{Z}] = [\alpha\mathcal{A}_2(\mathcal{V}) + \beta\mathcal{A}_1(\mathcal{V})] \int_{A_1} Z^1 dx + [\alpha\mathcal{A}_2(\mathcal{V}) + \delta\mathcal{A}_1(\mathcal{V})] \int_{A_2} Z^2 dx =$$
$$= \operatorname{mis} \mathcal{A}_1 [\alpha\mathcal{A}_2(\mathcal{V}) + \beta\mathcal{A}_1(\mathcal{V})] \cdot [\alpha\mathcal{A}_2(\mathcal{S}) + \beta\mathcal{A}_1(\mathcal{S})] +$$
$$+ \operatorname{mis} \mathcal{A}_2 [\alpha\mathcal{A}_2(\mathcal{V}) + \delta\mathcal{A}_1(\mathcal{V})] \cdot [\alpha\mathcal{A}_2(\mathcal{S}) + \delta\mathcal{A}_1(\mathcal{S})],$$

dove $\beta = -\operatorname{mis}\Lambda_2/(\operatorname{mis}\Lambda \cdot \operatorname{mis}\partial_1 A)$, $\delta = \operatorname{mis}\Lambda_1/(\operatorname{mis}\Lambda \cdot \operatorname{mis}\partial_1 A)$ e $\alpha = -1/\operatorname{mis}\partial_1 A$. I funzionali $\mathcal{A}_1(\mathcal{V})$ e $\mathcal{A}_2(\mathcal{V})$ sono lineari e continui in $\mathcal{K}^0(A)$. È possibile quindi determinare due vettori $\Psi = \{\Psi^1, \Psi^2\}$ e $\Phi = \{\Phi^1, \Phi^2\}$ appartenenti a $\mathcal{K}^0(A)$ tali che

$$(14.11)_1 \qquad \mathcal{A}_1(\mathcal{V}) = [(\Psi, \mathcal{V})], \qquad \mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A)$$

$$(14.11)_2 \qquad \mathcal{A}_2(\mathcal{V}) = [(\Phi, \mathcal{V})], \qquad \mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A).$$

Posto $\tilde{\Psi} = (\operatorname{mis} A_1)^{1/2} [\alpha\Phi + \beta\Psi]$ e $\tilde{\Phi} = (\operatorname{mis} A_2)^{1/2} [\alpha\Phi + \delta\Psi]$, i vettori $\tilde{\Psi}$ e $\tilde{\Phi}$ appartengono a $\mathcal{K}^0(A)$ e risulta quindi $[\mathcal{C}, \mathcal{Z}] = [(\tilde{\Psi}, \mathcal{V})][(\tilde{\Psi}, \mathcal{S})] + [(\tilde{\Phi}, \mathcal{V})][(\tilde{\Phi}, \mathcal{S})]$.

Posto $y^h = T\mathcal{W}^h$, $h = 1, \ldots, 3m$, se $\mathcal{P}_m$ è il proiettore ortogonale di $\mathcal{K}^0(A)$ sulla varietà lineare generata da $(y^1, \ldots, y^{3m})$ e $\mathcal{Q}_m \mathcal{V} = \mathcal{V} - \mathcal{P}_m \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A)$, il problema di autovalori (14.10) si può riscrivere nel seguente modo:

$$\mathcal{Q}_m \mathcal{N}\mathcal{V} + [(\tilde{\Psi}, \mathcal{V})]\, \mathcal{Q}_m \tilde{\Psi} + [(\tilde{\Phi}, \mathcal{V})]\, \mathcal{Q}_m \tilde{\Phi} = \mu\mathcal{V}, \qquad \mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A): [(\mathcal{V}, y^h)] = 0, \quad h = 1, \ldots, 3m$$

che, se $\mu \neq 0$, equivale a

$$(14.12)\qquad \mathcal{Q}_m \mathcal{N} \mathcal{Q}_m \mathcal{V} + [(\mathcal{Q}_m \tilde{\Psi}, \mathcal{V})]\, \mathcal{Q}_m \tilde{\Psi} + [(\mathcal{Q}_m \tilde{\Phi}, \mathcal{V})]\, \mathcal{Q}_m \tilde{\Phi} = \mu\mathcal{V}, \qquad \mathcal{V} \in \mathcal{K}^0(A).$$

Seguitando ad usare le notazioni introdotte nella sezione 12, l'equazione (14.12) si trasforma, mediante gli omeomorfismi (12.1), nell'equazione perfettamente equivalente nello spazio $\mathcal{K}^0(D^2)$, costituito dai vettori $u = \{u^1, u^2\}$ tali che $u^h(\xi) = U^h[x^{(h)}(\xi)]$,

$h = 1, 2$, per ogni $\mathcal{U} = \{U^1, U^2\} \in \mathcal{H}^0(A)$, munito del prodotto scalare $((u, v))_D$:

$$(14.13) \qquad Q_m \mathcal{G} Q_m v + ((Q_m \tilde{\psi}, v))_D Q_m \tilde{\psi} + ((Q_m \tilde{\phi}, v))_D Q_m \tilde{\phi} = \mu v, \qquad v \in \mathcal{H}^0(D^2),$$

dove $\tilde{\psi} = (\mathrm{mis} A_1)^{1/2} [\alpha\phi + \beta\psi]$ e $\tilde{\phi} = (\mathrm{mis} A_2)^{1/2} [\alpha\phi + \delta\psi]$; ψ e $\phi \in \mathcal{H}^0(D^2)$ sono i trasformati di Ψ e $\Phi \in \mathcal{H}^0(A)$, definiti da $(14.11)_1$ e $(14.11)_2$, mediante gli omeomorfismi (12.1). La $(14.11)_1$ si trasforma, in D, nella (12.39) dove si è posto $\alpha = 1$. Segue quindi che le (12.41) forniscono il vettore $\psi = \{\psi^1, \psi^2\}$ esplicitamente. Il vettore $\phi = \{\phi^1, \phi^2\} \in \mathcal{H}^0(D^2)$, per $(14.11)_2$, è tale che

$$\int_{\Omega_1} v^1(\xi)\, \tilde{\gamma}^1(\xi)\, d\omega_\xi + \int_{\Omega_2} v^2(\xi)\, \tilde{\gamma}^2(\xi)\, d\omega_\xi = ((v, \psi))_D, \qquad \forall v \in \mathcal{H}^0(D^2).$$

$\tilde{\gamma}^h(\xi)$ denota una ben determinata funzione misurabile e limitata in $\overline{\Omega}_h$, avente un estremo inferiore positivo in $\overline{\Omega}_h$, $h = 1, 2$. Tenendo presente la (12.40) si ottiene per $\phi = \{\phi^1, \phi^2\}$ la seguente espressione:

$$(14.14) \qquad \phi^h(\xi) = \int_{\Omega_h} \Gamma^h(\xi, \eta)\, \tilde{\gamma}^h(\eta)\, d\omega_\eta + \\ + \frac{\mathrm{mis}\, \Lambda_h}{(\mathrm{mis} A_h)^2} \int_D |J^h(\eta)|\, d\eta \int_D \Gamma(\eta, \tau)\, |J^h(\tau)|\, d\tau \qquad h = 1, 2;$$

le funzioni $\Gamma(\xi, \eta)$ e $\Gamma^h(\xi, \eta)$ $(h = 1, 2)$ sono definite nella sezione 12. Da (14.14) e (12.41) si deducono le espressioni esplicite di $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\phi}$.

L'equazione (14.13), considerata in $\mathcal{H}^0(D^2)$, dà luogo alla seguente, considerata nel sottospazio $[\tilde{L}^2(D)]_{2r}$ di $[L^2(D)]_{2r}$, descritto da $\mathrm{grad}\, v$ quando v descrive $\mathcal{H}^0(D^2)$:

$$(14.15) \qquad \mathrm{grad}\, Q_m \mathcal{G} Q_m \mathfrak{I}(\mathrm{grad}\, v) + (\mathrm{grad}\, Q_m \tilde{\psi}, \mathrm{grad}\, v)_{2r}\, \mathrm{grad}\, Q_m \tilde{\psi} + \\ + (\mathrm{grad}\, Q_m \tilde{\phi}, \mathrm{grad}\, v)_{2r}\, \mathrm{grad}\, Q_m \tilde{\phi} = \mu\, \mathrm{grad}\, v, \qquad v \in \mathcal{H}^0(D^2).$$

$\mathfrak{I}$ è l'operatore di $[L^2(D)]_{2r}$ in $[L^2(D)]_2$ definito nella sezione 12.

L'operatore a primo membro di (14.15) è la restrizione a $[\tilde{L}^2(D)]_{2r}$ del seguente operatore $R^{(m)}$, definito in tutto $[L^2(D)]_{2r}$:

$$(14.16) \qquad R^{(m)} \zeta = \mathrm{grad}\, Q_m \mathcal{G} Q_m \mathfrak{I} \zeta + (\mathrm{grad}\, Q_m \tilde{\psi}, \zeta)_{2r}\, \mathrm{grad}\, Q_m \tilde{\psi} + \\ + (\mathrm{grad}\, Q_m \tilde{\phi}, \zeta)_{2r}\, \mathrm{grad}\, Q_m \tilde{\phi}.$$

Ripetendo dimostrazioni analoghe a quelle dei Teoremi 12.5, 12.6 e 12.7 si prova che

14.4. *L'operatore* $R^{(m)}$, *definito in* (14.16), *è un* PCO, *positivo ma non strettamente, dello spazio* $[L^2(D)]_{2r}$. *Inoltre* $R^{(m)}$ *appartiene alla classe* $\mathcal{C}^{\upsilon}$, *per* $\upsilon > r/2$.

Sussiste, inoltre, il seguente fondamentale Teorema:

14.5. *Ogni autovalore positivo dell'equazione*

$$(14.17) \qquad R^{(m)} \zeta = \mu \zeta, \qquad \zeta \in [L^2(D)]_{2r}$$

è autovalore di (14.15), *cioè di* (14.9).

(Cfr. Teorema 12.9)

Applicando il metodo degli Invarianti Ortogonali all'operatore $R^{(m)}$ è quindi possibile costruire esplicitamente una successione $\{\tau_{m,n}\}$ tale che, per ogni $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, risulti $\tau_m \leqslant \tau_{m,n+1} \leqslant \tau_{m,n}$ e $\lim_{n \to \infty} \tau_{m,n} = \tau_m$.

Se U e V sono r-vettori di $V(A)$ e $F = (F_1, \ldots, F_r) \in L^2(A)$, consideriamo il seguente problema: determinare la soluzione $U \in V(A)$ dell'equazione

$$((U, V)) = \int_A F_i V_i dx, \qquad \forall V \in V(A), \tag{14.18}$$

dove $((\cdot, \cdot))$ denota ora il prodotto scalare (12.52).

Se $\{W^h\}$ costituisce un sistema ortonormale e completo di r-vettori nello spazio $\mathcal{V}(A)$, ottenuto introducendo in $V(A)$ il prodotto scalare (12.52), la soluzione di (14.18) è data da $U = MF = \sum_{h \geqslant 1} (F, W^h) W^h$. Posto $M_m F = \sum_{h=1}^{m} (F, W^h) W^h$, la teoria sviluppata in questa sezione permette la maggiorazione esplicita di $\|M - M_m\|$.

14.6. *È possibile determinare una costante* $\tilde{q}_0 > 0$, *che dipende da* A, *tale che* $B(U, U) \geqslant \tilde{q}_0((U, U))$, $\forall U \in V(A)$.

(Cfr. Teorema 12.10).

Posto $B_0(U, V) = q_0((U, V))$, $(0 < q_0 < \tilde{q}_0)$, assumendo $S = L^2(A)$ e $H = V(A)$ per il Lemma 14.6 il problema

$$B_0(U, V) = (F, V), \qquad \forall V \in H, \quad F \in S, \quad U \in H \tag{14.19}$$

costituisce un problema base per (13.1). La soluzione di (14.19) è data da $U = G_0 F = (1/q_0) MF$. Sostituendo a G_0 l'operatore esplicitamente noto $G_{0,m} = (1/q_0) M_m$ è possibile applicare la teoria esposta nella *Nota* I per la costruzione della soluzione del problema iniziale (13.1).

15. I problemi di trasmissione

Sia A un campo limitato di $\boldsymbol{R}^r$. Supponiamo che A sia propriamente regolare di classe C^1. Siano Λ_1 e Λ_2 due insiemi disgiunti di ∂A tali che $\partial A = \overline{\Lambda}_1 \cup \overline{\Lambda}_2$ e sia Λ un insieme contenuto in A che soddisfa le seguenti condizioni: $\overline{\Lambda} \cup \overline{\Lambda}_h$ è la frontiera di un campo regolare $A_h \subset A$ $(h = 1, 2)$ tale che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\overline{A} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$. Supponiamo che A_1 e A_2 siano occupati da due corpi elastici nelle loro configurazioni naturali e che i coefficienti elastici di A_q siano funzioni $a^{(q)}_{ihjk}(x)$ a valori reali e di classe C^∞ in A_q, $q = 1, 2$, verificanti le condizioni di simmetria (9.1) e l'ipotesi (9.2). Si può pensare A come un corpo elastico eterogeneo nella sua configurazione naturale, con coefficienti elastici

$$a_{ihjk}(x) \begin{cases} = a^{(1)}_{ihjk}(x), & x \in A_1, \\ = a^{(2)}_{ihjk}(x), & x \in A_2, \end{cases}$$

in generale discontinui lungo Λ.

Procedendo euristicamente possiamo dire che i problemi dell'equilibrio per il corpo elastico A sono i seguenti: date le funzioni $F^1(x) = (F_1^1(x), \ldots, F_r^1(x)) \in C^\infty(A_1)$ e $F^2(x) = (F_1^2(x), \ldots, F_r^2(x)) \in C^\infty(A_2)$, determinare $U(x) = (U_1(x), \ldots, U_r(x))$, $x \in A$, tale che, se $U^1(x) = U(x)$, $x \in A_1$ e $U^2(x) = U(x)$, $x \in A_2$, risulti

$$(15.1) \qquad \frac{\partial}{\partial x_h}\left(a_{ihjk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}U_j^q\right) + F_i^q(x) = 0, \qquad x \in A_q, \quad i = 1, \ldots, r, \quad q = 1, 2;$$

(15.2) U^q *soddisfa su* Λ_q, $q = 1, 2$, *le condizioni* I), II) *o* III) *descritte nella sezione* 7;

$$(15.3) \qquad U^1 = U^2 \quad su\ \Lambda.$$

Se $n^{(q)} = \{n_1^{(q)}, \ldots, n_r^{(q)}\}$ *è la normale a* Λ *diretta verso l'interno di* A_q $(q = 1, 2)$, *deve essere*

$$(15.4) \qquad n_h^{(1)} a_{ihjk}^{(1)}(x)\, U_{j/k}^1 + n_h^{(2)} a_{ihjk}^{(2)}(x)\, U_{j/k}^2 = 0 \quad su\ \Lambda, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Tale tipo di problemi, considerato per la prima volta da M. Picone nel caso particolare in cui A_1 e A_2 siano due corpi isotropi e omogenei con diverse costanti di Lamè (cfr. [22]), è stato successivamente studiato in [37], [38], [39] e [26], dove si dimostra l'esistenza di una soluzione regolare se tali sono i dati del problema. Faremo ora vedere come questi problemi rientrino nella teoria sviluppata in queste *Note*.

Le condizioni al contorno (15.2), cui è soggetto il corpo A, possono essere dei seguenti tipi:

$(15.2)_1$ $\quad U^1 = 0$ su Λ_1; $\quad U^2 = 0$ su Λ_2 (corpo fisso su ∂A);

$(15.2)_2$ $\quad n_h^{(1)} a_{ihjk}^{(1)}(x)\, U_{j/k}^1 = 0$ su Λ_1; $\quad n_h^{(2)} a_{ihjk}^{(2)}(x)\, U_{j/k}^2 = 0$ su Λ_2 (corpo privo di vincoli);

$(15.2)_3$ $\quad U^q = 0$ su $\partial_1 A \cap \Lambda_q$; $\quad n_h^{(q)} a_{ihjk}^{(q)}(x)\, U_{j/k}^q = 0$ su $\partial_2 A \cap \Lambda_q$ $\quad (q = 1, 2)$, (corpo fisso su $\partial_1 \mathrm{A} \subset \partial \mathrm{A}$).

Sia $V(\mathrm{A})$ la varietà lineare di $H_1(A)$ costituita da tutti gli spostamenti ammissibili del corpo A, supposto assoggettato ad un sistema di forze di massa rappresentato dalla funzione:

$$F(x)\begin{cases} = F^1(x), & \text{se } x \in A_1, \\ = F^2(x), & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

Precisamente nel caso $(15.2)_1$ si ha $V(A) \equiv \overset{\circ}{H}_1(A)$; nel caso $(15.2)_2$ si ha $V(A) \equiv H_1(A)$; infine nel caso del problema $(15.\ 2)_3$ $V(A)$ è la varietà costituita dai $V \in H_1(A)$ tali che $V = 0$ su $\partial_1 A$. Il problema (15.1), (15.3), (15.4) con le condizioni $(15.2)_1$ o $(15.2)_3$ ammette una e una sola soluzione $U \in V(A)$; con la condizione $(15.2)_2$ tale problema ammette una e una sola soluzione $U \in W(A)$ (cfr. sez. 10) se e solo se risulta $\int_{A_1} F^1(x)\rho(x)\,dx + \int_{A_2} F^2(x)\rho(x)\,dx = 0$, $\forall \rho \in R(A)$ (cfr. [26] e [37]).

Per ogni U^q, $V^q \in H_1(A_q)$ sia

$$B_q(U^q, V^q) = \int_{A_q} a_{ihjk}^{(q)}(x)\, U_{j/k}^q\, V_{i/h}^q\, dx, \qquad q = 1, 2,$$

e sia, per ogni $U, V \in H_1(A)$,

$$B(U, V) = B_1(U, V) + B_2(U, V) = \int_A a_{ihjk}(x)\, U_{j/k}\, V_{i/h}\, dx.$$

Dalla formula di Green segue che, per ogni $V^1 \in H_1(A_1)$ e $V^2 \in H_1(A_2)$ verificanti le condizioni al contorno $(15.2)_1$, $(15.2)_2$ o $(15.2)_3$, le equazioni (15.1) si riscrivono nel modo seguente:

$$B_1(U^1, V^1) + \int_\Lambda a^{(1)}_{ihjk}(x)\, U^1_{j/k}\, V^1_i\, n^{(1)}_h\, d\Sigma = \int_{A_1} F^1_i\, V^1_i\, dx;$$

$$B_2(U^2, V^2) + \int_\Lambda a^{(2)}_{ihjk}(x)\, U^2_{j/k}\, V^2_i\, n^{(2)}_h\, d\Sigma = \int_{A_2} F^2_i\, V^2_i\, dx$$

e quindi se $V^1 = V^2$ su Λ, imponendo al vettore incognito U le condizioni (15.3) e (15.4) segue che la soluzione U di (15.1) è soluzione del problema

$$B(U, V) = \int_A F_i(x)\, V_i(x)\, dx, \qquad \forall V \in V(A). \tag{15.5}$$

Viceversa dalla teoria generale sviluppata in [26, sez. 3, 6] segue che la soluzione di (15.5) soddisfa le equazioni (15.1) e, su Λ_1 e Λ_2, le condizioni al contorno (15.2). Dalla formula di Green e, per l'arbitrarietà di V, dalla (15.5) segue che U soddisfa le (15.4).

Il problema (15.5) coincide con uno dei problemi considerati in (9.4), in (10.4) oppure in (13.1) e, viste le ipotesi (9.2) assunte sui coefficienti $a^{(q)}_{ihjk}(x)$, $q = 1, 2$, esiste una costante $p_2 > 0$ per cui vale, rispettivamente, la (9.2), la (10.5) o la (13.2). Ciò consente di applicare la teoria sviluppata in queste sezioni per la costruzione della soluzione $U \in V(A)$ di (15.5).

Quanto detto fin ora si estende al caso in cui A sia composto da n corpi elastici $A_1, \ldots, A_n$, incastrati l'uno nell'altro, con differenti coefficienti elastici, ottenendo anche in questo caso un problema nella forma (15.5).

Lavoro svolto con il finanziamento dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica «Francesco Severi», Roma.

Bibliografia

[37] J. J. Lions, *Contribution à un problême de Picone.* Annali di Matematica Pura e Applicata, s. IV, v. XLI, 1956, 201-219.

[38] S. Campanato, *Sul problema di Picone relativo all'equilibrio di un corpo elastico incastrato.* Ricerche Matematiche, v. VI, f. I, 1957, 125-149.

[39] G. Fichera, *Analytic Problems Concerning Heterogeneous Elastic Media.* Proceedings of Symposium on Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis, v. 1, Tbilisi 1973, 315-324.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 2 - 00185 Roma