ATTI ACCADEMIA NAZIONALE LINCEI CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

FLAVIA LANZARA

Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: il problema non autoaggiunto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 4 (1993), n.3, p. 157–169.

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1993_9_4_3_157_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1993_9_4_3_157_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1993.

Matematica. — *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: il problema non autoaggiunto.* Nota V di FLAVIA LANZARA, presentata (*) dal Socio G. Fichera.

ABSTRACT. — *Theory and applications of intermediate operators: non self-adjoint problem.* The aim of the paper is to prove how in the framework of the theory developed in the previous Notes it is possible to include non self-adjoint problems. It is shown that this is possible when one considers the Dirichlet problem for a non self-adjoint second order elliptic equation with bounded and measurable coefficients. Extensions to more general problems seem very likely.

KEY WORDS: Non self-adjoint elliptic equation; Discontinuous coefficients; Green's operator.

RIASSUNTO. — Lo scopo del lavoro è di mostrare come nel quadro della teoria sviluppata nelle Note precedenti è possibile includere problemi non autoaggiunti. Viene mostrato che questo è possibile quando si considera il problema di Dirichlet per un'equazione ellittica del secondo ordine non autoaggiunta con coefficienti limitati e misurabili. Sono assai probabili estensioni a problemi più generali.

In questa Nota ci proponiamo di mostrare come i metodi sviluppati nelle precedenti, e sempre relativi a problemi autoaggiunti, possano estendersi a problemi non autoaggiunti. A tal fine considereremo il caso semplice di una equazione scalare ellittica del II ordine, in cui i coefficienti, però, supporremo funzioni reali, misurabili e limitate. Scriveremo tale equazione, nel senso delle distribuzioni, al modo seguente:

$$(*) \quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x)$$

con $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ funzioni misurabili e limitate nel campo limitato A di $\mathbf{R}^r$. Assumeremo l'ipotesi di *ellitticità uniforme* cioè l'esistenza di una costante $p_0 > 0$ tale che, per ogni $x \in A$ e per ogni $\lambda \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbf{R}^r$, sia $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ ($i, j = 1, \dots, r$), $a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq p_0 \lambda_i \lambda_i$. Assumeremo $f(x) \in L^2(A)$ ed associeremo alla (*) la condizione al contorno di Dirichlet: $u = 0$ su ∂A . Quindi la funzione u è, ora, una funzione a valori reali e non più, come nelle Note precedenti⁽¹⁾, una funzione vettoriale.

È da presumere possibile l'estensione dei principali risultati di questa Nota a sistemi non autoaggiunti ed a condizioni al contorno più generali.

(*) Nella seduta del 9 gennaio 1993.

⁽¹⁾ *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: risultati generali.* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 3, 1992, 79-101; *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema degli spostamenti.* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 3, 1992, 149-171; *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema delle tensioni.* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 4, 1993, 3-27; *Teoria degli operatori intermedi e applicazioni: statica elastica con coefficienti discontinui, il problema misto e i problemi di trasmissione.* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 4, 1993, 87-98.

16. UN COMPLEMENTO ALLA TEORIA GENERALE DEI PROBLEMI INTERMEDI

Diamo a G , G_n e Q_n il significato loro attribuito nella *Nota I* e poniamo $\Gamma_n = G^{1/2} Q_n G^{1/2}$ ($G^{1/2}$ è la radice quadrata positiva di G). Nella *Nota I* abbiamo dimostrato che $0 < G_n - G < G_n - \Gamma_n$, $0 < G - \Gamma_n < G_n - \Gamma_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n - \Gamma_n\| = 0$.

Abbiamo inoltre calcolato per ogni fissato m (con $m \geq m_0$ ed m_0 convenientemente alto), per ogni $n \geq 1$ e per ogni $r \geq 1$, una costante $c_{n,r}^{(m)}$, tale che, fissati m ed r , $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,r}^{(m)} = 0$ e, fissati m ed n , $\|G_n - \Gamma_n\| \leq c_{n,r+1}^{(m)} \leq c_{n,r}^{(m)}$, $\lim_{r \rightarrow \infty} c_{n,r}^{(m)} = \|G_n - \Gamma_n\|$.

Con il simbolo $\|\cdot\|$ si è indicata la norma di un operatore considerato da S in S . Vogliamo ora valutare $\|G - \Gamma_n\|$ e $\|G_n - G\|$ quando con $\|\cdot\|$ si indica la norma di un operatore di S in H . L'interesse applicativo di tali valutazioni è cospicuo. Ad esempio nei problemi di teoria dell'elasticità considerati nelle *Note II, III e IV*, tali valutazioni consentono di maggiorare l'errore di approssimazione nelle derivate prime degli spostamenti, cioè sugli sforzi e sulle deformazioni, oltre che sugli spostamenti.

Sia $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert ottenuto introducendo in H il prodotto scalare $(Tu, v)_H$. Lo spazio $\mathcal{H}$ è isomorfo come spazio di Hilbert a H . Usando le notazioni della sezione 4, supponiamo, per semplicità, che il sistema $\{\omega_b\}$ sia ortonormale in $\mathcal{H}$ cioè $(T\omega_b, \omega_k)_H = \delta_{bk}$ ($\forall b, k \geq 1$). Si ha, allora

$$(16.1) \quad Gf = \sum_{b=1}^{\infty} (TGf, \omega_b)_H \omega_b = \sum_{b=1}^{\infty} (f, \omega_b) \omega_b.$$

Si ha anche (cfr. *Nota I*, p. 93)

$$(16.2) \quad \Gamma_n f = \sum_{b=1}^n (f, \omega_b) \omega_b.$$

Ne segue (cfr. (1.2)) che

$$\begin{aligned} c_T \| (G - \Gamma_n) f \|_H^2 &\leq (T(G - \Gamma_n) f, (G - \Gamma_n) f)_H = \\ &= \sum_{b=n+1}^{\infty} (f, \omega_b)^2 = ((G - \Gamma_n) f, f) \leq \|G - \Gamma_n\| \|f\|^2. \end{aligned}$$

Pertanto risulta:

$$(16.3) \quad \|G - \Gamma_n\| \leq c_T^{-1/2} \|G - \Gamma_n\|^{1/2}.$$

Si ha poi, tenendo presente (1.1), (1.2), (1.4) e (2.6)_n,

$$\begin{aligned} c_{T_0} \| (G_n - G) f \|_H^2 &\leq (T_n(G_n - G) f, (G_n - G) f)_H = ((G_n - G) f, f) - (Gf, T_n(G_n - G) f)_H = \\ &= ((G_n - G) f, f) - (Gf, f) + (Gf, T_n Gf)_H = ((G_n - G) f, f) - ((T - T_n) Gf, Gf)_H \leq \\ &\leq ((G_n - G) f, f) \leq \|G_n - G\| \|f\|^2. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$(16.4) \quad \|G_n - G\| \leq c_{T_0}^{-1/2} \|G_n - G\|^{1/2}.$$

Quindi da (16.3), (16.4), dai Teoremi 4.5 e 4.6 segue che

16.1. Fissati gli interi positivi m ($m \geq m_0$), n ed r si ha:

$$\|G_n - G\| \leq c_{T_0}^{-1/2} [c_{n,r}^{(m)}]^{1/2}; \quad \|G - \Gamma_n\| \leq c_T^{-1/2} [c_{n,r}^{(m)}]^{1/2}$$

e quindi

$$\|G_n f - Gf\|_H \leq c_{T_0}^{-1/2} [c_{n,r}^{(m)}]^{1/2} \|f\|; \quad \|Gf - \Gamma_n f\|_H \leq c_T^{-1/2} [c_{n,r}^{(m)}]^{1/2} \|f\|.$$

Consideriamo in particolare il problema

$$(16.5) \quad \int_A [a_{ij}(x) U_{x_i} V_{x_j} + c(x) UV] dx = \int_A F(x) V(x) dx, \quad U \in \overset{\circ}{H}_1(A), \quad \forall V \in \overset{\circ}{H}_1(A)$$

data $F \in L^2(A)$, supponendo $c(x) \geq 0$ per $x \in A$.

Assumiamo $S = L^2(A)$, $H = \overset{\circ}{H}_1(A)$. Può allora applicarsi con ovvie modifiche la teoria della Nota II. Com'è ovvio esiste una e una sola soluzione di questo problema. Sia $U = GF$ (G operatore di Green). È da notare che in tal caso l'operatore G_n non è esplicitamente calcolabile ma viene approssimato da operatori $G_{n,m}$ esplicitamente calcolabili (cfr. Nota II, p. 100). Occorrerebbe quindi un'ulteriore analisi per maggiorare $\|G_{n,m} - \Gamma_n\|$. Omettiamo tale indagine perché non essenziale ai nostri scopi attuali. Osserviamo, invece, che G_n è esplicitamente noto se il campo A è bi-lipschitzianamente omeomorfo ad un campo sferico. Se tale ipotesi non è verificata ma sono soddisfatte da A le ipotesi enunciate nella sezione 14 (assumendo, ovviamente, $\partial_1 A \equiv \partial A$) si proceda nel modo seguente. Poniamo $B(U, V) = \int_A [a_{ij}(x) U_{x_i} V_{x_j} + c(x) UV] dx$ e $(U, V)_H = \int_A U_{x_i} V_{x_i} dx$. Risulta

$$(16.6) \quad B(U, U) \geq p_0 \|U\|_H^2, \quad \forall U \in \overset{\circ}{H}_1(A).$$

La soluzione $U = GF$ del problema (16.5) è data da $GF = \sum_{b=1}^{\infty} (F, \omega^b) \omega^b$, con $\{\omega^b\}$ sistema ortonormale e completo nello spazio $\mathcal{H}(A)$, ottenuto introducendo in $\overset{\circ}{H}_1(A)$ il prodotto scalare $B(U, V)$. Faremo ora vedere che è possibile maggiorare esplicitamente l'errore che si commette quando si sostituisce a G l'operatore Γ_n , esplicitamente noto, dato da $\Gamma_n F = \sum_{b=1}^n (F, \omega^b) \omega^b$.

Se Ω_n è la varietà lineare generata dalle funzioni $\omega^1, \dots, \omega^n$, $\Omega_n \subset \mathcal{H}(A)$, sia P_n il proiettore ortogonale di $\mathcal{H}(A)$ su Ω_n e sia $Q_n = I - P_n$ (I denota l'identità in $\mathcal{H}(A)$). Risulta

$$\begin{aligned} p_0 \|G - \Gamma_n\|^2 &= p_0 \sup_{L^2(A) - \{0\}} \frac{\|(G - \Gamma_n)\Phi\|_H^2}{\|\Phi\|^2} \leq \sup_{L^2(A) - \{0\}} \frac{B((G - \Gamma_n)\Phi, (G - \Gamma_n)\Phi)}{\|\Phi\|^2} = \\ &= \sup_{L^2(A) - \{0\}} \frac{B(Q_n G\Phi, Q_n G\Phi)}{\|\Phi\|^2} = \sup_{L^2(A) - \{0\}} \frac{B(G\Phi, Q_n G\Phi)}{\|\Phi\|^2}. \end{aligned}$$

Diciamo $\tilde{\mathcal{H}}(A)$ la varietà lineare, contenuta in $\mathcal{H}(A)$, costituita dalle funzioni $U \in \mathcal{H}(A)$ tali che esiste $EU \in L^2(A)$ in modo che $B(U, V) = (EU, V)$, $\forall V \in \mathcal{H}(A)$. Se $U \in \tilde{\mathcal{H}}(A)$ si ha $[B(U, V)]^2 \leq \|EU\|^2 \cdot \|V\|^2$, $\forall V \in \mathcal{H}(A)$. Quindi si ottiene:

$$p_0 \|G - \Gamma_n\|^2 \leq \sup_{\tilde{\mathcal{H}}(A) - \{0\}} \frac{B(U, Q_n U)}{\|EU\|^2} \leq \sup_{\tilde{\mathcal{H}}(A) - \{0\}} \frac{(Q_n U, Q_n U)}{B(U, Q_n U)} \leq \sup_{\substack{\mathcal{H}(A) - \{0\} \\ P_n U = 0}} \frac{(U, U)}{B(U, U)}.$$

Se $((U, V))$ denota il prodotto scalare (12.3), (12.5), procedendo come nelle sezioni 12 e 14 (cfr. Lemmi 12.10 e 14.6), è possibile determinare una costante positiva q_0 ,

che dipende da A , tale che

$$(16.7) \quad B(U, U) \geq q_0((U, U)), \quad \forall U \in \overset{\circ}{H}_1(A)$$

da cui segue che

$$\|G - \Gamma_n\|^2 \leq \frac{1}{p_0 q_0} \sup_{\substack{\mathcal{X}(A) - \{0\} \\ P_n U = 0}} \frac{(U, U)}{((U, U))}.$$

Sia $\{V^b\}$ un sistema completo in $L^2(A)$ di vettori linearmente indipendenti tale che $\omega^b = GV^b$ ($\forall b \geq 1$) oppure, equivalentemente, tale che

$$(16.8) \quad B(\Psi, \omega^b) = (\Psi, V^b), \quad \forall \Psi \in \overset{\circ}{H}_1(A).$$

In molti problemi può essere semplice determinare i sistemi $\{\omega^b\} \subset \overset{\circ}{H}_1(A)$, $\{V^b\} \subset L^2(A)$ legati dalla (16.8). Si può altrimenti procedere come indicato nella sezione 5.

Sia $U \in \overset{\circ}{H}_1(A)$. La condizione $P_n U = 0$, che equivale alle n condizioni di ortogonalità $B(U, \omega^b) = 0$, $b = 1, \dots, n$, si riscrive al modo seguente:

$$(16.9) \quad (U, V^b) = 0 \quad b = 1, \dots, n.$$

Si proceda a questo punto come nella sezione 14. Essendo $\partial_1 A \equiv \partial A$, risulta $V(A) \equiv \overset{\circ}{H}_1(A)$; la varietà $\mathfrak{V}_n(A)$ è ora definita dalle condizioni (16.9). Seguitando ad usare le stesse notazioni introdotte nella sezione 14, sostituendo però alle condizioni (14.3)₃, che servono per definire lo spazio $\mathfrak{X}_n(A)$, le (16.9) e alle condizioni (14.5)₄, che servono per definire lo spazio $\mathfrak{X}_n(A)$, le seguenti:

$$(16.10) \quad (U^1, V^b)_1 + (U^2, V^b)_2 = 0, \quad b = 1, \dots, n$$

si ottiene:

$$\|G - \Gamma_n\|^2 \leq \frac{1}{p_0 q_0} \sup_{\mathfrak{X}_n(A) - \{0\}} \frac{[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]}{[(\mathfrak{u}, \mathfrak{u})]}.$$

Le condizioni (16.10) si possono trasformare in condizioni del tipo (14.5)₄. Infatti, assumendo nella (14.7)_k:

$$F = V^b \text{ in } A_k, \quad \Psi = \frac{1}{\text{mis } \partial A} \int_A V^b dx \text{ su } \Lambda_k \text{ e}$$

$$- \text{mis } \Lambda_2 \int_{A_1} V^b dx + \text{mis } \Lambda_1 \int_{A_2} V^b dx$$

$$\Phi = (-1)^k \frac{\int_{A_1} V^b dx}{\text{mis } \Lambda \cdot \text{mis } \partial A} \text{ su } \Lambda,$$

le (14.6)_k sono verificate $\forall b \geq 1$ e $k = 1, 2$.

Le (14.8)_k permettono di determinare $W^{k, b+2m} \in H_1(A_k)$ tale che

$$((W^{k, b+2m}, U^k))_k = (V^b, U^k)_k - \frac{\int_A V^b dx}{\text{mis } \partial A} \int_{A_k} U^k dx -$$

$$- \text{mis } \Lambda_2 \int_{A_1} V^b dx + \text{mis } \Lambda_1 \int_{A_2} V^b dx$$

$$- (-1)^k \frac{\int_{A_1} V^b dx}{\text{mis } \Lambda \cdot \text{mis } \partial A} \int_{A_1} U^k dx, \quad \forall U^k \in H_1(A_k), \quad \forall b \geq 1, \quad k = 1, 2.$$

Segue che le condizioni (16.10), dovendo valere per ogni $\{U^1, U^2\} \in \mathfrak{X}(A)$, possono così risciversi:

$$(16.11) \quad ((W^{1,b+2m}, U^1))_1 + ((W^{2,b+2m}, U^2))_2 = 0, \quad b = 1, \dots, n.$$

Ciò consente di applicare il metodo sviluppato nella sezione 14 per il calcolo (per

eccesso) di $\tau_n = \sup_{\mathfrak{X}_n(A) - \{0\}} \frac{[\mathcal{U}, \mathcal{U}]}{[(\mathcal{U}, \mathcal{U})]}.$

17. IL CASO NON AUTOAGGIUNTO

Considereremo ora il problema

$$(17.1) \quad \int_A [a_{ij}(x) U_{x_i} V_{x_j} + b_i(x) U_{x_i} V + c(x) UV + \gamma UV] dx = \int_A F(x) V(x) dx,$$

$$U \in \dot{H}_1(A), \quad F \in L^2(A), \quad \forall V \in \dot{H}_1(A);$$

γ è una costante. Supponiamo inoltre che sia $c(x) \geq 0$, $\forall x \in A$.

In base alle considerazioni svolte nella sezione precedente, supponendo che A sia bi-lipschitzianamente omeomorfo ad un campo sferico, oppure, più in generale, che verifichi le ipotesi enunciate nella sezione 14, ed attribuendo a G il significato di operatore di Green del problema (16.5), riterremo acquisito il seguente Teorema:

17.1. *Esistono una successione di operatori $\{\mathfrak{G}_n\}$ di $L^2(A)$ in $\dot{H}_1(A)$ ⁽²⁾ e due successioni infinitesime di numeri positivi $\{\varepsilon_n\}$, $\{\eta_n\}$ tali che $\|G - \mathfrak{G}_n\| < \varepsilon_n$; $\|G - \mathfrak{G}_n\| < \eta_n$. Gli operatori $\mathfrak{G}_n$ ed i numeri ε_n ed η_n sono esplicitamente calcolabili.*

È immediato dimostrare il seguente Teorema:

17.2. *Condizione necessaria e sufficiente perché U sia soluzione del problema (17.1) è che, posto $E = b_i(x) \partial / \partial x_i$ si abbia*

$$(17.2) \quad U = G\Phi$$

$$(17.3) \quad \Phi + EG\Phi + \gamma G\Phi = F, \quad \Phi \in L^2(A)$$

essendo G l'operatore di Green del problema (17.1) nel caso $b_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, \dots, r$), $\gamma = 0$.

Pertanto lo studio di (17.1) è equivalente a quello dell'equazione (17.3). Assunto arbitrariamente $\lambda \neq 0$, possiamo scrivere la (17.3) al modo seguente:

$$(17.4) \quad \Phi = \Phi - \lambda(\Phi + EG\Phi + \gamma G\Phi) + \lambda F, \quad \Phi \in L^2(A).$$

Posto $R\Phi = \Phi + EG\Phi + \gamma G\Phi$ e $S_\lambda \Phi = \Phi - \lambda R\Phi + \lambda F$, si ha che $S_\lambda \Phi - S_\lambda \Psi = (I - \lambda R)(\Phi - \Psi)$, denotando con I l'operatore identità in $L^2(A)$. Sussiste il seguente Teorema:

17.3. *Può determinarsi una costante $\gamma_0 \geq 0$ tale che, per ogni $\gamma \geq \gamma_0$, fissato ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < 1$, risulti $(R\Phi, \Phi) \geq \varepsilon_0 \|\Phi\|^2$, $\forall \Phi \in L^2(A)$.*

(2) Cioè, secondo la teoria generale, di S in H .

Si ha, con la posizione (17.2), che

$$(17.5) \quad (R\Phi - \varepsilon_0 \Phi, \Phi) = \int_A [(1 - \varepsilon_0) \Phi^2 + b_i(x) \Phi U_{x_i} + \gamma a_{ij}(x) U_{x_i} U_{x_j} + \gamma c(x) U^2] dx.$$

È elementare verificare che può *esplicitamente calcolarsi* $\gamma_0 \geq 0$ tale che, per $\gamma \geq \gamma_0$, la forma quadratica nelle $(r + 2)$ variabili: $\Phi, U_{x_1}, \dots, U_{x_r}, U$, sotto segno di integrale a secondo membro di (17.5), sia semidefinita positiva. Infatti, dall'essere $a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq p_0 \lambda_i \lambda_j$, $x \in A$, segue che

$$(R\Phi - \varepsilon_0 \Phi, \Phi) \geq \int_A [(1 - \varepsilon_0) \Phi^2 + b_i(x) \Phi U_{x_i} + \gamma p_0 U_{x_i} U_{x_i} + \gamma c(x) U^2] dx$$

e, con calcoli semplici, segue che quest'ultima forma quadratica sotto segno di integrale è semidefinita positiva se e solo se risulta

$$0 < \varepsilon_0 < 1 \quad \text{e} \quad \gamma \geq \frac{1}{4p_0(1 - \varepsilon_0)} \text{Max}_A \sum_{i=1}^r [b_i(x)]^2.$$

$$\text{Può quindi assumersi } \gamma_0 = \frac{1}{4p_0(1 - \varepsilon_0)} \text{Max}_A \sum_{i=1}^r [b_i(x)]^2.$$

17.4. Se si assume $0 < \varepsilon_0 < 1$, $\gamma \geq \gamma_0$ e

$$0 < \lambda < \frac{2\varepsilon_0}{\|I + EG + \gamma G\|^2}$$

la trasformazione S_λ è una contrazione dello spazio $L^2(A)$ in sé.

Poniamo $\zeta = \Phi - \Psi$, $\Phi, \Psi \in L^2(A)$. Si ha, per il Teorema 17.4, che

$$\|S_\lambda \Phi - S_\lambda \Psi\|^2 = \|(I - \lambda R)\zeta\|^2 = \|\zeta\|^2 - 2\lambda (R\zeta, \zeta) + \lambda^2 \|R\zeta\|^2 \leq (1 - 2\varepsilon_0 \lambda + \lambda^2 \|R\|^2) \|\zeta\|^2$$

e quindi la tesi.

Risulta

$$\|R\|^2 = \sup_{L^2(A) - \{0\}} \frac{\|R\zeta\|^2}{\|\zeta\|^2} = \sup_{L^2(A) - \{0\}} \frac{(R^* R \zeta, \zeta)}{\|\zeta\|^2}.$$

L'operatore R^* trasposto di R trasforma $L^2(A)$ in sé. Pertanto il calcolo di $\|R\|^2$ si riconduce al calcolo del più grande autovalore dell'operatore $R^* R$, simmetrico e positivo nello spazio $L^2(A)$.

D'ora in avanti assumeremo i parametri λ , ε_0 e γ verificanti le ipotesi del Teorema 17.4. Posto $K_\lambda = I - \lambda R$, risulta $S_\lambda \Phi = K_\lambda \Phi + \lambda F$ e $\|K_\lambda\| < 1$. L'equazione (17.4) si riscrive in forma equivalente:

$$(17.6) \quad \Phi = K_\lambda \Phi + \lambda F.$$

Per il *principio di contrazione* (cfr. [40]) l'equazione (17.6) ammette una e una sola soluzione $\Phi \in L^2(A)$. Essa è data da

$$(17.7) \quad \Phi = \lambda \sum_{b=0}^{\infty} (K_\lambda)^b F.$$

È immediato dimostrare che

17.5. *Risulta*

$$\|\Phi\| \leq \frac{\lambda\|F\|}{1 - \|K_\lambda\|}.$$

Dai Teoremi 17.2 e 17.4 segue che

17.6. *Se $\gamma \geq \gamma_0$ il problema (17.1) ammette una e una sola soluzione U. Essa è data da $U = G\Phi$, con G operatore di Green del problema (17.1), assumendo $b_i(x) = \gamma = 0$ e Φ data da (17.7).*

Dai Teoremi 17.1 e 17.5 segue immediatamente che

17.7. *Risulta, per ogni $s \geq 1$,*

$$\|\mathcal{G}_s \Phi - G\Phi\| < \frac{\lambda \varepsilon_s}{1 - \|K_\lambda\|} \|F\|, \quad \|\mathcal{G}_s \Phi - G\Phi\|_H < \frac{\lambda \gamma_s}{1 - \|K_\lambda\|} \|F\|.$$

Posto $R_n = I + E\mathcal{G}_n + \gamma\mathcal{G}_n$ e $K_{\lambda,n} = I - \lambda R_n$ dal Teorema 17.1 segue che

$$\|R - R_n\| \leq \gamma\|G - \mathcal{G}_n\| + M \|G - \mathcal{G}_n\| < \delta_n \quad \text{dove} \quad M = \left[\text{Max}_{x \in A} \sum_{i=1}^r [b_i(x)]^2 \right]^{1/2}$$

e $\delta_n = \gamma \varepsilon_n + M \gamma_n$. La successione δ_n è esplicitamente calcolabile.

Risulta, quindi,

$$(17.8) \quad \|K_\lambda - K_{\lambda,n}\| = \lambda\|R - R_n\| < \lambda\delta_n$$

e

$$(17.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|K_\lambda - K_{\lambda,n}\| = 0.$$

È facile vedere che non può essere $\|K_\lambda\| = 0$. Per n sufficientemente grande si ha che $0 < \|K_{\lambda,n}\| - \lambda\delta_n < \|K_\lambda\| < \|K_{\lambda,n}\| + \lambda\delta_n$. Il calcolo di $\|K_\lambda\|$ equivale, quindi, al calcolo del più grande autovalore dell'operatore di $L^2(A)$: $(I - \lambda R_n^*)(I - \lambda R_n)$, simmetrico e positivo.

17.8. *Sia $n \geq n_0$, con n_0 opportunamente grande. Posto*

$$(17.10) \quad \Phi_n = \lambda \sum_{b=0}^{\infty} (K_{\lambda,n})^b F$$

sia

$$\alpha_n = \frac{\lambda\|K_\lambda - K_{\lambda,n}\|}{(1 - \|K_\lambda\|)(1 - \|K_{\lambda,n}\|)}.$$

Risulta

$$(17.11) \quad \|\Phi - \Phi_n\| \leq \alpha_n \|F\|.$$

e

$$(17.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Per ogni $b \geq 1$ risulta

$$(K_{\lambda,n})^b - (K_\lambda)^b = \sum_{i=0}^{b-1} (K_{\lambda,n})^i (K_{\lambda,n} - K_\lambda) (K_\lambda)^{b-1-i}$$

da cui segue che

$$\|(K_{\lambda,n})^b - (K_\lambda)^b\| \leq \|K_{\lambda,n} - K_\lambda\| \|K_\lambda\|^{b-1} \sum_{i=0}^{b-1} \left(\frac{\|K_{\lambda,n}\|}{\|K_\lambda\|} \right)^i = \|K_{\lambda,n} - K_\lambda\| \frac{\|K_\lambda\|^b - \|K_{\lambda,n}\|^b}{\|K_\lambda\| - \|K_{\lambda,n}\|}.$$

Sia $n_0 \geq 1$ tale che, per $n \geq n_0$, risulti $\|K_{\lambda,n}\| < 1$. Si ottiene, quindi,

$$\|\Phi - \Phi_n\| \leq \lambda \|F\| \sum_{b=0}^{\infty} \|(K_{\lambda,n})^b - (K_\lambda)^b\| \leq \frac{\lambda \|K_{\lambda,n} - K_\lambda\| \|F\|}{(1 - \|K_\lambda\|)(1 - \|K_{\lambda,n}\|)}$$

cioè la (17.11). Dalla (17.9) segue la (17.12).

Per (17.8) e (17.9) è possibile costruire esplicitamente una successione infinitesima $\{\hat{\alpha}_n\}$ tale che risulti $\alpha_n \leq \hat{\alpha}_n \forall n \geq n_0$. Ciò rende del tutto esplicita la maggiorazione dell'errore di approssimazione (17.11).

17.9. Fissati $n \geq 1$, $m \geq 0$ sia

$$(17.13) \quad \Phi_{n,m} = \lambda \sum_{b=0}^m (K_{\lambda,n})^b F.$$

Posto $\beta_{n,m} = \frac{\lambda \|K_{\lambda,n}\|^{m+1}}{1 - \|K_{\lambda,n}\|}$, $m \geq 0$, fissato $n \geq n_0$, con n_0 sufficientemente grande, risulta

$$(17.14) \quad \|\Phi_n - \Phi_{n,m}\| \leq \beta_{n,m} \|F\|$$

e

$$(17.15) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_{n,m} = 0.$$

Si ha $\|\Phi_n - \Phi_{n,m}\| = \left\| \lambda \sum_{b=m+1}^{\infty} (K_{\lambda,n})^b F \right\| \leq \lambda \|F\| \sum_{b=m+1}^{\infty} \|K_{\lambda,n}\|^b$. Se n_0 è tale che $\|K_{\lambda,n}\| < 1$, per $n \geq n_0$, si ha: $\sum_{b=m+1}^{\infty} \|K_{\lambda,n}\|^b = \frac{\|K_{\lambda,n}\|^{m+1}}{1 - \|K_{\lambda,n}\|}$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} \|K_{\lambda,n}\|^{m+1} = 0$ cioè la (17.14) e la (17.15).

Dai Teoremi 17.8 e 17.9 e dalla diseuguaglianza (17.8) si deduce il seguente fondamentale Teorema:

17.10. Esiste una successione $\{\delta_{n,m}\}$ tale che, per $m \geq 0$ e $n \geq n_0$, con n_0 sufficientemente grande, risulta

$$\|\Phi - \Phi_{n,m}\| \leq \delta_{n,m} \|F\| \quad e \quad \lim_{n,m \rightarrow \infty} \delta_{n,m} = 0.$$

La successione $\delta_{n,m}$ è esplicitamente calcolabile.

Dai Teoremi 17.10 e 17.7 si ottiene il seguente:

17.11. Sia $U = \Gamma F$ (Γ operatore di Green) la soluzione del problema (17.1), con $\gamma \geq \gamma_0$. Fissati $s \geq 1$, $m \geq 0$, $n \geq n_0$, con n_0 opportunamente grande, è possibile costruire una successione di operatori $\{\Gamma_{s,n,m}\}$ di $L^2(A)$ in $H_1(A)$ e due successioni

$\{\varepsilon_{s,n,m}\}$ e $\{\eta_{s,n,m}\}$ tali che $\|IF - \Gamma_{s,n,m}F\| < \varepsilon_{s,n,m}\|F\|$, $\|IF - \Gamma_{s,n,m}F\|_H < \eta_{s,n,m}\|F\|$;
 $\lim_{s,n,m \rightarrow \infty} \varepsilon_{s,n,m} = 0$, $\lim_{s,n,m \rightarrow \infty} \eta_{s,n,m} = 0$.

Si ha, infatti,

$$(17.16) \quad \Gamma_{s,n,m}F = \mathcal{G}_s \Phi_{n,m} \quad \forall n \geq 1, \quad m \geq 0, \quad s \geq 1$$

con la successione $\{\Phi_{n,m}\} \subset L^2(A)$ definita in (17.13) e gli operatori $\{\mathcal{G}_s\}$, di $L^2(A)$ in $\dot{H}_1(A)$, costruiti nelle sezioni 9 e 16 (cfr. Teorema 17.1). Dal Teorema 17.2 risulta $U = G\Phi$ con Φ definita in (17.7). Quindi, tenendo presente la (17.16), i Teoremi 17.1, 17.5 e 17.10:

$$\|IF - \Gamma_{s,n,m}F\| \leq \|G - \mathcal{G}_s\| \|\Phi\| + \|\mathcal{G}_s\| \|\Phi - \Phi_{n,m}\| < \left[\frac{\lambda \varepsilon_s}{1 - \|K_\lambda\|} + \|\mathcal{G}_s\| \delta_{n,m} \right] \|F\|.$$

Il calcolo di $\|\mathcal{G}_s\|$ si riconduce al calcolo del primo autovalore del PCO $\mathcal{G}_s$ di $L^2(A)$, cosa che è possibile fare applicando a $\mathcal{G}_s$ il metodo degli Invarianti Ortogonali.

Analogamente si ottiene: $\|IF - \Gamma_{s,n,m}F\|_H < [\lambda \eta_s / (1 - \|K_\lambda\|) + \|\mathcal{G}_s\| \delta_{n,m}] \|F\|$.

Ragionando come nella sezione 16 si dimostra che è sempre possibile determinare una costante $C > 0$, che dipende da A , tale che $\|\mathcal{G}_s\| \leq C \|\mathcal{G}_s\|^{1/2}$. Ciò rende del tutto esplicita anche quest'ultima maggiorazione.

18. COSTRUZIONE DELLA SOLUZIONE DI (17.1) PER ALTRI VALORI DI γ

Abbiamo visto nella sezione precedente che, nell'ipotesi che sia $\gamma \geq \gamma_0$, il problema (17.1) ammette una e una sola soluzione che è possibile costruire esplicitamente (cfr. Teorema 17.11). In questa sezione faremo vedere che ciò è possibile anche per altri valori del parametro γ .

Riscriviamo il problema (17.1) in modo equivalente:

$$(18.1) \quad \int_A [a_{ij}(x) U_{x_i} V_{x_j} + b_i(x) U_{x_i} V + c(x) UV + \gamma_0 UV - \sigma UV] dx = \int_A F(x) V(x) dx,$$

$$U \in \dot{H}_1(A), \quad F \in L^2(A), \quad \forall V \in \dot{H}_1(A),$$

avendo posto $\sigma = \gamma_0 - \gamma$.

Per il Teorema 17.6 esiste una e una sola soluzione $U \in \dot{H}_1(A)$ del seguente problema:

$$(18.2) \quad \int_A [a_{ij}(x) U_{x_i} V_{x_j} + b_i(x) U_{x_i} V + c(x) UV + \gamma_0 UV] dx = \int_A \Psi(x) V(x) dx,$$

$\forall V \in \dot{H}_1(A)$, data $\Psi \in L^2(A)$. Sia $U = \Gamma\Psi$. Per la teoria sviluppata nella sezione 17 si può supporre che l'operatore di Green Γ sia esplicitamente calcolabile.

Si dimostra immediatamente che:

18.1. Se U è soluzione dell'equazione (18.1), posto $\Psi = \sigma U + F$, la Ψ è soluzione in $L^2(A)$ dell'equazione

$$(18.3) \quad \Psi - \sigma \Gamma \Psi = F;$$

Γ è l'operatore che fornisce la soluzione di (18.2).

Viceversa se Ψ è soluzione di (18.3), posto $U = \Gamma\Psi$, la U è soluzione di (18.1).

Il problema (18.1) è dunque equivalente a determinare la soluzione in $L^2(A)$ dell'equazione (18.3).

Sussiste il seguente ben noto Teorema (cfr. [41]):

18.2. Se indichiamo con $r_\sigma(\Gamma)$ il raggio spettrale della trasformazione Γ e poniamo

$$(18.4) \quad \sigma_0 = 1/r_\sigma(\Gamma),$$

l'equazione (18.3) ammette una e una sola soluzione per ogni σ : $|\sigma| < \sigma_0$. Tale soluzione è data da

$$(18.5) \quad \Psi = \sum_{b=0}^{\infty} \sigma^b \Gamma^b F.$$

σ_0 è il raggio di convergenza della serie di potenze a secondo membro di (18.5).

Come ovvia conseguenza del Teorema 18.2 si ha che se γ è tale che $\gamma_0 - \sigma_0 < \gamma < \gamma_0 + \sigma_0$ il problema (18.1) ammette una e una sola soluzione U . Essa è data da

$$(18.6) \quad U = \Gamma\Psi, \quad \Psi = \sum_{b=0}^{\infty} (\gamma_0 - \gamma)^b \Gamma^b F.$$

Il raggio spettrale $r_\sigma(\Gamma)$ è caratterizzato da

$$(18.7) \quad r_\sigma(\Gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Gamma^k\|^{1/k}.$$

Dall'essere $\|\Gamma^k\| \leq \|\Gamma\|^k$ ($\forall k \geq 1$) segue che $r_\sigma(\Gamma) \leq \|\Gamma\|$. Quindi, dato che $r_\sigma(\Gamma^k) = [r_\sigma(\Gamma)]^k$, si ha

$$(18.8) \quad r_\sigma(\Gamma) \leq \|\Gamma^k\|^{1/k} \quad (\forall k \geq 1).$$

Fissato $n \geq 1$ e posto

$$F^{(n)} = \sum_{b=0}^{n-1} \sigma^b \Gamma^b F$$

è immediato verificare che la (18.3) è perfettamente equivalente alla seguente equazione $\Psi = \sigma^n \Gamma^n \Psi + F^{(n)}$, $\Psi \in L^2(A)$, la quale ha, quindi, una e una sola soluzione per $|\sigma| < \sigma_0$.

Sia $|\sigma| < \sigma_0$. Per (18.7) e (18.8) esiste un indice $\nu \geq 1$ tale che:

$$(18.9) \quad |\sigma| < \frac{1}{\|\Gamma^\nu\|^{1/\nu}} \leq \sigma_0.$$

Consideriamo l'equazione

$$(18.10) \quad \Psi = \sigma^\nu \Gamma^\nu \Psi + F^{(\nu)}, \quad \Psi \in L^2(A).$$

La soluzione Ψ è data da

$$(18.11) \quad \Psi = \sum_{b=0}^{\infty} (\sigma^\nu \Gamma^\nu)^b F^{(\nu)}.$$

La soluzione del problema (18.3) può quindi scriversi nel modo seguente:

$$(18.12) \quad \Psi = \sum_{b=0}^{\infty} (\sigma^\nu I^\nu)^b \sum_{k=0}^{\nu-1} (\sigma I^\nu)^k F.$$

Posto $C_I^{(\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu-1} (|\sigma| \|I^\nu\|)^k$, si ha che

$$(18.13) \quad \|F^{(\nu)}\| \leq C_I^{(\nu)} \cdot \|F\|.$$

Quindi per Ψ soluzione di (18.3), definita in (18.12), si ottiene

$$(18.14) \quad \|\Psi\| \leq \frac{C_I^{(\nu)}}{1 - |\sigma|^\nu \|I^\nu\|} \|F\|.$$

Dal Teorema 17.11 segue che, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, è possibile costruire esplicitamente un operatore Γ_ε , di $L^2(A)$ in $H_1(A)$, tale che sia

$$(18.15) \quad \|\Gamma - \Gamma_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Ci serviremo del seguente risultato:

18.3. Fissato $\varepsilon > 0$, sia

$$F_\varepsilon^{(\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \sigma^k \Gamma_\varepsilon^k F.$$

Risulta

$$(18.16) \quad \|F^{(\nu)} - F_\varepsilon^{(\nu)}\| < \varepsilon \alpha_\varepsilon \|F\|,$$

con

$$\alpha_\varepsilon = |\sigma| \sum_{k=0}^{\nu-1} k [|\sigma| (\|\Gamma_\varepsilon\| + \varepsilon)]^{k-1}.$$

La quantità α_ε è esplicitamente calcolabile.

Si ha $\|F^{(\nu)} - F_\varepsilon^{(\nu)}\| \leq \|F\| \sum_{k=0}^{\nu-1} \|(\sigma I^\nu)^k - (\sigma \Gamma_\varepsilon)^k\|$. Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 17.8 e tenendo conto della (18.15) si ottiene che $\|I^{rk} - (\Gamma_\varepsilon)^k\| \leq \|\Gamma - \Gamma_\varepsilon\| \sum_{i=1}^k \|\Gamma_\varepsilon\|^{k-i} \|I^\nu\|^{i-1} < \|\Gamma - \Gamma_\varepsilon\| k (\|\Gamma_\varepsilon\| + \varepsilon)^{k-1} < \varepsilon k (\|\Gamma_\varepsilon\| + \varepsilon)^{k-1}$ da cui segue la (18.16).

Per (18.9) risulta $|\sigma|^\nu \|I^\nu\| < 1$. È quindi possibile determinare $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo in modo che sia $|\sigma|^\nu \|\Gamma_\varepsilon^\nu\| < 1$. D'ora in avanti supporremo ε scelto in tal modo.

Sussiste il seguente Teorema:

18.4. Sia $\Psi_\varepsilon = \sum_{b=0}^{\infty} (\sigma^\nu \Gamma_\varepsilon^\nu)^b F_\varepsilon^{(\nu)}$.

Posto

$$\beta_\varepsilon = \frac{\alpha_\varepsilon}{1 - |\sigma|^\nu \|I^\nu\|} + \frac{C_{\Gamma_\varepsilon}^{(\nu)} \nu (\|\Gamma_\varepsilon\| + \varepsilon)^{\nu-1} |\sigma|^\nu}{(1 - |\sigma|^\nu \|I^\nu\|)(1 - |\sigma|^\nu \|\Gamma_\varepsilon^\nu\|)}$$

risulta $\|\Psi - \Psi_\varepsilon\| \leq \varepsilon \beta_\varepsilon \|F\|$. La quantità β_ε è esplicitamente calcolabile.

Risulta

$$\|Y^r - Y_\varepsilon^r\| \leq \|F^{(\nu)} - F_\varepsilon^{(\nu)}\| \sum_{b=0}^{\infty} \|\sigma^{\nu} \Gamma^{\nu}\|^b + \|F_\varepsilon^{(\nu)}\| \sum_{b=0}^{\infty} \|(\sigma^{\nu} \Gamma^{\nu})^b - (\sigma^{\nu} \Gamma_\varepsilon^{\nu})^b\|$$

e, tenendo conto di (18.9), (18.13) e (18.16),

$$\|Y^r - Y_\varepsilon^r\| \leq \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon \|F\|}{1 - |\sigma|^{\nu} \|\Gamma^{\nu}\|} + C_{\Gamma_\varepsilon}^{(\nu)} \|F\| \sum_{b=0}^{\infty} \|(\sigma^{\nu} \Gamma^{\nu})^b - (\sigma^{\nu} \Gamma_\varepsilon^{\nu})^b\|.$$

Si ha (cfr. Teorema 18.3) che

$$(18.17) \quad \|\Gamma^{\nu} - \Gamma_\varepsilon^{\nu}\| \leq \|\Gamma - \Gamma_\varepsilon\| \nu (\|\Gamma_\varepsilon\| + \varepsilon)^{\nu-1} < \varepsilon \nu (\|\Gamma_\varepsilon\| + \varepsilon)^{\nu-1}$$

e quindi $\|\Gamma_\varepsilon^{\nu}\| - \varepsilon \nu (\|\Gamma_\varepsilon\| + \varepsilon)^{\nu-1} < \|\Gamma^{\nu}\| < \|\Gamma_\varepsilon^{\nu}\| + \varepsilon \nu (\|\Gamma_\varepsilon\| + \varepsilon)^{\nu-1}$. Ciò rende la quantità $\|\Gamma^{\nu}\|$ esplicitamente calcolabile.

Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 17.8, e tenendo conto della (18.17), si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{b=0}^{\infty} \|(\sigma^{\nu} \Gamma^{\nu})^b - (\sigma^{\nu} \Gamma_\varepsilon^{\nu})^b\| &\leq \frac{|\sigma|^{\nu} \|\Gamma^{\nu} - \Gamma_\varepsilon^{\nu}\|}{(1 - |\sigma|^{\nu} \|\Gamma^{\nu}\|)(1 - |\sigma|^{\nu} \|\Gamma_\varepsilon^{\nu}\|)} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon \nu (\|\Gamma_\varepsilon\| + \varepsilon)^{\nu-1} |\sigma|^{\nu}}{(1 - |\sigma|^{\nu} \|\Gamma^{\nu}\|)(1 - |\sigma|^{\nu} \|\Gamma_\varepsilon^{\nu}\|)}. \end{aligned}$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

Sia $q \geq 1$. Consideriamo la funzione $Y_{\varepsilon,q}^r = \sum_{b=0}^q (\sigma^{\nu} \Gamma_\varepsilon^{\nu})^b F_\varepsilon^{(\nu)}$.

18.5. *Posto*

$$\delta_{\varepsilon,q} = \frac{(|\sigma|^{\nu} \|\Gamma_\varepsilon^{\nu}\|)^{q+1}}{1 - |\sigma|^{\nu} \|\Gamma_\varepsilon^{\nu}\|} C_{\Gamma_\varepsilon}^{(\nu)}$$

risulta $\|Y_{\varepsilon,q}^r - Y_\varepsilon^r\| \leq \delta_{\varepsilon,q} \|F\|$ e $\lim_{q \rightarrow \infty} \delta_{\varepsilon,q} = 0$. $\delta_{\varepsilon,q}$ è esplicitamente calcolabile.

Infatti si ha

$$\|Y_{\varepsilon,q}^r - Y_\varepsilon^r\| \leq \sum_{b>q} (|\sigma|^{\nu} \|\Gamma_\varepsilon^{\nu}\|)^b \|F_\varepsilon^{(\nu)}\| \leq \frac{(|\sigma|^{\nu} \|\Gamma_\varepsilon^{\nu}\|)^{q+1}}{1 - |\sigma|^{\nu} \|\Gamma_\varepsilon^{\nu}\|} C_{\Gamma_\varepsilon}^{(\nu)} \|F\|.$$

Dai Teoremi 18.4 e 18.5 si ottiene il seguente:

18.6. È possibile determinare $\{\hat{\alpha}_{\varepsilon,q}\}$ in modo che sia

$$\|Y^r - Y_{\varepsilon,q}^r\| < \hat{\alpha}_{\varepsilon,q} \|F\| \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \hat{\alpha}_{\varepsilon,q} = 0.$$

Ciò consente la costruzione esplicita di $Y \in L^2(A)$, soluzione dell'equazione (18.3) e, insieme ai Teoremi 18.1 e 17.11, la costruzione della soluzione del problema (18.1).

Posto $LU = -[a_{ij}(x) U_{x_j}]_{x_i} + b_i(x) U_{x_i} + c(x) U$ si consideri il problema

$$(18.18) \quad \begin{cases} LU + \lambda U = F & \text{in } A, \\ U = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

ovviamente nel senso delle distribuzioni (soluzione debole).

Dall'analisi condotta si trae che per $\lambda \geq \gamma_0$ l'unica soluzione del problema (18.18) è data in (17.2) con Φ definita nello sviluppo in serie (17.7) assumendo $\lambda \equiv \gamma$.

Se è $\gamma_0 - \sigma_0 < \lambda < \gamma_0$ si ha sempre una e una sola soluzione e, posto $\lambda = \gamma_0 - \sigma$, essa è data da (18.6). In entrambi i casi abbiamo fatto vedere come si calcola la soluzione e si migliora l'errore di approssimazione.

RINGRAZIAMENTI

L'autrice ringrazia vivamente il Prof. G. Fichera per la guida e i consigli dati durante la preparazione di queste *Note*. Lavoro svolto con il finanziamento dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica «Francesco Severi», Roma.

BIBLIOGRAFIA

- [40] M. PICONE - G. FICHERA, *Corso di analisi matematica*. Ed. Veschi, vol. I e vol. II, 1987.
- [41] A. E. TAYLOR, *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley & Sons Inc., New York 1957.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 2 - 00185 ROMA