Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Ennio De Giorgi, Marco Forti, Giacomo Lenzi

Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **5** (1994), n.1, p. 11–22.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1994_9_5_1_11_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1994.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 5:11-22 (1994)

Logica matematica. — *Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica.* Nota di Ennio De Giorgi, Marco Forti e Giacomo Lenzi, presentata (*) dal Socio E. De Giorgi.

Abstract. — *Introducing basic theories for the Foundations of Mathematics.* Some basic theories of the Foundations of Mathematics are proposed, which take as primitive concepts the notions of natural number, collection, quality, operation and relation; the operations and relations we consider can be more or less complex: the natural number indicating the degree of complexity is called *arity*. A high degree of self- reference is reached in the theories we consider.

Key words: Foundations; Operation; Relation; System; Basic-theory.

Riassunto. — Vengono proposte alcune teorie base dei Fondamenti della Matematica che assumono come concetti primitivi i concetti di numero naturale, collezione, qualità, operazione e relazione; le operazioni e le relazioni considerate possono essere più o meno complesse: il numero naturale che indica il grado di complessità è detto *arietà*. Nelle teorie considerate è raggiunto un alto grado di autoreferenza.

0. Introduzione

Recentemente sono state proposte diverse teorie dei Fondamenti della Matematica, nelle quali si cercava di raggiungere un alto grado di autoreferenza e una presentazione dei diversi concetti matematici vicina alla comune intuizione e alla tradizione matematica (cfr. [8, 10-12, 14, 18, 19]). In particolare in queste teorie non si riducevano tutti i concetti matematici ad un unico concetto primitivo, ma si cercava piuttosto di introdurne diversi (numero, qualità, relazione, operazione, collezione) collegati da assiomi il più possibile vicini all'uso comune e alla tradizione matematica e tali da poter garantire il più alto grado possibile di autoriferimento della teoria stessa. Un'analisi critica di queste teorie ha messo in evidenza l'opportunità di separare un nucleo iniziale molto ridotto (che chiameremo «teoria base») su cui sia possibile «innestare» tutte le teorie matematiche note. Nelle teorie base che proponiamo in questa *Nota* ammettiamo per ogni intero n l'esistenza di oggetti aventi arietà n (intuitivamente l'arietà di un oggetto è l'indice della sua complessità). Per chi ricerchi possibili interpretazioni filosofiche della teoria base questo equivale ad ammettere l'esistenza di «realtà» molto complesse.

Le teorie base hanno il vantaggio di essere delle teorie abbastanza semplici sulla cui coerenza (cioè non contraddittorietà) non possono esistere dubbi, almeno per chi crede nella coerenza della parte più elementare dell'aritmetica. Questa sicurezza è un valido punto di partenza per la discussione sulla coerenza delle teorie matematiche più avanzate che possono essere innestate sulle teorie base. Infatti, una volta assunti gli assiomi di una teoria base, dovrebbe essere facile «innestare» in modo naturale su tale teoria le più complesse teorie matematiche (per esempio le varie teorie degli insiemi, le logiche modali, l'Analisi standard e quella non-standard, ecc.).

(*) Nella seduta del 18 giugno 1993.

Forse sulle stesse teorie base sarà possibile anche l'innesto di teorie non strettamente matematiche, e per facilitare la collaborazione a questa ricerca di studiosi di varie discipline scientifiche ed umanistiche, abbiamo cercato di presentare la teoria base in un linguaggio informale più vicino possibile al linguaggio comune; in altra sede (vedi [15]) si mostra che gli assiomi introdotti informalmente possono essere formalizzati nel linguaggio del Calcolo dei Predicati del primo ordine. Vi è infine la speranza, forse remota ma non manifestamente infondata, che sulle teorie base ora esposte possano in futuro «germogliare» teorie scientifiche e filosofiche interessanti ed originali. Per questo occorre notare che le teorie base sono teorie «qualitativamente aperte» che non escludono l'esistenza di oggetti «qualitativamente» diversi dagli oggetti fondamentali introdotti dalla teoria, cioè qualità, collezioni, numeri naturali, relazioni e operazioni. Possiamo dire che l'idea generale che ispira questo lavoro è la filosofia sostanzialmente antiriduzionista espressa da Shakespeare con le parole di Amleto a Orazio «vi sono più cose tra cielo e terra di quante ne sogni la tua filosofia» (Amleto, atto I, scena V). Osserviamo infine che questa *Nota*, pur tenendo conto di molte ricerche logico-matematiche precedenti, è scritta in forma del tutto autosufficiente in modo da poter esere letta e compresa perfettamente anche da chi ignora tutte le teorie fondazionali classiche e moderne citate in Bibliografia [1-7, 9, 13, 16, 17, 20-23] comprese le teorie dei fondamenti esposte in [8, 10-12, 14, 18, 19].

1. Qualità, collezioni, relazioni e operazioni

Nell'esposizione informale della nostra teoria chiamiamo *oggetti* tutte le entità di cui parla la teoria, assumiamo come *primitive* le nozioni di *qualità, collezione, relazione* (binaria, ternaria, ecc.) e *operazione* (semplice, binaria, ecc.) e adottiamo le seguenti notazioni:

se q è una *qualità* e x è un *oggetto*, scriviamo $q\,x$ per «*x gode della qualità q*»;

se C è una *collezione* e x è un *oggetto* scriviamo $x \in C$ per «*x appartiene alla collezione C*», oppure «*x è un elemento della collezione C*»; scriviamo $x \notin C$ per dire che x non appartiene alla collezione C;

se r è una *relazione binaria* e x e y sono due *oggetti*, scriviamo $r\,x\,y$ per «*x è nella relazione r con y*»; per esempio, la frase «Roma è più popolata di Frascati» esprime una relazione binaria r tra x, cioè Roma, e y, cioè Frascati;

se ρ è una *relazione ternaria* e x, y e z sono *oggetti*, scriviamo $\rho\,x\,y\,z$ per «*x è nella relazione ρ con y e z*»; un esempio è la frase «A Francesco piace più il formaggio del prosciutto» ove x è Francesco, y è il formaggio e z è il prosciutto;

se τ è una *relazione quaternaria* e x, y, ξ e η sono *oggetti*, scriviamo $\tau\,x\,y\,\xi\,\eta$ per «*x è nella relazione τ con y, ξ e η*»; un esempio è la frase «Roma è più vicina a Milano di quanto Parigi sia vicina a Mosca», con x = Roma, y = Milano, ξ = Parigi e η = Mosca.

Analogamente per una generica relazione n-aria α scriveremo $\alpha x_1 \ldots x_n$ per dire che gli oggetti $x_1, \ldots, x_n$ sono nella relazione α.

Passiamo alle operazioni, di cui si hanno importanti esempi anche nell'aritmetica elementare, come le operazioni binarie di addizione di due numeri, sottrazione e moltiplicazione, o l'operazione semplice che associa ad un numero n il suo successore $n + 1$. Notiamo che in generale, per operazioni con più di un argomento, il risultato dipende dall'ordine degli argomenti; per es. si consideri l'operazione binaria di potenza di numeri naturali, *Pot*, tale che $Pot\ m\ n = m^n$; si ha $Pot\ 2\,3 = 2^3 = 8$ che è diverso da $Pot\ 3\,2 = 3^2 = 9$.

Se f è un'*operazione semplice* e x e y sono *oggetti*, scriviamo $y = f x$ per «*l'operazione* f *trasforma* x *in* y»;

se φ è un'*operazione binaria* e x, y e z sono *oggetti*, scriviamo $z = \varphi\, x\, y$ per «*l'operazione* φ *prende prima l'oggetto* x*, poi l'oggetto* y *e dà come risultato* z».

Analogamente si procede per le operazioni h-arie con $h > 2$ scrivendo, per ogni operazione h-aria ψ, $w = \psi x_1 \ldots x_h$ se w è il risultato di ψ calcolata sugli argomenti $x_1, \ldots, x_h$.

2. Primi oggetti fondamentali

Tra gli oggetti di diversa specie considerati indichiamo ora alcuni «oggetti fondamentali» e diamo alcuni assiomi che ne precisano il ruolo nella teoria base. Introduciamo anzitutto alcune qualità corrispondenti ai tipi di oggetti considerati nel §1; questa corrispondenza è affermata dagli assiomi A1-A7.

Introduciamo anzitutto la qualità di essere una collezione, *Qcoll*:

A1. *Qcoll è una qualità; per ogni oggetto C si ha Qcoll C se e solo se C è una collezione.*

Analogamente procediamo per gli altri tipi di oggetti; la qualità di essere una relazione binaria è *Qrelb*:

A2. *Qrelb è una qualità; per ogni oggetto r si ha Qrelb r se e solo se r è una relazione binaria.*

La qualità di essere una relazione ternaria è *Qrelt*:

A3. *Qrelt è una qualità; per ogni oggetto* ρ *si ha Qrelt* ρ *se e solo se* ρ *è una relazione ternaria.*

La qualità di essere una relazione quaternaria è *Qrelq*:

A4. *Qrelq è una qualità; per ogni oggetto* τ *si ha Qrelq* τ *se e solo se* τ *è una relazione quaternaria.*

La qualità di essere un'operazione semplice è *Qops*:

A5. *Qops è una qualità; per ogni oggetto f si ha Qops f se e solo se f è un'operazione semplice.*

La qualità di essere un'operazione binaria è *Qopb*:

A6. *Qopb è una qualità; per ogni oggetto* φ *si ha Qopb* φ *se e solo se* φ *è un'operazione binaria.*

Infine abbiamo la qualità di essere una qualità, chiamata *Qqual*, caratterizzata dall'assioma seguente:

A7. *Qqual è una qualità; per ogni oggetto* q *si ha Qqual* q *se e solo se* q *è una qualità.*

Osserviamo che l'assioma A7 implica *Qqual Qqual*, cioè la qualità *Qqual* è goduta da se stessa; questo è il primo esempio di *autoriferimento* nella nostra teoria.

Il prossimo passo è l'introduzione di alcune *relazioni fondamentali* che descrivono il comportamento degli oggetti di arietà più bassa. Anzitutto introduciamo la *relazione fondamentale degli oggetti unari, Rfun*:

A8. *Rfun è una relazione binaria. Per ogni qualità* q *e per ogni oggetto* x *si ha Rfun* $q\ x$ *se e solo se* $q\ x$.

Per ogni collezione C *e per ogni oggetto* x *si ha Rfun* $C\ x$ *se e solo se* $x \in C$.

Come abbiamo fatto per gli oggetti unari introduciamo la *relazione fondamentale degli oggetti binari, Rfbin*:

A9. *Rfbin è una relazione ternaria. Per ogni relazione binaria* r *e per ogni* x, y *si ha Rfbin* $r\ x\ y$ *se e solo se* $r\ x\ y$.

Per ogni operazione semplice f *e per ogni* x, y *si ha: Rfbin* $f\ x\ y$ *se e solo se* $y = f\ x$.

Si noti che un'operazione semplice è in realtà un oggetto binario in quanto collega due oggetti, argomento e risultato. Analogamente consideriamo le operazioni binarie come oggetti ternari, ecc.

La terza relazione fondamentale è quella degli oggetti ternari. *Rfter*:

A10. *Rfter è una relazione quaternaria. Per ogni relazione ternaria* ρ *e per ogni* x, y, z *si ha Rfter* $\rho\ x\ y\ z$ *se e solo se* $\rho\ x\ y\ z$.

Per ogni operazione binaria φ *e per ogni* x, y, z *si ha Rfter* $\varphi\ x\ y\ z$ *se e solo se* $z = \varphi\ x\ y$.

Dopo l'introduzione di *Rfbin* e *Rfter* l'univocità delle operazioni semplici e binarie può essere espressa dall'assioma seguente:

A11. *Se* f *è un'operazione semplice allora Rfbin* $f\ x\ y$ *insieme a Rfbin* $f\ x\ y'$ *implica* $y = y'$. *Se* φ *è un'operazione binaria allora Rfter* $\varphi\ x\ y\ z$ *insieme a Rfter* $\varphi\ x\ y\ z'$ *implica* $z = z'$.

Relazioni ancora più complesse delle precedenti verranno introdotte in seguito, dopo i numeri naturali; in questo primo capitolo introduciamo solo altri oggetti molto semplici, cominciando dall'operazione identità, *Id*:

A12. *Id è un'operazione semplice. Per ogni oggetto* x *si ha Id* $x = x$.

Infine introduciamo la collezione universale, V, la collezione vuota, $\emptyset$, e la collezione delle collezioni, *Coll*:

A13. *V, $\emptyset$ e Coll sono collezioni. Per ogni oggetto x si ha $x \in V$, $x \notin \emptyset$, mentre $x \in Coll$ se e solo se x è una collezione.*

Dall'assioma precedente seguono le relazioni autoreferenziali $Coll \in Coll$, $V \in V$ e le relazioni di «mutua referenza» $V \in Coll$, $Coll \in V$.

Prima di enunciare l'assioma di estensionalità delle collezioni, introduciamo la consueta notazione dell'inclusione: se C, C' sono collezioni, scriviamo $C \subseteq C'$ se ogni oggetto appartenente a C appartiene anche a C'. Dopo di ciò diamo l'assioma di estensionalità:

A14. *Se C e C' sono collezioni, e si ha simultaneamente $C \subseteq C'$, $C' \subseteq C$ allora $C = C'$.*

3. Aritmetica elementare

Per inserire nella teoria base la parte più elementare dell'Aritmetica introduciamo anzitutto la collezione dei numeri naturali, che seguendo l'uso comune indicheremo con $\mathbf{N}$, e perciò cominciamo con l'enunciare l'assioma:

B1. *$\mathbf{N}$ è una collezione.*

Stabiliamo poi alcune notazioni utili per scrivere concisamente assiomi che riguardano operazioni. Se f è un'operazione semplice e x è un oggetto, scriviamo $f\uparrow x$ per «*esiste un y tale che $y = f x$*»; se φ è un'operazione binaria e x e y sono oggetti, scriviamo $\varphi\uparrow x\, y$ per «*esiste uno z tale che $z = \varphi\, x\, y$*». Se f è un'operazione semplice e y è un oggetto, scriviamo $f\downarrow y$ per «*esiste un x tale che $y = f x$*», infine se φ è un'operazione binaria e z è un oggetto, scriviamo $\varphi\downarrow z$ per «*esistono un x e un y tali che $z = \varphi\, x\, y$*».

Descriviamo poi alcune operazioni aritmetiche (addizione, moltiplicazione, sottrazione) cominciando dall'*addizione di due numeri naturali*, che chiameremo *Nadd*, per la quale diamo gli assiomi:

B2. *Nadd è un'operazione binaria.*

B3. *$Nadd\uparrow x\, y$ se e solo se $x \in \mathbf{N}$ e $y \in \mathbf{N}$. Se $Nadd\downarrow z$ allora $z \in \mathbf{N}$.*

Nella trattazione dell'operazione *Nadd* adottiamo l'usuale *notazione*: $x + y = Nadd\; x\, y$.

I seguenti assiomi esprimono alcune proprietà elementari dell'addizione:

B4. (*associatività*) $(x + y) + z = x + (y + z)$.

B5. (*commutatività*) $x + y = y + x$.

B6. (*proprietà del numero zero*) *Esiste $z \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $x \in \mathbf{N}$ si ha $x + z = x$.*

Lo z dell'assioma precedente risulta unico per l'assioma B5 e sarà denotato con l'usuale simbolo 0.

La seconda operazione fondamentale sui numeri naturali è la *moltiplicazione*, che indichiamo con *Nmult* e soddisfa gli assiomi seguenti:

B7. *Nmult è un'operazione binaria.*

B8. *Nmult*$\uparrow x\ y$ *se e solo se* $x \in \mathbf{N}$ *e* $y \in \mathbf{N}$. *Se Nmult*$\downarrow z$ *allora* $z \in \mathbf{N}$.

Nella trattazione dell'operazione *Nmult* adottiamo l'usuale *notazione*: $xy = Nmult\ x\ y$. I seguenti assiomi esprimono alcune proprietà elementari della moltiplicazione:

B9. (*associatività*) $(xy)z = x(yz)$.

B10. (*commutatività*) $xy = yx$.

B11. (*distributività rispetto alla somma*) $x(y + z) = (xy) + (xz)$

B12. (*proprietà del numero uno*) *Esiste* $u \in \mathbf{N}$ *tale che per ogni* $x \in \mathbf{N}$ *si ha* $ux = x$.

Il numero u dell'assioma precedente risulta unico per l'assioma B10 e sarà denotato con l'usuale simbolo 1. Come al solito poniamo $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ ecc.

Oltre alle operazioni di addizione e moltiplicazione, i numeri interi possiedono un ordinamento naturale, secondo il quale 0 precede 1, 1 precede 2, ecc.; a tale ordinamento ci si riferisce nella frase «x è *minore o uguale* a y». Perciò nella nostra teoria consideriamo la relazione *Nord* (l'*ordinamento naturale* dei numeri naturali) che soddisfa gli assiomi seguenti:

B13. *Nord è una relazione binaria. Se Nord* $x\ y$ *allora* $x \in \mathbf{N}$ *e* $y \in \mathbf{N}$.

Secondo l'uso comune scriviamo $x \leqslant y$ per *Nord* $x\ y$. Scriviamo inoltre $x < y$ per $x \leqslant y$ *ed* $x \neq y$.

Due prime proprietà di *Nord* sono le seguenti:

B14. (*connessione*) *Per ogni* x *e* y *appartenenti a* $\mathbf{N}$ *si ha* $x \leqslant y$ *oppure* $y \leqslant x$.

B15. (*antisimmetria*) *Se* $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant x$ *allora* $x = y$.

Diamo ora un assioma che collega *Nord* con *Nadd*:

B16. *Se* $x, y \in \mathbf{N}$ *allora* $x < y$ *se e solo se esiste un* $p \in \mathbf{N}$ *tale che* $p \neq 0$ *e* $y = x + p$.

Dagli assiomi precedenti segue:

1) *Nord* è transitiva, cioè per ogni $x, y, z \in \mathbf{N}$ se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ allora $x \leqslant z$,
2) per ogni $x, y \in \mathbf{N}$ *si ha* $x \leqslant y$ se e solo se esiste $h \in \mathbf{N}$ tale che $y = x + h$,
3) 0 è il *minimo* elemento di $\mathbf{N}$ rispetto a *Nord*, cioè $0 \leqslant x$ per ogni $x \in$ N.

Infine postuliamo che l'uno è il successore immediato dello zero:

B17. $0 < 1$ *e per nessuno* $z \in \mathbf{N}$ *si ha* $0 < z < 1$.

Accanto alla somma di numeri naturali possiamo considerare la sottrazione fatta nell'ambito dei naturali, *Nsub*, caratterizzata dai seguenti assiomi:

B18. *Nsub è un'operazione binaria.* $Nsub \uparrow x\ y$ *se e solo se* $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}$ *e* $y \leqslant x$. *Se* $Nsub \downarrow z$ *allora* $z \in \mathbf{N}$.

B19. $z = Nsub\ x\ y$ *se e solo se* $x = y + z$.

Adotteremo poi la solita notazione $N\ sub\ x\ y = x - y$. Osserviamo che la teoria dei numeri naturali ora esposta è molto debole (mancano per es. la divisione, la potenza, l'assioma d'induzione) ma è abbastanza forte per non possedere modelli finiti. Si potrebbero considerare teorie ancora più deboli, che posseggono modelli finiti, ma esse non sono comode come base su cui innestare il resto dell'Aritmetica.

4. Arietà e mutue referenze tra relazioni fondamentali

L'introduzione nel §3 dei primi elementi dell'Aritmetica consente di unificare ed estendere i concetti introdotti nel §2 e di formalizzare la nozione di «complessità» (o «arietà») usata informalmente nei §§1, 2. Anzitutto formalizziamo le nozioni generali di relazione e operazione (di arietà qualunque) mediante le due qualità *Qrel* e *Qop*:

C1. *Qrel e Qop sono qualità. Qrel x se e solo se x è una relazione. Qop x se e solo se x è un'operazione.*

Passiamo ora agli assiomi sull'arietà introducendo l'operazione *Ar* (e in particolare determiniamo l'arietà degli oggetti considerati nei §§1, 2, 3):

C2. *Ar è un'operazione semplice che gode delle proprietà seguenti*:

a) *Per* $x \in \mathbf{N}$ *si ha* $Ar\ x = 0$.

b) *Per ogni qualità* q *e per ogni collezione* C, $Ar\ q = Ar\ C = 1$.

c) *Sia* r *una relazione. Allora* $Ar\ r = h$ *se e solo se* r *è una relazione* h*-aria. In particolare* $Ar\ r = 2$ (3, 4) *se e solo se* r *è binaria* (*ternaria, quaternaria rispettivamente*).

d) *Sia* f *un'operazione. Allora* $Ar\ f = h + 1$ *se e solo se* f *è un'operazione* h*-aria. In particolare* $Ar\ f = 2$ (3) *se e solo se* f *è semplice* (*binaria rispettivamente*).

Osserviamo che gli assiomi che abbiamo introdotto escludono che un oggetto possa avere simultaneamente due arietà, essere p. es. sia una collezione che un'operazione, o una relazione sia binaria che ternaria. Invece non è finora escluso che un oggetto sia simultaneamente una qualità e una collezione, o una relazione binaria e un'operazione semplice, ecc. Non è neppure escluso che esistano oggetti la cui arietà non è un numero naturale. Infine non è escluso che oltre ai numeri naturali ci siano altri oggetti di arietà 0, oltre alle qualità e alle collezioni altri oggetti di arietà 1, ecc. Questa libertà può essere utile per l'«innesto» sulle teorie base dei diversi rami della Matematica, ed eventualmente di altre teorie non matematiche. Per esempio questa libertà potrebbe risultare utile a chi volesse innestare sulla teoria base le logiche infinitarie.

Volendo poi realizzare teorie abbastanza semplici ma ugualmente più ricche sul piano della complessità delle usuali teorie insiemistiche, che in sostanza ammettono solo oggetti di arietà 1, e di teorie tipo Lambda-Calcolo o algebre combinatorie e relazionali, che in sostanza trattano oggetti di arietà 2, stabiliamo che per ogni numero naturale h esiste almeno un oggetto di arietà h e che gli oggetti di arietà più alta descrivono l'azione degli oggetti di arietà più bassa. Introduciamo perciò l'operazione generatrice di relazioni fondamentali, *Rfond*:

C3. *Rfond è un'operazione semplice che gode delle proprietà seguenti*:

a) *Per ogni numero naturale* $h > 0$ *esiste* $Rfond\, h$ *ed è una relazione di arietà* $h + 1$.

b) $Rfond\ h\ \alpha x_1 \dots x_h$ *implica* $Ar\alpha = h$.

c) $Rfond\ 1 = Rfun$, $Rfond\ 2 = Rfbin$ *e* $Rfond\ 3 = Rfter$.

d) *Per ogni relazione* ρ *di arietà* h *e per ogni* $x_1, \dots, x_h$ *si ha*: $\rho x_1 \dots x_h$ *se e solo se* $(Rfond\, h)\ \rho x_1 \dots x_h$.

e) *Per ogni operazione* f *di arietà* $h + 1$ *e per ogni* $x_1, \dots, x_h, y$ *si ha* $(Rfond\,(h + 1))\ fx_1 \dots x_h y$ *se e solo se* $y = fx_1 \dots x_h$.

Osservazione. L'assioma C3 afferma l'esistenza di $Rfond\ h$ quando h è un numero naturale maggiore di 0 ma non esclude che *Rfond* sia definita anche su altri argomenti.

Spesso useremo la notazione: $\alpha \downarrow\uparrow x_1 \dots x_h$, da leggersi «$\alpha$ *agisce su* $x_1, \dots, x_h$» invece di $(Rfond\, h)\ \alpha x_1 \dots x_h$. Dagli assiomi segue che l'azione così definita è quella usuale per qualità, relazioni, operazioni e collezioni: ad es. per ogni qualità q e per ogni x si ha: $q \downarrow\uparrow x$ se e solo se qx.

Estendiamo anche la notazione dell'inclusione tra oggetti aventi la stessa arietà h ponendo $\alpha \subseteq \beta$ se, per ogni $z_1, \dots, z_h$, $\alpha \downarrow\uparrow z_1 \dots z_h$ implica $\beta \downarrow\uparrow z_1 \dots z_h$.

Estendiamo inoltre ad oggetti h-ari la notazione della freccia in alto e quella della freccia in basso, ponendo $\alpha \uparrow x_1 \dots x_{h-1}$ se esiste un x_h tale che $\alpha \downarrow\uparrow x_1 \dots x_h$ e $\alpha \downarrow x_h$ se esistono $x_1, \dots, x_{h-1}$ tali che $\alpha \downarrow\uparrow x_1 \dots x_h$. In particolare questo estende a tutti gli oggetti di arietà 2 le notazioni $\alpha \uparrow x$ e $\alpha \downarrow y$ introdotte nel §3 per le operazioni semplici. Partendo da tali notazioni possiamo esprimere l'univocità delle operazioni mediante l'assioma:

C4. *Se* f *è un'operazione di arietà* $h + 1$, $f \downarrow\uparrow x_1 \dots x_h y$, $f \downarrow\uparrow x_1 \dots x_h z$ *allora* $y = z$.

5. Sistemi finiti

La nozione di sistema finito che introduciamo in questo paragrafo comprende le nozioni di coppia ordinata, quaterna ordinata, ... n-upla ordinata, la nozione di sostituzione su un numero finito di elementi e vari altri concetti della Matematica e della vita comune ove vengono messi in relazione alcuni oggetti con alcuni indicatori. Per esempio si pensi al codice fiscale, alle targhe automobilistiche o alle etichette delle bottiglie di vino (quest'ultimo è un esempio di indicizzazione non univoca, se le etichette non sono numerate). I sistemi finiti hanno tutti arietà 2, e formano una collezione che indicheremo col simbolo *Sif*; tra essi vi sono i sistemi univoci, cioè quelli in cui l'indicatore (o indice) determina univocamente l'oggetto indicato, che formano la collezione *Siuf*. Possiamo quindi dare i primi assiomi sui sistemi finiti.

D1. *Sif e Siuf sono collezioni e* $Siuf \subseteq Sif$; *per ogni* $x \in Sif$ *si ha* $Ar\ x = 2$.

D2. (*Estensionalità di Sif*) *Se* $x, y \in Sif$, $x \subseteq y$, $y \subseteq x$ *allora* $x = y$.

D3. (*Caratterizzazione di Siuf*) $x \in Siuf$ *se e solo se* $x \in Sif$ *e inoltre, per ogni* y, z, z', *le due condizioni* $x \downarrow\uparrow yz$, $x \downarrow\uparrow yz'$ *implicano* $z = z'$.

Gli assiomi precedenti non garantiscono ancora l'esistenza di qualche sistema finito; per garantirla conviene introdurre il seguente assioma di esistenza di sistemi «singolari»:

D4. *Per ogni* x, y *esiste* $S \in Siuf$ *tale che* $S \uparrow z$ *se e solo se* $z = x$, *e* $S \downarrow t$ *se e solo se* $t = y$.

Osservazione. Per l'assioma di estensionalità il sistema considerato nell'assioma D4 è determinato da x e y e sarà indicato col simbolo $\binom{x}{y}$. Per introdurre accanto ai sistemi singolari altri sistemi più complessi e in particolare le coppie, terne, ecc. conviene introdurre l'operazione di unione di due oggetti binari. Essa sarà indicata con *Unb* e caratterizzata dal seguente assioma:

D5. *Unb è un'operazione binaria.* $Unb \uparrow xy$ *se e solo se* $Ar\ x = Ar\ y = 2$; *se* $z = Unb\ x\ y$ *allora* $Ar\ z = 2$ *e per ogni* u, v *si ha*: $z \downarrow\uparrow uv$ *se e solo se è verificata almeno una delle condizioni* $x \downarrow\uparrow uv$ *e* $y \downarrow\uparrow uv$. *Quando* $x, y \in Sif$, *anche* $Unb\ xy \in Sif$.

Anche per l'unione binaria possiamo usare le notazioni usuali e scrivere $x \cup y$ per $Unb\ x\ y$; in particolare, per l'estensionalità di *Sif*, se x, y sono sistemi finiti, si ha $x \subseteq y$ se e solo se $x \cup y = y$.

Oltre all'unione binaria agiscono sui sistemi finiti l'operazione semplice di inversione di sistemi, *Invs*, e l'operazione binaria di composizione di sistemi, *Comps*, caratterizzate dagli assiomi seguenti:

D6. *Invs è un'operazione semplice. Sono equivalenti le tre condizioni* : $Invs \uparrow x$, $Invs \downarrow x$, $x \in Sif$. *Per ogni* $x \in Sif$ *e per ogni* u, v *si ha* $(Invs\ x) \downarrow\uparrow uv$ *se e solo se* $x \downarrow\uparrow vu$.

Per l'estensionalità di *Sif* l'assioma determina univocamente per ogni sistema finito x il sistema inverso *Invs* x, che sarà indicato col simbolo x^{-1}.

Passando all'operazione *Comps* abbiamo l'assioma:

D7. *Comps è un'operazione binaria.* $Comps \uparrow xy$ *se e solo se* $x, y \in Sif$; $Comps \downarrow z$ *se e solo se* $z \in Sif$. $(Comps\ x\ y) \downarrow\uparrow uw$ *se e solo se esiste un* t *tale che* $x \downarrow\uparrow tw$ *e* $y \downarrow\uparrow ut$.

Anche in questo caso l'estensionalità di *Sif* ci assicura che la composizione di due sistemi finiti x, y è univocamente determinata dall'assioma D7: essa sarà indicata con l'usuale notazione $x \circ y$.

Seguendo le notazioni usuali nel caso delle n-uple, se x è un sistema univoco scriveremo $x_h = w$ per $x \downarrow\uparrow hw$. Diremo anche che h è un *indice* del sistema x quando $x \uparrow h$ e diremo che y è un *valore* del sistema x quando $x \downarrow y$. Useremo poi le notazioni mutuate dalla teoria dei gruppi di sostituzioni:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y \\ b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y \\ b \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix}, \text{ ecc.}$$

Osservazione. Componendo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ si ottiene il sistema vuoto (unico per l'assioma di estensionalità dei sistemi) che verrà indicato col simbolo $\emptyset_2$. Il simbolo è giustificato dall'analogia con la collezione vuota $\emptyset$: $\emptyset_2$ è un oggetto binario vuoto (ma non è detto che sia l'unico, potrebbero esserci ad esempio varie relazioni oppure operazioni vuote).

Casi particolari di sistemi univoci sono le 1-uple, cioè i sistemi del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, che indicheremo anche con $[x]$, le coppie ordinate $(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$, le terne $(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, ecc.

Introduciamo ora le collezioni V^n delle n-uple, definite dall'assioma seguente:

D8. *Per ogni n,* V^n *è una collezione. Alla collezione* V^0 *appartiene soltanto* $\emptyset_2$; *per ogni* $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$ *si ha* $x \in V^n$ *se e solo se* $x \in$ *Siuf e gli indici di x sono tutti e soli i numeri naturali da* 1 *a* n.

Conviene anche introdurre un assioma di esistenza di n-uple come il seguente:

D9. *Per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *esiste l'n-upla* $(1, \ldots, n)$.

Osservazione. Non avendo introdotto nelle teorie base alcun tipo di assioma d'induzione potremmo dimostrare *separatamente* i vari casi particolari dell'assioma D9 per $n = 1, 2, 3, \ldots$ ma non possiamo dimostrare in generale l'assioma stesso, che nelle teorie base appare quindi indipendentemente dagli altri assiomi.

Concludiamo questo paragrafo con un assioma che esprime la «finitezza» dei sistemi associando ad ogni sistema un numero naturale che funge da «cardinalità» del sistema:

D10. *Per ogni sistema s esistono un numero naturale n e due n-uple x, y tali che* $s = y \circ x^{-1}$. *Inoltre tra tali n ce n'è uno minimo.*

Tale numero minimo sarà detto *cardinalità* del sistema s e indicato col simbolo *Card s*. Si noti che la prima parte dell'assioma D10 non è sufficiente per dimostrare, a partire dagli assiomi del §3, l'esistenza di un *minimo n*, in quanto non abbiamo l'assioma di induzione. Sempre per la mancanza dell'assioma di induzione è opportuno introdurre il seguente assioma:

D11. *Sia* $s = y \circ x^{-1}$, $x, y \in V^n$; *allora Card* $s = n$ *se e solo per* $1 \leq i < j \leq n$ *si ha sempre* $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$.

Il significato dell'assioma D11 è il seguente: se n è la cardinalità di $s = y \circ x^{-1}$ allora s è unione di n sistemi singolari tra loro distinti $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Dagli assiomi D9, 10, 11 segue tra l'altro che gli interi da 1 a k non possono essere in corrispondenza biunivoca con quelli da 1 a h per $h \neq k$.

6. Le relazioni universali

Introduciamo ora un nuovo oggetto altamente autoreferente e di alto potere descrittivo che «assorbe» tutte le relazioni *Rfond* h, cioè l'operazione generatrice di relazioni universali *Runiv*, caratterizzata dall'assioma seguente:

E. *Runiv è un'operazione semplice avente le seguenti proprietà:*

a) *Se* $h \in \mathbf{N}$, $h > 0$ *e* $z =$ *Runiv* h *allora* z *è una relazione di arietà* $h + 2$.

b) *Se* (*Runiv* h)$\downarrow\uparrow x_1 \ldots x_h y t$ *allora* $x_i = i$ *per* $1 \leq i \leq h$.

c) *Se* (*Runiv* h)$\downarrow\uparrow 1 \ldots h y t$, *Ar* $y = k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, *allora* $t \in V^k$.

d) *Se Ar* $y = k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$ *allora* (*Runiv* h)$\downarrow\uparrow 1 \ldots h y (x_1 \ldots x_k)$ *se e solo se* $y \downarrow\uparrow x_1 \ldots x_k$.

L'idea ispiratrice delle teorie base è quella di garantire l'esistenza della relazione *Runiv* k per k abbastanza grande in modo che la *Runiv* k, che è dotata di un grandissimo e «pericoloso» contenuto autoreferenziale, abbia una complessità sufficiente per proteggere la teoria base, e gli «innesti» delle più note teorie matematiche che su di essa si possono compiere, dai rischi di antinomie dei tipi studiati in [8, 18, 19]. Perciò l'assioma fondamentale di una teoria base dipenderà da un prefissato numero naturale $\nu > 0$ e garantirà l'esistenza di *Runiv* k per $k \geq \nu$. Fissato quindi ν, ad esso associamo l'assioma:

F_ν. *Per ogni* $k \in \mathbf{N}$, *se* $k \geq \nu$ *allora esiste Runiv* k.

La teoria avente gli assiomi ABCDEF_ν sarà chiamata TB_ν (*teoria base* ν*-aria*). Come si mostrerà in [15], F_ν è la «chiave di volta» della teoria ed è essenziale per garantire la finita assiomatizzabilità e un alto grado di autodescrizione della teoria stessa. Notiamo che dalle condizioni $k \geq \nu > 0$ segue che *Runiv* k ha arietà maggiore di 2 e quindi non rischia di essere confuso con gli oggetti di arietà 0, 1 e 2 propri della Matematica tradizionale.

Ricerca parzialmente finanziata dai fondi 40% MURST «Logica Matematica e Applicazioni».

Bibliografia

[1] A. Asperti - G. Longo, *Categories, Types and Structures - An Introduction to Category Theory for the Working Computer Scientist.* Cambridge, Mass. 1991.

[2] H. P. Barendregt, *The Lambda-Calculus.* Amsterdam 1981.

[3] Y. Bar Hiller - A. A. Fraenkel - A. Levy, *Foundations of Set Theory.* Amsterdam 1973.

[4] M. Beeson, *Towards a computation system based on set theory.* Preprint, CSLI, Stanford 1987.

[5] J. BENABOU, *Fibered categories and the foundations of naïve category theory*. Journal of Symbolic Logic, 50, 1985, 10-37.

[6] M. BOFFA, *Sur la théorie des ensembles sans axiome de fondement*. Bull. Soc. Math. Belg., 21, 1969, 16-56.

[7] A. CHURCH, *Set theory with a universal set*. In: L. HENKIN *et al.* (eds.), *Proceedings of the Tarski Symposium*. Proc. of Symp. P. Math. XXV, Rhode Island 1974, 297-308.

[8] M. CLAVELLI - E. DE GIORGI - M. FORTI - V. M. TORTORELLI, *A selfreference oriented theory for the Foundations of Mathematics*. In: *Analyse Mathématique et applications. Contributions en l'honneur de Jacques-Louis Lions*. Parigi 1988, 67-115.

[9] H. B. CURRY - R. FEYS, *Combinatory Logic*. Amsterdam 1958.

[10] E. DE GIORGI, *Fondamenti della Matematica e teorie base: gli esempi delle teorie 7×2 e 7×5* (sunto di una conversazione). Lecce 1989, manoscritto.

[11] E. DE GIORGI - M. FORTI, *Una teoria-quadro per i fondamenti della matematica*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 79, 1985, 55-67.

[12] E. DE GIORGI - M. FORTI, *«5×7»: A Basic Theory for the Foundations of Mathematics*. Preprint di Matematica n. 74, Scuola Normale Superiore, Pisa 1990.

[13] S. FEFERMAN, *Constructive theories of functions and classes*. In: M. BOFFA *et al.* (eds.), *Logic Colloquium 1978*. Amsterdam 1979.

[14] M. FORTI - F. HONSELL, *Models of self-descriptive set theories*. In: F. COLOMBINI *et al.* (eds.), *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations - Essays in Honor of Ennio De Giorgi*. Boston 1989, 473-518.

[15] M. FORTI - G. LENZI, *Assiomi e modelli di teorie base dei Fondamenti della Matematica*. In preparazione.

[16] G. FREGE, *Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. Vol. I, Jena 1893; vol. II, Pohle, Jena 1903 (ristampato Olms, Hildesheim 1962).

[17] J. M. GLUBRECHT - A. OBERSCHELP - G. TODT, *Klassenlogik*. Zurigo 1983.

[18] G. LENZI, *Estensioni contradditorie della teoria Ampia*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 83, 1989, 13-28.

[19] G. LENZI - V. M. TORTORELLI, *Introducing predicates into a basic theory for the foundations of Mathematics*. Preprint di Matematica n. 51, Scuola Normale Superiore, Pisa, luglio 1989.

[20] W. V. O. QUINE, *New foundations for mathematical logic*. Amer. Math. Monthly, 44, 1973, 70-80.

[21] B. RUSSELL - A. N. WHITEHEAD, *Principia Mathematica*. Cambridge 1925.

[22] D. SCOTT, *Combinators and classes*. In: C. BÖHM (ed.), *λ-Calculus and Computer Science Theory*. LNCS, 37, Berlino 1975.

[23] J. VON NEUMANN, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*. J. f. Math., 154, 1925, 219-240.

E. De Giorgi, G. Lenzi:
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7 - 56126 PISA

M. Forti:
Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini»
Università degli Studi di Pisa
Via Bonanno, 25B - 56100 PISA