Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Giuliano Bratti

Un'osservazione sulla risolubilità formale delle equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **5** (1994), n.1, p. 23–25.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1994_9_5_1_23_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1994.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 5:23-25 (1994)

Analisi matematica. — *Un'osservazione sulla risolubilità formale delle equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti.* Nota di GIULIANO BRATTI, presentata (*) dal Socio G. Fichera.

ABSTRACT. — *A remark on formal solvability of P.D.E. with constant coefficients.* Let s be a formal series and $p = p(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ a partial differential operator, with constant coefficients. We say that s is a formal solution of $ps = 0$ if there exists $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ such that $\sum_q [f^{(q)}(0)/q!] z^q = s$ and $(p(D)f)^{(q)}(0) = 0$, $\forall q \in N^n$ $(z = (z_1, \dots, z_n))$. We give a characterization of formal solvability of p in terms of extension, like distributions, over all $\boldsymbol{R}^n$ of the elements of the space $\{u \in D'(\boldsymbol{R}^n - \{0\}) \colon p(-D)u = 0\}$.

KEY WORDS: Formal solvability of P.D.E.; Distributions; Formal solutions.

RIASSUNTO. — L'autore dà una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità formale degli operatori differenziali a coefficienti costanti, lineari, $p(D)$, in termini di prolungamento, come distribuzioni, delle $u \in D'(\boldsymbol{R}^n - \{0\})$, tali che $p(-D)u = 0$.

1) $\beta\colon C^\infty(\boldsymbol{R}^n) \to C[\![z]\!]$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, sia l'applicazione suriettiva definita dalla

$$\beta(f) = \sum_q (f^{(q)}(0)/q!) z^q ;$$

$p = p(D)$ sia un operatore lineare a coefficienti costanti (complessi).

DEFINIZIONE 1. *La s di $C[\![z]\!]$ è soluzione formale dell'equazione $p(s) = 0$ se e solo se esiste una f in $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ tale che $\beta(f) = s$ e $\beta(p(D)f) = 0$.*

Se S_p è lo spazio delle soluzioni formali della $p(s) = 0$, ovviamente si ha $\beta(\mathrm{Ker}\,(p(D))) \subset S_p$.

DEFINIZIONE 2. *L'equazione $p(s) = 0$ si dice formalmente risolubile se e solo se si ha*

$$\beta(\mathrm{Ker}\,(p(D))) = S_p \,. \tag{1}$$

M. Nacinovich [3] ha caratterizzato gli operatori p che realizzano la (1) in questo modo: sia $V(p) = [z \text{ in } C^n \colon p(z) = 0]$; ebbene, la (1) è vera se e solo se

(2) $\forall(c, m, A)$ in $\boldsymbol{R}^3_+$ $\exists(c', m')$ in $\boldsymbol{R}^2_+$ tale che ogni q in $C[z]$ che soddisfa la $|q(z)| \leqq c(1 + |z|)^m e^{A|\mathrm{Im}\, z|}$, z in $V(p)$ soddisfa anche la $|q(z)| \leqq c'(1 + |z|)^{m'}$, z in $V(p)$.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1993.

La (2) è conseguenza del teorema sulle suriezioni fra spazi di Frechét [1], nonché del Th. 8.2 di [1, pag. 367], sul prolungamento di certe stime di crescenza per funzioni intere sulle $V(p)$ a tutto C^n.

2) Questa (breve) *Nota* mette in luce un legame fra la risolubilità formale (Def. 2) della $p(s) = 0$ e la possibilità di prolungare, come distribuzioni su tutto $\boldsymbol{R}^n$, ogni elemento di $D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n \sim (0)) = [u \text{ in } D'(\boldsymbol{R}^n \sim (0)) \colon p(-D)u = 0]$ [2].

3) E sia una soluzione fondamentale di $p(-D)$: $p(-D)E = \delta$; sia $Q(E) = [q(D)E, \forall q(z) \text{ in } C[z]]$, e sia Φ_E lo spazio definito da $\Phi_E = \langle Q(D)E + D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n)\rangle \subset D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$.

Φ_E è denso in $D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$: se la φ sta in $C_c^\infty(R^n \sim (0))$ ed è ortogonale a Φ_E deve esser $\varphi = p(D)\psi$ con ψ in $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n) \wedge \mathrm{Ker}(\beta)$, poiché φ è ortogonale a $D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n)$ ed inoltre per ogni $q(z)$ in $C[z]$ si ha $\langle q(D)E, \psi\rangle = 0$.

Ora, $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$ è denso in $\mathrm{Ker}(\beta)$ e dunque $\psi = \lim_n \psi_n$, ψ_n in $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$; se la u sta in $D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$ si ha

$$\langle u, \varphi\rangle = \lim_n \langle u, p(D)\psi_n\rangle = \lim_n \langle p(-D)(v_n u), \psi_n\rangle = 0,$$

non appena le v_n stanno in $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$ e sono eguali a 1 sul supporto delle ψ_n.

Teorema 1. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

p_1) *l'equazione $p(s) = 0$ è formalmente risolubile, cioè*: $\beta(\mathrm{Ker}(p(D))) = S_p$;

p_2) $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n \sim (0)) \subset p(D)(\mathrm{Ker}(\beta))$; *ed inoltre*: *ogni elemento di* $D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$ *è prolungabile in* $D'(\boldsymbol{R}^n)$;

p_3) $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n \sim (0)) \subset p(D)(\mathrm{Ker}(\beta))$; *ed inoltre: ogni elemento della chiusura, in* $D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$, *di* $Q(E)$ *è prolungabile in* $D'(\boldsymbol{R}^n)$.

Dimostrazione. p_1) *implica* p_2).

Tenendo presente la [1] la prima parte della p_2) è ovvia.

Dimostriamo che: se la $u = \lim_j (q_j(D)E + h_j)$ di $D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$ non ha prolungamento in $D'(\boldsymbol{R}^n)$ si ha un assurdo.

Scelta la φ in $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ tale che $\varphi(x) = 1$ se $|x| \geqq 1$ e $\varphi(x) = 0$ se $|x| \geqq 2$, si ponga $\mu_0 = p(-D)(\varphi u)$ e $\mu_j = \varphi(q_j(D)E + h_j)$, ove si intende che la μ_0 sia prolungata sullo 0 come zero. Si ha: $p(-D)\mu_j = q_j(D)\delta + \lambda_j$ con $1 \leq |\mathrm{supp}(\lambda_j)| \leq 2$.

Se la f sta in $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ e la ψ di $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$ è eguale a 1 sul supporto delle λ_j, si ha: $\langle \mu_0, f\rangle = \langle \mu_0, (\psi f)\rangle = \langle p(-D)(\varphi u), (\psi f)\rangle = \langle \lim_j p(-D)\mu_j, (\psi f)\rangle$, poiché (ψf) sta in $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$; e dunque $\langle \mu_0, f\rangle = \lim_j \langle q_j(D)\delta + \lambda_j, (\psi f)\rangle = \lim_j \langle \lambda_j, f\rangle$, visto che la (ψf) sta in $\mathrm{Ker}(\beta)$.

[1] Si noti che la (1) è equivalente alla $p(D)(\mathrm{Ker}(\beta)) = \mathrm{Ker}(\beta)$ e che quest'ultima equivale al fatto che lo spazio $p(-D)E'(\boldsymbol{R}^n) + E'(0)$ sia chiuso in $E'(\boldsymbol{R}^n)$, dove $E'(0) = [q(D)\delta, \forall q(z) \text{ in } C[z]]$; di qui si ricava che se $\lim_n p(-D)v_n + q_n(D)\delta = \rho$ in $E'(\boldsymbol{R}^n)$, per ogni z in $V(p)$ si ha $\lim_n q_n(z) = \hat{\rho}(z)$ che dà $|q_n(z)| \leqq c(1 + |z|)^m e^{A|\mathrm{Im}\, z|}$; ecc.

[2] t_p è il trasposto di p: $t_p(D) = p(-D)$.

Ciò dimostra che $\lim_j (p(-D)\mu_j - q_j(D)\delta) = \mu_0$ in $E'(\boldsymbol{R}^n)$; per la p_1) si ha $\mu_0 = p(-D)\nu_0 + q_0(D)\delta$, che dà: se $A = [x$ in $\boldsymbol{R}^n$: $0 < |x| < 1]$ e se α sta in $C_c^\infty(A)$

$$\langle u, \alpha\rangle = \langle u, p(D)f\rangle = \langle \lim_j \mu_j, p(D)f\rangle = \lim_j \langle q_j(D)\delta + \lambda_j, f\rangle = \langle \mu_0, f\rangle =$$
$$= \langle p(-D)\nu_0 + q_0(D)\delta, f\rangle = \langle \nu_0, \alpha\rangle, \qquad p(D)f = \alpha\,, \ f \text{ in } \operatorname{Ker}(\beta)\,,$$

e quindi $u = \nu_0$ su $C_c^\infty(A)$, contro l'assunzione che la u non fosse prolungabile in $D'(\boldsymbol{R}^n)$.

p_2) *implica* p_3): ovvio.

p_3) *implica* p_1).

Dimostriamo che $p(-D)E'(\boldsymbol{R}^n) + E'(0)$ è chiuso in $E'(\boldsymbol{R}^n)$: in virtù della (1), la dimostrazione sarà conclusa.

Si abbia $\lim_n p(-D)\mu_n + q_n(D)\delta = \lambda$ in $E'(\boldsymbol{R}^n)$; se la φ sta in $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$, per la prima parte della p_3) si può scrivere $\varphi = p(D)f$, con f in $\operatorname{Ker}(\beta)$; si ha: $\lim_n \langle \mu_n, \varphi\rangle = = \lim_n \langle p(-D)\mu_n + q_n(D)\delta, f\rangle = \langle \lambda, f\rangle$; ciò dimostra che la successione delle μ_n è limitata nello spazio di Montel $D'(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$ e quindi si può supporre direttamente che sia $\lim_n \mu_n = \mu_0$ con $p(-D)\mu_0 = \lambda$ in $D'(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$, cioè $\mu_0 + \lim_n q_n(D)E = \mu_0 + + u = \lambda \times E$ sempre in $D'(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$. Poiché la u è prolungabile in $D'(\boldsymbol{R}^n)$ anche la μ_0 lo è; detto μ_0 un suo prolungamento, risulta $p(-D)\bar{\mu}_0 - \lambda = q_0(D)$.

OSSERVAZIONE 1. L'idea d'una connessione fra la risolubilità formale della $p(s) = 0$ e la possibilità di prolungare, come distribuzione su tutto $\boldsymbol{R}^n$ gli elementi di $D'_{t_p}(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$ nasce dall'ultima parte della dimostrazione precedente, nonché dal fatto che per gli operatori iperbolici p, per i quali si ha facilmente $p(D)(\operatorname{Ker}(\beta)) = \operatorname{Ker}(\beta)$, si può dimostrare [A. Kaneko, comunicazione personale] che ogni u in $D'_p(\boldsymbol{R}^n \sim (0))$ con $\operatorname{supp}(u) \subset \Gamma(p)$, [2, pag. 137], ha un prolungamento in $D'(\boldsymbol{R}^n)$.

Se p è ipoellittico, dalla caratterizzazione delle $V(p)$ di [2, pag. 99], e dalle (2) si deduce facilmente che $p(D)(\operatorname{Ker}(\beta)) \subsetneqq \operatorname{Ker}(\beta)$; lo stesso risultato si raggiunge per il tramite della p_2) (o della p_3)), notando che: p è d-ipoellittico, per qualche $d \geqq 1$, e che se $p(D)E = \delta$ la $\sum_n (1/n!^{1+d}) D_{x_1}^n E$ non è prolungabile in $D'(\boldsymbol{R}^n)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. E. BJÖRK, *Rings of Differential Operators*. North-Holland, 1979.

[2] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag, 1963.

[3] M. NACINOVICH, *Risolubilità formale di P.D.E.* Conferenza presso il Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, maggio 1990.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
Università degli Studi di Padova
Via Belzoni, 7 - 35131 PADOVA