
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE LINCEI CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

GIORGIO FERRARESE, DONATO BINI, GIANLUCA
GEMELLI

Connessioni adattate ad un Riferimento in Relatività Generale

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni,
Serie 9, Vol. 5 (1994), n.1, p. 89–102.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1994_9_5_1_89_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1994.

Teorie relativistiche. — *Connessioni adattate ad un Riferimento in Relatività Generale.* Nota (*) di GIORGIO FERRARESE, DONATO BINI e GIANLUCA GEMELLI, presentata dal Socio G. Grioli.

ABSTRACT. — *Connections adapted to a Reference frame in General Relativity.* The various approaches to define connections adapted to a Reference frame in General Relativity are considered in a unique framework. General adapted (both to the frame and the connection) Gravitational field is defined too.

KEY WORDS: Frame of reference; Connection; Gravitational field.

RIASSUNTO. — I vari metodi di definire connessioni adattate ad un Riferimento fisico vengono qui ricondotti ad un unico formalismo. Viene inoltre introdotta la nozione generale di campo gravitazionale affine adattato (sia al Riferimento che alla connessione).

1. INTRODUZIONE

Nell'ambito della Relatività Generale, si possono introdurre differenti connessioni, adattate o meno ad un prefissato Riferimento fisico, e in conseguenza differenti derivate covarianti, ciascuna caratterizzata da un preciso significato cinematico e geometrico, nonché privilegiata per un determinato tipo di applicazioni.

Il problema di introdurre il *campo gravitazionale relativo*, ad esempio, si riduce — come vedremo — a quello di definire una derivata temporale opportuna. Tale problema, studiato da C. Cattaneo negli anni '58-'63, si è poi prestato ad altre formulazioni, come quelle di G. Ferrarese ('63) ed E. Massa ('74). Recentemente R. T. Jantzen *et al.* hanno ricondotto queste trattazioni ad un unico formalismo.

In questo articolo procederemo ad un ulteriore sforzo di unificazione, generalizzando il concetto di derivata temporale e di campo gravitazionale associato, al caso di una connessione affine adattata qualsiasi. Introdurremo quindi la nozione generale di *campo gravitazionale affine, relativo ad un Riferimento*, comprendendo tutti i casi proposti in letteratura. Infine chiariremo il significato geometrico e le principali proprietà di alcune connessioni adattate di interesse speciale ed illustreremo la trattazione con esempi relativi a spazi-tempi noti.

2. RIFERIMENTI FLUIDI

Sia $\mathcal{V}_4$ la varietà spazio-temporale, dotata di metrica $g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ ⁽¹⁾, di segnatura $-+++$.

In Relatività Generale, come è noto, il punto di vista relativo si introduce mediante un fluido di riferimento. Le linee d'universo delle particelle del fluido costituiscono una congruenza I' , caratterizzata da un campo di vettori tangenti γ , unitari e del genere tempo: $\gamma \cdot \gamma = -1$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1993.

⁽¹⁾ Conveniamo che gli indici greci varino da 0 a 3 mentre quelli latini da 1 a 3.

Il campo γ , a sua volta, induce in $\mathcal{V}_4$ una struttura prodotto $1 \otimes 3$ ortogonale, nel senso che, localmente, lo spazio tangente è la somma diretta dello spazio lineare generato da γ e di uno spazio 3-dimensionale: la piattaforma «spaziale» Σ , ortogonale a γ . Chiamiamo *Riferimento fluido* indifferentemente Γ o la distribuzione $\{\Sigma\}$ delle piattaforme spaziali (o spazi fisici del Riferimento) [1, 2].

Consideriamo pertanto, in un dominio arbitrario $\Omega \in \mathcal{V}_4$, un Riferimento fluido. Sia $\{e_\alpha\}$ la *base naturale* dei vettori tangenti ad Ω , definita da coordinate x^α , e $\{e^\alpha\}$ la sua duale. Data la corrispondenza biunivoca tra vettori e forme, indotta dalla metrica, al generico vettore $V^\flat = V^\alpha e_\alpha$ corrisponde la forma $V^b = V_\alpha e^\alpha$, con $V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$, e viceversa. Quando però non dovremo distinguere tra le due rappresentazioni, intenderemo semplicemente $V = V^\alpha e_\alpha = V_\alpha e^\alpha$.

A partire dalla base naturale, si può introdurre una *base* (anonomata) *adattata al Riferimento* del tipo:

$$(1) \quad \tilde{e}_\alpha = \omega_{\tilde{\alpha}}{}^\beta e_\beta,$$

dove gli *shifters* $\omega_{\tilde{\alpha}}{}^\beta$ sono così definiti:

$$(2) \quad \omega_{\tilde{0}}{}^\beta = \gamma^\beta, \quad \omega_{\tilde{i}}{}^\beta = \delta_i^\beta - (\gamma_i / \gamma_0) \delta_0^\beta,$$

con l'ipotesi che $\gamma_0 \neq 0$. Nel seguito faremo uso anche dei *proiettori spaziale* $P_\Sigma = I + \gamma \otimes \gamma \equiv (\delta_\alpha^\beta + \gamma_\alpha \gamma^\beta)$ e *temporale* $P_\theta = -\gamma \otimes \gamma \equiv (-\gamma_\alpha \gamma^\beta)$.

La base (1) è *quasi-naturale* [11, 12]. Essa è costituita da tre vettori spaziali, $\tilde{e}_i \in \Sigma$, con i quali si costruisce la *metrica spaziale* $\gamma_{ik} = \tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_k$, ed uno temporale $\tilde{e}_0 = \gamma$.

Per un generico vettore V si ha indifferentemente $V = V^\alpha e_\alpha$, ovvero $V = \tilde{V}^\alpha \tilde{e}_\alpha$, con $\tilde{V}^\alpha = V^\mu \omega_{\mu}{}^{\tilde{\alpha}}$. Tale procedimento si estende, in maniera ovvia, ad un tensore di rango qualsiasi⁽²⁾.

Analogamente, alle derivate parziali ordinarie corrispondono le *derivate pfaffiane*:

$$(3) \quad \tilde{\partial}_\alpha = \omega_{\tilde{\alpha}}{}^\beta \partial_\beta.$$

Nel seguito indicheremo $\tilde{\partial}_0$ anche con ∂ .

Senza perdita di generalità, supporremo che le *coordinate* siano *adattate* o *interne al Riferimento*, e le indicheremo con y^α ; richiediamo cioè che il vettore della base naturale e_0 sia parallelo e concorde a γ :

$$(4) \quad \gamma^0 > 0, \quad \gamma^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)^{(3)}.$$

Tali coordinate sono definite a meno di trasformazioni del tipo

$$(5) \quad y^{0'} = y^{0'}(y^\alpha), \quad y^{i'} = y^{i'}(y^1, y^2, y^3),$$

con la condizione di *equiorientamento spaziale e temporale*:

$$\partial y^{0'} / \partial y^0 > 0, \quad \det \|\partial y^{i'} / \partial y^i\| > 0;$$

⁽²⁾ In generale si intende $\tilde{V}^\alpha \equiv V^{\tilde{\alpha}}$. Per un tensore, per esempio triplo, $A: A_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}{}^{\tilde{\gamma}} \equiv \omega_{\tilde{\alpha}}{}^\mu \omega_{\tilde{\beta}}{}^\nu \omega^{\tilde{\gamma}}{}_\sigma A_{\mu\nu}{}^\sigma$.

⁽³⁾ Passando da coordinate interne a coordinate generali, almeno dal punto di vista formale, non ci sono cambiamenti sostanziali; tuttavia, in coordinate arbitrarie, entrano in gioco degli accoppiamenti interessanti ([11, 12] nonché [16]).

esse costituiscono ovviamente un Gruppo continuo ad infiniti parametri. Trasformazioni del tipo (5) mutano i vettori della base adattata (1) nel modo seguente: $\tilde{e}_i = (\partial y^i / \partial y^{i'}) \tilde{e}_{i'}$, il che giustifica la definizione (2) degli shifters, nonché la dicitura *quasi naturale* per la base (1).

Siano $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\} = g^{\nu\mu} [\alpha\beta, \mu]$ i coefficienti della *connessione riemanniana*:

$$(6) \quad \partial_\alpha e_\beta = \left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\} e_\nu ;$$

per un vettore $V = V^\beta e_\beta$ si ha $\partial_\alpha V = (\nabla_\alpha V^\nu) e_\nu$, dove

$$\nabla_\alpha V^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha V^\nu + \left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\} V^\beta$$

è la *derivata covariante*. La connessione riemanniana, come è noto, gode delle proprietà di *simmetria* $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\} = 0$ e di *compatibilità con la metrica* $\partial_\alpha g_{\beta\nu} = 2[\alpha(\beta, \nu)]$. Essa inoltre è l'unica connessione a godere di entrambe queste proprietà.

Poiché la compatibilità equivale a: $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ (teorema di Ricci) risulta: $\partial_\alpha V = (\nabla_\alpha V_\nu) e^\nu = (\nabla_\alpha V^\nu) e_\nu$.

Indichiamo con $\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha\beta}^\nu$ i *coefficienti di rotazione di Ricci* relativi alla distribuzione anolonomica (1):

$$(7) \quad \tilde{\partial}_\alpha \tilde{e}_\beta = \tilde{\mathcal{R}}_{\alpha\beta}^\nu \tilde{e}_\nu .$$

Risulta $\tilde{\mathcal{R}}_{\alpha 0}^0 = 0$, ed in definitiva si ha il seguente quadro fondamentale [11, 12]:

$$(8) \quad \begin{cases} \partial \gamma = C, & \partial \tilde{e}_i = \tilde{C}_i \gamma + \tilde{H}_i^k \tilde{e}_k, \\ \tilde{\partial}_i \gamma = \tilde{H}_i^k \tilde{e}_k, & \tilde{\partial}_i \tilde{e}_k = \tilde{H}_{ik} \gamma + \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ i k \end{smallmatrix} \right\} \tilde{e}_j. \end{cases}$$

In esso intervengono tre ingredienti fondamentali: il tensore spaziale $H_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} (P_\Sigma)_\mu^\alpha (P_\Sigma)_\nu^\beta \nabla_\alpha \gamma_\beta = K_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu}$, con $K_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} H_{(\mu\nu)}$ e $\Omega_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} H_{[\mu\nu]}$, il quale riassume la *deformazione* e il *vortice propri del Riferimento*; il vettore spaziale $C_\nu \stackrel{\text{def}}{=} (P_\Sigma)_\nu^\alpha \gamma^\mu \nabla_\mu \gamma_\alpha$, il quale rappresenta, a sua volta, la *curvatura* delle linee di Γ , e infine i *simboli di Christoffel spaziali* $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i j \end{smallmatrix} \right\}$, costruiti con la metrica spaziale γ_{ik} e le derivate pfaffiane $\tilde{\partial}_i$.

Notiamo che, essendo H spaziale, si ha $\tilde{H}_{\alpha 0} = \tilde{H}_{0\alpha} = 0$, ovvero:

$$H = H_{\alpha\beta} e^\alpha \otimes e^\beta \equiv \tilde{H}_{ik} \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^k,$$

ed analogamente per C :

$$C = C_\alpha e^\alpha \equiv \tilde{C}_i \tilde{e}^i.$$

3. DERIVATA ADATTATA AD UN RIFERIMENTO

Una generica *connessione affine* $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}$ definisce in $\mathcal{V}_4$ il seguente operatore differenziale sui vettori $V^{\mathfrak{h}}$:

$$(9) \quad \overset{r}{\partial}_{\mu} V^{\mathfrak{h}} = \overset{r}{\nabla}_{\mu} V^{\beta} e_{\beta},$$

dove $\overset{r}{\nabla}_{\mu} V^{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mu} V^{\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} V^{\nu}$ indica la *derivata covariante* associata alla connessione Γ prefissata (generalmente dotata di torsione: $\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\rho} \neq 0$). Richiedendo per $\overset{r}{\nabla}_{\alpha}$ la validità delle usuali proprietà delle derivate, essa resta definita anche per le forme:

$$(10) \quad \overset{r}{\nabla}_{\alpha} V_{\beta} = g_{\nu\beta} \overset{r}{\nabla}_{\alpha} V^{\nu} - g_{\nu\beta} V_{\sigma} \overset{r}{\nabla}_{\alpha} g^{\nu\sigma} \equiv \partial_{\alpha} V_{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} V_{\rho}.$$

Naturalmente se la connessione è compatibile con la metrica risulta:

$$(11) \quad \Gamma_{\alpha(\beta\rho)} = [\alpha(\beta, \rho)],$$

e la derivata covariante, come nel caso riemanniano, commuta con l'innalzamento ed abbassamento degli indici: $\overset{r}{\partial}_{\alpha} V = (\overset{r}{\nabla}_{\alpha} V^{\beta}) e_{\beta} = (\overset{r}{\nabla}_{\alpha} V_{\beta}) e^{\beta}$.

Definiamo, analogamente alle (7), le *derivate anolonome fondamentali*:

$$(12) \quad \overset{r}{\partial}_{\mu} \tilde{e}_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\mu}^{\beta} \overset{r}{\partial}_{\beta} \tilde{e}_{\alpha} = \tilde{S}_{\mu\alpha}^{\sigma} \tilde{e}_{\sigma},$$

essendo $\tilde{S}_{\mu\alpha}^{\nu}$ i coefficienti di rotazione di Ricci associati alla connessione $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$. Se introduciamo il tensore di anolonomia del riferimento:

$$(13) \quad [\tilde{e}_{\mu}, \tilde{e}_{\nu}] = \tilde{C}_{\mu\nu}^{\rho} \tilde{e}_{\rho}, \quad \tilde{C}_{\mu\nu}^{\rho} \equiv 2\tilde{\partial}_{[\mu} \omega_{\nu]}^{\sigma} \omega_{\sigma}^{\rho},$$

dalle (2) si ha

$$(14) \quad [\tilde{e}_0, \tilde{e}_i] = \tilde{C}_i \tilde{e}_0, \quad [\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] = \tilde{\Omega}_{ij} \tilde{e}_0;$$

inoltre risulta [17]:

$$(15) \quad \tilde{S}_{\rho\mu\sigma} = \tilde{\mathcal{R}}_{\rho\mu\sigma} - (1/2)(\tilde{\nabla}_{\rho}^{\Gamma} \tilde{g}_{\mu\sigma} + \tilde{\nabla}_{\mu}^{\Gamma} \tilde{g}_{\sigma\rho} - \tilde{\nabla}_{\sigma}^{\Gamma} \tilde{g}_{\rho\mu}) + (1/2)(\tilde{T}_{\sigma\rho\mu} + \tilde{T}_{\rho\mu\sigma} - \tilde{T}_{\mu\sigma\rho}),$$

dove [17]

$$(16) \quad \tilde{\mathcal{R}}_{\rho\mu\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} [\rho\mu, \sigma] + (1/2)(\tilde{C}_{\sigma\rho\mu} + \tilde{C}_{\rho\mu\sigma} - \tilde{C}_{\mu\sigma\rho})$$

e $\tilde{T}_{\sigma\rho\mu} = 2\tilde{\Gamma}_{[\sigma\rho]\mu}^{\Gamma}$ è la torsione della connessione anolonomia $\tilde{\Gamma}$.

Se $\tilde{N}_{\mu\alpha}^{\nu} = \tilde{S}_{\mu\alpha}^{\nu} - \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\alpha}^{\nu}$ è la differenza tra i coefficienti di rotazione relativi rispettivamente a Γ e alla connessione riemanniana, da (15) e (16) risulta:

$$(17) \quad \tilde{N}_{\rho\mu\sigma} = -(1/2)(\tilde{\nabla}_{\rho}^{\Gamma} \tilde{g}_{\mu\sigma} + \tilde{\nabla}_{\mu}^{\Gamma} \tilde{g}_{\sigma\rho} - \tilde{\nabla}_{\sigma}^{\Gamma} \tilde{g}_{\rho\mu}) + (1/2)(\tilde{T}_{\sigma\rho\mu} + \tilde{T}_{\rho\mu\sigma} - \tilde{T}_{\mu\sigma\rho}).$$

Dalle (16) e (15) si hanno infine le relazioni:

$$(18) \quad \tilde{\mathcal{R}}_{[\rho\mu]\sigma} = (1/2) \tilde{C}_{\rho\mu\sigma}, \quad \tilde{\mathcal{S}}_{[\rho\mu]\sigma} = (1/2) \tilde{C}_{\rho\mu\sigma} + (1/2) \tilde{T}_{\rho\mu\sigma};$$

$\tilde{\mathcal{S}}_{[\mu\alpha]\nu}$ rappresenta pertanto la *torsione totale* della connessione, somma di $\tilde{T}_{[\mu\alpha]\nu}$ e della torsione di anolonomia.

Definiamo ora la *derivata adattata al Riferimento*, nozione introdotta recentemente da E. Massa [4-6], richiedendo per la relativa connessione le proprietà di

$$1) \text{ compatibilità con la metrica: } \tilde{\nabla}_\nu g_{\alpha\beta} = 0;$$

$$2) \text{ trasporto parallelo del vettore } \gamma: \tilde{\nabla}_\nu \gamma_\beta = 0.$$

Dalle 1) e 2) segue la conservazione della metrica spaziale $\tilde{\nabla}_\mu \gamma_{\alpha\beta} = 0$. Al tempo stesso la derivata adattata commuta con l'innalzamento ed abbassamento degli indici, e la (15) implica l'uguaglianza:

$$(19) \quad \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha(\beta\rho)} = \tilde{\mathcal{R}}_{\alpha(\beta\rho)}.$$

La derivata adattata gode inoltre della proprietà

$$(20) \quad \tilde{\partial}_\alpha^{\tilde{\Gamma}} \tilde{e}_\beta \cdot \gamma = 0,$$

dato che il primo membro non differisce da $\tilde{\partial}_\alpha^{\tilde{\Gamma}} (\tilde{e}_\beta \cdot \gamma) - \tilde{e}_\beta \cdot \tilde{\partial}_\alpha^{\tilde{\Gamma}} \gamma$ e, unitamente alla proprietà 2), le componenti $\tilde{\gamma}_\beta$ sono costanti.

La 2) e la (20) implicano, per i coefficienti di rotazione (12), le limitazioni

$$(21) \quad \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha 0}^\beta = \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}^0 = 0;$$

si che $\tilde{\mathcal{S}}_{[0\alpha]}^\beta = (1/2) \tilde{\mathcal{S}}_{0\alpha}^\beta$, $\tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha\beta]}^0 = 0$.

Pertanto, dalle (15) e (8) risulta direttamente

$$(22) \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{S}}_{0k}^i = \tilde{H}_k^i + \tilde{N}_{0k}^i = \tilde{K}_k^i + \tilde{Q}_k^i, & \tilde{Q}_k^i \equiv \tilde{N}_{0k}^i + \tilde{\Omega}_k^i, \\ \tilde{\mathcal{S}}_{ij}^k = \left\{ \tilde{k} \right\}_{ij}^k + \tilde{N}_{ij}^k, & \tilde{N}_{ijk} \equiv (1/2) (\tilde{T}_{kij} + \tilde{T}_{ijk} - \tilde{T}_{jki}), \end{cases}$$

dove, essendo $\tilde{K}_{ik} = (1/2) \partial \gamma_{ik} = (1/2) \partial (\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_k) = \tilde{\mathcal{R}}_{0(ik)}$, dalla (19) segue $\tilde{Q}_{(ik)} = 0$.

La derivata adattata gode ovviamente delle proprietà tipiche di una derivata; in particolare, per un campo scalare, l'operazione $\tilde{\partial}_\alpha^{\tilde{\Gamma}}$ si riduce alla derivata parziale ordinaria.

Vale inoltre la seguente proprietà fondamentale: per ogni vettore s spaziale ($s \cdot \gamma = 0$) il gradiente è ortogonale a γ :

$$(23) \quad \tilde{\partial}_\alpha^{\tilde{\Gamma}} s \cdot \gamma = 0.$$

3.1. Condizione di simmetria spaziale.

Se alla derivata adattata richiediamo di soddisfare l'ulteriore condizione

$$3) \text{ simmetria spaziale: } V^\alpha \overset{\Gamma}{\nabla}_\alpha W^\beta - W^\alpha \overset{\Gamma}{\nabla}_\alpha V^\beta = [V, W]^\beta, \quad \forall V, W \in \Sigma:$$

«derivata adattata priva di torsione spaziale», la torsione spaziale della connessione Γ si annulla e le relazioni precedenti si semplificano:

$$(24) \quad \begin{cases} \tilde{S}_{0k}^i = \tilde{K}_k^i + \tilde{Q}_k^i, \\ \tilde{S}_{ij}^k = \left\{ \widetilde{k} \right\}_{ij}, \quad \tilde{N}_{ijk} = 0. \end{cases}$$

4. DERIVATA VINCOLATA DI CATTANEO

Una particolare derivata adattata, priva di torsione spaziale, è quella *vincolata al Riferimento Γ* , introdotta da I. Cattaneo-Gasperini [10] e poi ripresa da C. Cattaneo [15]:

$$(25) \quad \overset{\perp}{\partial}_\alpha V \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha V - V \cdot \partial_\alpha \gamma \gamma + V \cdot \gamma \partial_\alpha \gamma,$$

essendo V un qualunque *campo vettoriale* di $\mathfrak{V}_4$. Per quanto riguarda invece i coefficienti $\overset{\perp}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\rho$ della connessione affine vincolata ($\overset{\perp}{\partial}_\alpha e_\beta = \overset{\perp}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\rho e_\rho$), risulta dalla (25) per $V = e_\beta$:

$$(26) \quad \overset{\perp}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\rho = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} - \nabla_\alpha \gamma_\beta \gamma^\rho + \gamma_\beta \nabla_\alpha \gamma^\rho.$$

La connessione vincolata si riduce a quella riemanniana se e solo se il Riferimento Γ è geodetico, rigido e irrotazionale [16]. Inoltre essa non è simmetrica, ovvero è dotata di torsione: $\overset{\perp}{\Gamma}_{[\alpha\beta]}^\rho \neq 0$; più precisamente, tenuto conto della decomposizione naturale di $\nabla_\alpha \gamma_\beta$ [16]:

$$(27) \quad \nabla_\alpha \gamma_\beta = H_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha C_\beta,$$

la (26) si scrive $\overset{\perp}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\rho = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} - (H_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha C_\beta) \gamma^\rho + \gamma_\beta (H_{\alpha}^\rho - \gamma_\alpha C^\rho)$, e pertanto:

$$(28) \quad \overset{\perp}{\Gamma}_{[\alpha\beta]}^\rho = -\Omega_{\alpha\beta} \gamma^\rho + \gamma_{[\alpha} C_{\beta]} \gamma^\rho + \gamma_{[\beta} H_{\alpha]}^\rho \neq 0.$$

Naturalmente valgono le (21), cioè:

$$(29) \quad \overset{\perp}{\nabla}_\alpha \gamma_\beta = 0, \quad \overset{\perp}{\nabla}_\rho g_{\alpha\beta} = 0.$$

In termini anolonomi si ha il seguente quadro, come risulta direttamente dalle (25)-(8):

$$(30) \quad \tilde{\partial}_\alpha^\perp \tilde{e}_0 = 0, \quad \tilde{\partial}_0^\perp \tilde{e}_i = \tilde{H}_i^j \tilde{e}_j, \quad \tilde{\partial}_j^\perp \tilde{e}_k = \left\{ \widetilde{l} \right\}_{jk} \tilde{e}_l,$$

cioè $\tilde{Q}_i^j = \tilde{\Omega}_i^j$, $\tilde{N}_{ij}^k = 0$.

La derivata vincolata ha inoltre un preciso *significato geometrico* in termini dei proiettori [10]:

$$(31) \quad \overset{\perp}{\nabla}_{\alpha} V_{\beta} = (P_{\Sigma})_{\beta}{}^{\mu} \nabla_{\alpha} (P_{\Sigma} V)_{\mu} + (P_{\theta})_{\beta}{}^{\mu} \nabla_{\alpha} (P_{\theta} V)_{\mu};$$

ciò che corrisponde alla definizione originaria di Cattaneo⁽⁴⁾.

Osserviamo infine che *la derivata vincolata coincide con la derivata di Fermi-Walker*, definita mediante l'omonimo trasporto lungo una linea $\mathcal{C}^+$ di I' :

$$(32) \quad \frac{D_{(FW)}}{ds} V^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D}{ds} V^{\alpha} - V^{\beta} (\gamma^{\alpha} C_{\beta} - C^{\alpha} \gamma_{\beta}) \equiv \gamma^{\mu} \nabla_{\mu(FW)} V^{\alpha},$$

dove s è l'ascissa curvilinea su $\mathcal{C}^+$ e $\gamma^{\alpha} = dy^{\alpha}/ds$, il versore tangente.

La (32) suggerisce la seguente definizione di derivata covariante:

$$(33) \quad \nabla_{\mu(FW)} V^{\alpha} \equiv \nabla_{\mu} V^{\alpha} - V \cdot \partial_{\mu} \gamma \gamma^{\alpha} + V \cdot \gamma \nabla_{\mu} \gamma^{\alpha},$$

la quale coincide con la derivata vincolata:

$$(34) \quad \partial_{\mu(FW)} V = (\nabla_{\mu(FW)} V^{\alpha}) e_{\alpha} \equiv \overset{\perp}{\partial}_{\mu} V.$$

5. DERIVATA STANDARD DI MASSA

Una variante della derivata vincolata, ancora adattata al Riferimento e priva di torsione spaziale è la seguente

$$(35) \quad \overset{*}{\partial}_{\alpha} V \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\perp}{\partial}_{\alpha} V + \varepsilon \gamma_{\alpha} (\Omega^{\sigma}{}_{\mu} V^{\mu} e_{\sigma}),$$

ove l'indicatore ε vale ± 1 ⁽⁵⁾. Per $\varepsilon = -1$ la (35) coincide con la *derivata standard* di E. Massa [4-8].

Per quanto riguarda i relativi coefficienti $\overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\rho} (\overset{*}{\partial}_{\alpha} e_{\beta} = \overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\rho} e_{\rho})$, risulta direttamente $\overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\rho} = \overset{\perp}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\rho} + \varepsilon \gamma_{\alpha} \Omega^{\rho}{}_{\beta}$, ovvero, tenendo conto della (26):

$$(36) \quad \overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\rho} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} - \nabla_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma^{\rho} + \gamma_{\beta} \nabla_{\alpha} \gamma^{\rho} + \varepsilon \gamma_{\alpha} \Omega^{\rho}{}_{\beta}.$$

Di qui la torsione della connessione:

$$(37) \quad \overset{*}{\Gamma}_{[\alpha\beta]}{}^{\rho} = -\Omega_{\alpha\beta} \gamma^{\rho} + \gamma_{[\alpha} C_{\beta]} \gamma^{\rho} - \gamma_{[\alpha} K_{\beta]}{}^{\rho} - (1 + \varepsilon) \gamma_{[\alpha} \Omega_{\beta]}{}^{\rho}.$$

I corrispondenti coefficienti di rotazione, tenuto conto della (35) e del corrispondente

⁽⁴⁾ È facile vedere che questa è anche l'unica derivata adattata ottenibile come combinazione lineare di $P_{\Sigma, \theta} \nabla_{\alpha} (P_{\Sigma, \theta} V)$.

⁽⁵⁾ Questa scelta di ε copre i due casi più significativi dal punto di vista dell'interpretazione fisica e della semplificazione formale. Infatti nel caso $\varepsilon = -1$ risulta $\overset{*}{Q}_i{}^j = 0$, e nel caso $\varepsilon = +1$, come vedremo nel §8, si ha un'espressione notevole del campo gravitazionale.

legame anolonomo: $\tilde{\partial}_\alpha^* \tilde{e}_\beta = \tilde{\partial}_\alpha^\perp \tilde{e}_\beta - \varepsilon \delta_\alpha^0 \tilde{\Omega}^\sigma_\beta \tilde{e}_\sigma$, nonché della (30), risultano:

$$(38) \quad \tilde{\partial}_\alpha^* \tilde{e}_0 = 0, \quad \tilde{\partial}_0^* \tilde{e}_i = [\tilde{K}_{ij} + (1 + \varepsilon) \tilde{\Omega}_{ij}] \tilde{e}^j, \quad \tilde{\partial}_j^* \tilde{e}_i = \left\{ \begin{matrix} l \\ i \end{matrix} \right\} \tilde{e}_l,$$

per cui $\tilde{Q}_i{}^j = (1 + \varepsilon) \tilde{\Omega}_i{}^j$, $\tilde{N}_{ij}{}^k = 0$.

6. MOTO RELATIVO DI UNA PARTICELLA SCALARE

Ci proponiamo ora di discutere, sulla base delle derivate introdotte, la *formulazione relativa* della legge di moto di una particella liberamente gravitante.

Dal punto di vista assoluto, sappiamo che la legge di moto è caratterizzata dalle equazioni:

$$(39) \quad \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = 0 \sim \frac{DP_\alpha}{d\tau} = 0 \sim \frac{DP^\alpha}{d\tau} = 0,$$

essendo τ il *tempo proprio*, $\mathbf{P} = m_0 \mathbf{V}$ la 4-quantità di moto ed m_0 la massa propria (costante) della particella. Segue che la (39) è equivalente alla condizione $dV/d\tau = 0$, e *identifica la linea oraria della particella con una geodetica temporale* dello spazio-tempo $\mathfrak{V}_4$.

Per tradurre in termini relativi la (39), assumiamo come parametro sulla linea oraria l^+ della particella, il *tempo relativo standard* T di Cattaneo [1-3]:

$$(40) \quad \frac{1}{c} \gamma_\alpha \frac{dy^\alpha}{dT} = -1;$$

ed introduciamo, accanto alla 4-velocità $\mathbf{V}$, la 4-velocità *relativa standard* della particella

$$(41) \quad U^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy^\alpha}{dT}.$$

Di qui segue la 3-velocità *relativa standard* $\mathbf{v}$, intesa come la proiezione di $\mathbf{U}$ su Σ : $\mathbf{v} = P_\Sigma(\mathbf{U})$. Risulta dalla (40) $\gamma \cdot \mathbf{U} = -c$, nonché la decomposizione minkowskiana

$$(42) \quad \mathbf{U} = \mathbf{v} + c\gamma.$$

Al tempo stesso si ha

$$(43) \quad d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dT, \quad (v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}),$$

e pertanto

$$(44) \quad \mathbf{V} = \eta(\mathbf{v} + c\gamma),$$

essendo η il *fattore di Lorentz* ⁽⁶⁾, $\eta = dT/d\tau \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Analogamente alla (44), si ha l'usuale decomposizione del 4-impulso $\mathbf{P} = m_0 \mathbf{V}$:

$$(45) \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + (\varepsilon/c) \gamma, \quad \mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v},$$

⁽⁶⁾ Generalmente indicato con γ .

con

$$(46) \quad \begin{cases} m \stackrel{\text{def}}{=} \eta m_0 & (\text{massa relativa standard}), \\ \mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} m c^2 & (\text{energia materiale standard}). \end{cases}$$

Consideriamo la *derivata temporale standard*, indotta dalla connessione riemanniana:

$$(47) \quad d/dT \stackrel{\text{def}}{=} U^\alpha \partial_\alpha = \tilde{U}^\alpha \tilde{\partial}_\alpha = c \partial + \tilde{v}^k \tilde{\partial}_k.$$

Dalla (43) si ha direttamente, indicando brevemente con il punto la derivata rispetto a T , $(\dot{}) \equiv d()/dT$:

$$(48) \quad \dot{\mathbf{p}} + (\dot{\mathcal{E}}/c) \boldsymbol{\gamma} + (\mathcal{E}/c) \dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0.$$

Ne consegue, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{\gamma}$, il legame $\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{G}$, ove $\mathbf{G}$, è così definito:

$$(49) \quad \mathbf{G} \stackrel{\text{def}}{=} -c \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -c^2 \mathbf{C} - \mathbf{k}_v + \mathbf{v} \times_\Sigma \boldsymbol{\omega},$$

con $\mathbf{k}_v \stackrel{\text{def}}{=} c \tilde{v}^i \tilde{K}_i^k \tilde{\mathbf{e}}_k$, $\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (c/2) \tilde{\eta}^{ilm} \tilde{\Omega}_{lm} \tilde{\mathbf{e}}_i$ e dove $\tilde{\eta}$ è il tensore dispari di Ricci in Σ con cui si costruisce il prodotto vettoriale spaziale $\times_\Sigma$; dopodiché la (48) assume la forma $\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{p} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\gamma} = m \mathbf{G}$. A primo membro si riconosce la *derivata vincolata di $\mathbf{p}$ rispetto a T* ; derivata che, dato il carattere spaziale di $\mathbf{p}$, non differisce dalla proiezione spaziale di $\dot{\mathbf{p}}$:

$$\frac{d^\perp \mathbf{p}}{dT} \equiv P_\Sigma(\dot{\mathbf{p}}).$$

Pertanto, l'equazione di moto (39) si spezza nei due legami, rispettivamente vettoriale e scalare:

$$(50) \quad \frac{d^\perp \mathbf{p}}{dT} = m \mathbf{G}, \quad \dot{\mathcal{E}} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{G},$$

dove $\mathbf{G}$ assume il significato di *campo gravitazionale relativo* al Riferimento, e $\mathbf{p} \cdot \mathbf{G}$ quello di *potenza meccanica*; cosicché le (50)_{1,2} possono essere interpretate rispettivamente come *teoremi della quantità di moto* e *dell'energia*, in stretta analogia con il caso classico.

È agevole riconoscere che, nella formulazione (50), il teorema dell'energia è conseguenza diretta dell'equazione di moto, così come accade in Relatività ristretta per una particella priva di struttura interna. Ciò rende ragione dell'introduzione della derivata vincolata.

7. CAMPO GRAVITAZIONALE STANDARD DI CATTANEO

C. Cattaneo introdusse originariamente il *campo gravitazionale relativo standard* che porta il suo nome, in modo diverso: egli considerò l'operatore differenziale d^C/dT ,

definito [14] dalla

$$(51) \quad d^C/dT \stackrel{\text{def}}{=} P_\Sigma (c \mathcal{L}_\gamma + \partial_\nu) \quad (\partial_\nu \equiv v^\alpha \partial_\alpha = \tilde{v}^i \tilde{\partial}_i);$$

sugli scalari esso si riduce a d/dT , in conformità della (47).

Tuttavia, poiché la derivata di Lie non commuta con il processo di innalzamento ed abbassamento degli indici:

$$(52) \quad \begin{cases} (\mathcal{L}_\gamma W^{\mathfrak{h}})_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\beta \partial_\beta W^\alpha - W^\beta \partial_\beta \gamma^\alpha, \\ (\mathcal{L}_\gamma W^{\mathfrak{b}})_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\beta \partial_\beta W_\alpha + W_\beta \partial_\alpha \gamma^\beta, \end{cases}$$

per la derivata temporale di Cattaneo (salvo nel caso di $\mathcal{V}_4$ stazionaria) si presenta nuovamente il problema di dover distinguere i vettori dalle forme⁽⁷⁾. In particolare, per un vettore spaziale $W^{\mathfrak{h}}$ e la forma corrispondente $W^{\mathfrak{b}}$ si ha

$$(53) \quad \begin{cases} \left(\frac{d^C W^{\mathfrak{h}}}{dT} \right)^{\bar{l}} \equiv \frac{d\tilde{W}^{\bar{l}}}{dT} + \tilde{v}^k \tilde{W}^{\bar{j}} \tilde{\Gamma}_{kj}^{\bar{l}}, \\ \left(\frac{d^C W^{\mathfrak{b}}}{dT} \right)_{\bar{l}} \equiv \frac{d\tilde{W}_{\bar{l}}}{dT} - \tilde{v}^k \tilde{W}_{\bar{j}} \tilde{\Gamma}_{kl}^{\bar{j}}. \end{cases}$$

In conseguenza l'equazione di moto si può scrivere nella forma

$$(54) \quad \frac{d^C p^{\mathfrak{b}, \mathfrak{h}}}{dT} = m G^{\mathfrak{C}\mathfrak{b}, \mathfrak{h}},$$

ma occorre intendere il *campo gravitazionale standard* $G^{\mathfrak{C}}$ suscettibile delle seguenti espressioni, rispettivamente contravariante e covariante⁽⁸⁾

$$(55) \quad \begin{cases} (G^{\mathfrak{C}\mathfrak{h}})^{\bar{k}} = -c^2 \tilde{C}^{\bar{k}} - 2c \tilde{H}_{\bar{i}}^{\bar{k}} \tilde{v}^{\bar{i}}, \\ (G^{\mathfrak{C}\mathfrak{b}})_{\bar{k}} = -c^2 \tilde{C}_{\bar{k}} + 2c \tilde{\Omega}_{ki} \tilde{v}^{\bar{i}}, \end{cases}$$

ovvero in termini intrinseci:

$$(56) \quad \begin{cases} G^{\mathfrak{C}\mathfrak{h}} = -c^2 C - 2\mathbf{k}_v + 2\mathbf{v} \times_\Sigma \boldsymbol{\omega}, \\ G^{\mathfrak{C}\mathfrak{b}} = -c^2 C + 2\mathbf{v} \times_\Sigma \boldsymbol{\omega}, \end{cases}$$

a seconda che a primo membro della (54) p sia una 1-forma: $p = \tilde{p}_{\bar{k}} \tilde{e}^{\bar{k}}$, oppure un vettore: $p = \tilde{p}^{\bar{k}} \tilde{e}_{\bar{k}}$.

In forma compatta si può scrivere [14]

$$(57) \quad G^{\mathfrak{C}\mathfrak{h}, \mathfrak{b}} = G + \mathbf{v} \times_\Sigma \boldsymbol{\omega} + \mathcal{L}_\gamma (P_{\Sigma\Sigma} g^{\mathfrak{h}, \mathfrak{b}}).$$

L'equazione dell'energia resta la (50) $d^C \mathcal{E}/dT = \dot{\mathcal{E}} = G \cdot p$.

⁽⁷⁾ Tale derivata ha il vantaggio di essere invariante per cambiamenti di coordinate interni al Riferimento.

⁽⁸⁾ Quella contravariante è dovuta a G. Ferrarese [9].

8. CAMPO GRAVITAZIONALE AFFINE ADATTATO

Possiamo associare, in modo naturale, ad ogni connessione affine adattata un campo gravitazionale, unificando le formulazioni di Massa (per quanto riguarda la derivata standard) e Cattaneo (derivata vincolata). A tale scopo osserviamo che tra le derivate $\tilde{\partial}_\alpha^r$ e $\tilde{\partial}_\alpha$, sussistono i seguenti legami:

$$(58) \quad \begin{cases} \tilde{\partial}_i^r \mathbf{p} = P_\Sigma(\tilde{\partial}_i \mathbf{p}) + \tilde{N}_{ij}{}^k \tilde{p}^j \tilde{\mathbf{e}}_k, \\ \tilde{\partial}_0^r \mathbf{p} = P_\Sigma(\partial \mathbf{p}) + (\tilde{Q}_j{}^k - \tilde{\Omega}_j{}^k) \tilde{p}^j \tilde{\mathbf{e}}_k. \end{cases}$$

Introdotta la *derivata temporale affine* d^r/dT , in analogia con la derivata temporale standard

$$(59) \quad \frac{d^r \mathbf{p}}{dT} \equiv \tilde{U}^\alpha \tilde{\partial}_\alpha^r \mathbf{p} = P_\Sigma \left(\frac{d\mathbf{p}}{dT} \right) + c \tilde{p}^j (\tilde{Q}_j{}^k - \tilde{\Omega}_j{}^k) \tilde{\mathbf{e}}_k + \tilde{N}_{ij}{}^k \tilde{v}^i \tilde{p}^j \tilde{\mathbf{e}}_k,$$

possiamo definire il seguente *campo gravitazionale*

$$(60) \quad \mathbf{G}^r = \mathbf{G} + c \tilde{v}^j (\tilde{Q}_j{}^k - \tilde{\Omega}_j{}^k) \tilde{\mathbf{e}}_k + \tilde{N}_{ij}{}^k \tilde{v}^i \tilde{v}^j \tilde{\mathbf{e}}_k,$$

ovvero, dalla (49), ponendo $\mathbf{q}^r = (c/2) \tilde{\gamma}^{ijk} \tilde{Q}_{jk} \tilde{\mathbf{e}}_i$ ed $\mathbf{n}^r = \tilde{N}_{ij}{}^k \tilde{v}^i \tilde{v}^j \tilde{\mathbf{e}}_k$:

$$(61) \quad \mathbf{G}^r \stackrel{\text{def}}{=} -c^2 \mathbf{C} - \mathbf{k}_v + \mathbf{v} \times_\Sigma (2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{q}^r) + \mathbf{n}^r.$$

Si noti che $\mathbf{q}^r$ ed $\mathbf{n}^r$ dipendono dalla particolare connessione scelta e dalla 3-velocità della particella.

Se la connessione Γ è priva di torsione spaziale, come in tutti i casi considerati, si ha $\mathbf{n}^r = 0$. Ne risulta l'equazione

$$(62) \quad \frac{d^r \mathbf{p}}{dT} = m \mathbf{G}^r,$$

la quale generalizza la formulazione relativa dell'equazione di moto (50)₁ al caso di una generica connessione adattata al Riferimento.

L'equazione dell'energia resta invariata:

$$(63) \quad \frac{d^r \mathcal{E}}{dT} = \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{G}^r,$$

dato che si deve intendere $\tilde{N}_{ijk} \tilde{v}^i \tilde{v}^j \tilde{v}^k = 0$.

Riguardo alle connessioni precedentemente introdotte, risulta

$$(64) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}^\perp &= \boldsymbol{\omega}, & \mathbf{q}^* &= (1 - \varepsilon) \boldsymbol{\omega}, & \mathbf{n}^\perp &= \mathbf{n}^* = 0; \\ \left\{ \begin{aligned} \mathbf{G}^\perp &\equiv \mathbf{G} = -c^2 \mathbf{C} - \mathbf{k}_v + \mathbf{v} \times_\Sigma \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{G}^* &= -c^2 \mathbf{C} - \mathbf{k}_v + (1 - \varepsilon) \mathbf{v} \times_\Sigma \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Osserviamo che nel caso $\varepsilon = +1$ nella (64)₂ scompare il «termine di Coriolis».

9. CASI PARTICOLARI

9.1. *Mettrica di Kerr in coordinate di Boyer-Lindquist.*

Consideriamo, a titolo di esempio, il caso della mettrica di Kerr in coordinate di Boyer-Lindquist: $x^0 = ct$, $r = x^1$, $\theta = x^2$, $\varphi = x^3$

$$ds^2 = -(1 - 2mr/\rho^2)c^2 dt^2 - 4(amr/\rho^2)\sin^2\theta c dt d\varphi + \\ + (\rho^2/\Delta) dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2 + (2ma^2 r \sin^2\theta/\rho^2)) \sin^2\theta d\varphi^2, \\ \Delta = r^2 - 2mr + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad m = GM/c^2.$$

Con questa scelta di coordinate, la base quasi-naturale adattata al Riferimento risulta:

$$(65) \quad \begin{cases} \tilde{e}_0 = \gamma = (1 - (2mr/\rho^2))^{-1/2} e_0, \\ \tilde{e}_1 = e_1, \quad \tilde{e}_2 = e_2, \quad \tilde{e}_3 = e_3 + \gamma_3 \gamma, \\ \gamma_3 = -(2amr/\rho^2) \sin^2\theta (1 - (2mr/\rho^2))^{-1/2}, \end{cases}$$

con $\tilde{e}^\alpha = e^\alpha$. Risulta:

$$(66) \quad \begin{cases} C = -\frac{m}{\rho^2(\rho^2 - 2mr)} [(\rho^2 - 2r^2)e^1 + (ra^2 \sin 2\theta)e^2], \\ \Omega = -\frac{am \sin \theta}{\rho(\rho^2 - 2mr)^{3/2}} [\sin \theta (\rho^2 - 2r^2)e^1 \wedge e^3 + (2r \cos \theta \Delta)e^2 \wedge e^3], \\ K = 0, \\ \omega = \frac{am}{\rho^4(\rho^2 - 2mr)} [(-2r \Delta \cos \theta)\tilde{e}_1 + (\rho^2 - 2r^2) \sin \theta \tilde{e}_2]. \end{cases}$$

Pertanto:

$$(67) \quad \begin{cases} G^\perp \equiv G = -c^2 C + v \times_\Sigma \omega, \\ G^* = -c^2 C + (1 - \varepsilon) v \times_\Sigma \omega, \\ G^{C\sharp} = G^{Cb} = -c^2 C + 2v \times_\Sigma \omega. \end{cases}$$

9.2. *Mettrica di un'onda gravitazionale piana.*

Consideriamo la forma di Bondi *et al.* [18] per la mettrica di un'onda gravitazionale piana propagantesi, nel vuoto, lungo l'asse z di un dato riferimento:

$$(68) \quad ds^2 = -c^2 dt^2 + L^2(e^{2\beta} dx^2 + e^{-2\beta} dy^2) + dz^2,$$

con L e β funzioni di $u = ct - z$ (vedi [6, p. 957]) tali che

$$(69) \quad L'' + (\beta')^2 L = 0, \quad ()' = \frac{d}{du} (),$$

con $\beta' \neq \text{cost.}/L^2$, caso in cui la mettrica precedente (68) si riduce al caso banale di Minkowski.

Con questa scelta delle coordinate (t, x, y, z) si ha che la base naturale stessa è adattata al Riferimento:

$$(70) \quad \bar{e}_0 = \gamma = e_0, \quad \bar{e}_i = e_i.$$

È immediato vedere che risulta (per L e β qualsiasi soddisfacenti la (69)):

$$(71) \quad \begin{cases} C = 0, & \Omega = 0, & \omega = 0, \\ K = (1/2) [\partial_0 (L^2 e^{2\beta}) e^1 \otimes e^1 + \partial_0 (L^2 e^{-2\beta}) e^2 \otimes e^2]. \end{cases}$$

Pertanto:

$$(72) \quad \begin{cases} G^\perp \equiv G = G^* = -k_v, \\ G^{C\sharp} = -2k_v, G^{Cb} = 0. \end{cases}$$

Abbiamo visto come siano possibili, nell'ambito di uno stesso Riferimento, diverse definizioni di campo gravitazionale, tutte ugualmente valide, e privilegiate soltanto dal tipo di applicazioni che si vogliono studiare. Così, nella impostazione generale (62), il campo gravitazionale (61) va ben al di là dei tre termini fondamentali: *campo di trascinamento, di Coriolis e di deformazione*. In ogni caso, il campo dipende in modo essenziale dal Riferimento scelto, e in più, ai fini della sua misura, occorre specificare se gli osservatori del Riferimento sono geodetici, se trasportano, lungo le linee della loro congruenza, il *triedro spaziale* di riferimento rigidamente o con vorticità, ecc.

Solo dopo aver precisato le condizioni degli osservatori, ha senso chiedersi quale sia effettivamente il campo gravitazionale che ciascuno di essi *misura*; ciò che risulta fondamentale dal punto di vista degli esperimenti di gravitazione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. CATTANEO, *General Relativity: Relative standard mass, momentum, energy and gravitational field in a general system of reference*. Nuovo Cim., 10, 1958, 318-337.
- [2] C. CATTANEO, *On the energy equation for a gravitating test particle*. Nuovo Cim., 11, 1959, 733-735.
- [3] C. CATTANEO, *Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*. Ann. Mat. Pura Appl., 48, 1959, 361-386.
- [4] E. MASSA, *Space tensors in General Relativity I: spatial tensor algebra and analysis*. Gen. Relativ. Grav., 5, 1974, 555-572.
- [5] E. MASSA, *Space tensors in General Relativity II: physical application*. Gen. Relativ. Grav., 5, 1974, 573-591.
- [6] E. MASSA, *Space tensors in General Relativity III: the structural equations*. Gen. Relativ. Grav., 5, 1974, 715-736.
- [7] E. MASSA - C. ZORDAN, *Relative kinematics in General Relativity. The Thomas and Fokker precession*. Meccanica, 10, 1975, 27.
- [8] E. MASSA, *Spatial tensor analysis in General Relativity* In: G. FERRARESE (ed.), *Fisica matematica classica e relatività: rapporti e compatibilità*. Bibliopolis, Napoli 1991.
- [9] C. W. MISNER - K. S. THORNE - J. A. WHEELER, *Gravitation*. Freeman, San Francisco 1973.
- [10] I. CATTANEO-GASPERINI, *Dérivée covariante «liée» dans une $\mathcal{V}_{n+1}$ riemannienne à structure presque produit*. Compt. Rend. Acad. Sci., 256, 1963, 2089-2091.
- [11] G. FERRARESE, *Contributi alla tecnica delle proiezioni in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*. Rend. Mat., 22, 1963, 147-168.

- [12] G. FERRARESE, *Proprietà di secondo ordine di un generico riferimento fisico in Relatività Generale*. Rend. Mat., 24, 1965, 57-100.
- [13] R. T. JANTZEN - P. CARINI, *Understanding spacetime splittings and their relationships* In: G. FERRARESE (ed.), *Fisica matematica classica e relatività: rapporti e compatibilità*. Bibliopolis, Napoli 1991.
- [14] R. T. JANTZEN - P. CARINI - D. BINI, *The many faces of Gravitoelectromagnetism*. Ann. Phys., 215, 1992, 1-50.
- [15] C. CATTANEO, *Sur la loi relative du mouvement d'une particule d'épreuve gravitant librement*. Compt. Rend. Acad. Sci., 256, 1963, 3974-3977.
- [16] G. FERRARESE, *Lezioni di Meccanica Relativistica, I*. Pitagora Ed., Bologna 1985 (vol. II in preparazione).
- [17] G. FERRARESE, *Introduzione alla dinamica riemanniana dei sistemi continui*. Pitagora Ed., Bologna 1979.
- [18] H. BONDI - F. A. E. PIRANI - I. ROBINSON, *Gravitational waves in General Relativity III. Exact plane waves*. Proc. R. Soc. London, A, 251, 1959, 519-533.

D. Bini:

I.C.R.A. International Centre for Relativistic Astrophysics
Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 5 - 00185 ROMA

G. Ferrarese e G. Gemelli:

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 5 - 00185 ROMA