Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Ennio De Giorgi, Marco Forti, Giacomo Lenzi

Introduzione delle variabili nel quadro delle teorie base dei Fondamenti della Matematica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **5** (1994), n.2, p. 117–128.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1994_9_5_2_117_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1994.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 5:117-128 (1994)

Logica matematica. — *Introduzione delle variabili nel quadro delle teorie base dei Fondamenti della Matematica.* Nota di Ennio De Giorgi, Marco Forti e Giacomo Lenzi, presentata (*) dal Socio E. De Giorgi.

Abstract. — *An introduction of variables into the frame of the basic theories for the Foundations of Mathematics.* We deal with the notion of *variable* inside of the axiomatic frame of the basic theories for the Foundations of Mathematics [9]. Variables are introduced into this frame as «unary» objects, taking values of different kinds, which can be connected by *correlations* (or correspondences), and allow local functional representations. In choosing the axioms on variables we take into account the main uses of the term «variable» in Mathematical Analysis, Mathematical Physics, Algebra, Geometry, Logic and in several exact and human sciences (Physics, Biology, Computer Science, Economics, Sociology, etc.).

Key words: Variable; Correlation; Operation; Basic-theory.

Riassunto. — Introduciamo la nozione di *variabile* nel quadro assiomatico delle teorie base dei Fondamenti della Matematica [9]. In tale quadro le variabili sono inserite come oggetti «unari», assumono valori di varie specie, possono essere connesse da *correlazioni* (o corrispondenze) e ammettono *rappresentazioni funzionali locali*. Gli assiomi sulle variabili sono scelti tenendo presenti gli usi più frequenti del termine «variabile» in Analisi Matematica, Fisica Matematica, Algebra, Geometria, Logica e in molte scienze esatte ed umane (Fisica, Biologia, Informatica, Economia, Sociologia, ecc.).

0. Introduzione

Questa *Nota* rappresenta uno sviluppo delle teorie base dei Fondamenti della Matematica esposte in [9]; precisamente introduciamo in tale quadro il concetto di *variabile*. Questo concetto è largamente usato in molti rami della Matematica pura e applicata, delle diverse Scienze sperimentali e delle stesse Scienze umane. Gli assiomi che esponiamo in questo lavoro sono in varia misura ispirati a fonti diverse e dovrebbero costituire quindi un buon punto di partenza per un confronto fra le diverse idee di variabile presenti in molte discipline scientifiche ed anche umanistiche. Come già per le teorie base è impossibile fornire un'indicazione bibliografica esauriente delle fonti a cui ci siamo ispirati; ci limitiamo a indicare alcuni lavori che abbiamo tenuto particolarmente presenti nello scrivere questa *Nota* (vedi Bibliografia).

Un precedente diretto di questa *Nota* è costituito dall'articolo [5]: in esso la nozione di variabile veniva «innestata» sulla Teoria Ampia esposta in [6], mentre qui il riferimento, come abbiamo detto, sono le teorie base di [9].

Volendo dare un'idea intuitiva delle esperienze che ispirano gli assiomi sulle variabili, potremmo pensare alle variabili come informazioni disponibili riguardanti una realtà che non possiamo conoscere in modo completo. Per esempio potremmo pensare che la realtà sia lo stato complessivo fisico e psichico delle persone che si sottopongono ad esami clinici; le variabili potrebbero allora essere radiografie, ecografie, encefalogram-

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1993.

mi, cardiogrammi, ecc. Certamente i «valori» di queste variabili dipendono in modo estremamente complesso e in parte sconosciuto dallo stato del paziente; per farsi un'idea di questo stato conviene in primo luogo cercare collegamenti tra le varie informazioni disponibili; questi collegamenti verranno qui schematizzati nel concetto di *correlazione* o *corrispondenza*.

1. Richiamo delle teorie base

Le teorie base di [9] sono lo sviluppo più recente di un filone di ricerca sui Fondamenti della Matematica le cui tendenze principali sono il non riduzionismo (le teorie considerano varie specie di oggetti e non solo numeri e insiemi) e un notevole grado di autoriferimento (il comportamento globale degli oggetti della teoria è descritto da alcuni «grandi» oggetti della teoria stessa). Le teorie base sono «teorie aperte» che possono essere ampliate in molte direzioni; esse intendono essere, appunto, una «base» su cui «innestare» i vari rami della Matematica ed eventualmente di altre forme del sapere umano.

Tra gli oggetti fondamentali introdotti in [9] vi sono alcune *qualità* (o proprietà), *collezioni, relazioni, operazioni*, i *numeri naturali* ed i *sistemi finiti*. Le qualità e le collezioni sono oggetti unari; i sistemi finiti sono oggetti binari; le relazioni possono essere binarie, ternarie, quaternarie, ecc. e le operazioni possono essere semplici, binarie, ternarie, ecc. Una qualità o proprietà q può essere *goduta* da un oggetto x; in questo caso si scrive qx. A una collezione C può *appartenere* un oggetto x, e in questo caso si scrive $x \in C$. Una relazione binaria r può *sussistere* tra due oggetti x e y, e in questo caso si scrive rxy (oppure talvolta xry); analogamente per le relazioni r ternarie, quaternarie, ecc. si usano le notazioni $rxyz$, $rxyzt$, ecc. Un'operazione semplice f può *trasformare* un oggetto x in un oggetto y e in questo caso si scrive $y = fx$; analogamente per le operazioni f binarie, ternarie, ecc. si usano le notazioni $z = fxy$, $t = fxyz$, ecc.

Le prime qualità, nello spirito dell'autoriferimento, corrispondono alle diverse specie di oggetti introdotti; avremo perciò la qualità $Qqual$ di essere una qualità, la qualità $Qcoll$ di essere una collezione, ecc. Qui si ha già un autoriferimento perché la qualità $Qqual$ gode di se stessa, cioè si ha $Qqual\ Qqual$. Altri oggetti di uso generale sono l'operazione identità, Id, tale che per ogni x si ha $x = Idx$, la collezione universale, V, cui appartengono tutti gli oggetti, la collezione vuota, $\emptyset$, cui non appartiene nessun oggetto, e la collezione delle collezioni, $Coll$. Si noti che si ha una catena di reciproche appartenenze: $V \in Coll \in Coll \in V \in V$. Le collezioni sono *estensionali*, cioè due collezioni cui appartengono gli stessi oggetti sono uguali.

Avendo introdotto le collezioni, le relazioni e le operazioni si può esporre la parte più elementare dell'Aritmetica, introducendo la *collezione* $\mathbf{N}$ dei numeri naturali, le *operazioni* aritmetiche di addizione, sottrazione e moltiplicazione, e l'usuale *relazione* d'ordine tra numeri naturali. La parte dell'*Aritmetica* esposta in [9] è molto ristretta; ad esempio non sono introdotte le potenze e non è postulata alcuna forma del principio d'induzione.

L'introduzione dei primi elementi dell'Aritmetica consente di formalizzare la nozione di «complessità» (o «arietà») usata informalmente in precedenza, mediante un'operazione *arietà, Ar*. Per $x \in \mathbf{N}$ si ha $Ar\ x = 0$; per ogni qualità q e ogni collezione C, $Ar\,q = Ar\,C = 1$. Inoltre per ogni relazione r si ha $Ar\ r = h$ se e solo se r è una relazione h-aria, e per ogni operazione f si ha $Ar\,f = h + 1$ se e solo se f è un'operazione h-aria. In generale diremo che un oggetto x è *unario* (risp. *binario, ternario*, ecc.) se si ha $Ar\,x = 1$ (2, 3, ecc.). Gli assiomi permettono di introdurre, in occasione di successivi innesti, altri oggetti unari oltre alle collezioni e alle qualità, altri oggetti binari oltre alle relazioni binarie, alle operazioni semplici e ai sistemi finiti di cui parleremo tra poco, ecc.; questa libertà è utile in vista dei successivi innesti sulle teorie base, compresa la presente *Nota*, dove le variabili saranno introdotte come oggetti unari. In [9] non sono introdotti oggetti la cui arietà non è un numero naturale, ma tale possibilità non è esclusa dagli assiomi e potrebbe forse agevolare futuri innesti, come ad esempio quello delle logiche infinitarie.

Nelle teorie esposte in [9] un buon grado di autodescrizione è ottenuto introducendo le due operazioni generatrici di relazioni fondamentali, *Rfond* e *Runiv*: cominciando da *Rfond*, ricordiamo che per ogni numero naturale $h > 0$ esiste *Rfond* h ed è una *relazione* di arietà $h + 1$ che governa gli oggetti di arietà h. In generale, se α è un oggetto di arietà h useremo la notazione

$$\alpha \downarrow\uparrow x_1 \ldots x_n$$

da leggersi «α *agisce* su $x_1 \ldots x_h$» invece di (*Rfond* h) $\alpha x_1 \ldots x_h$. L'*azione* così definita riassume ed estende quella precedentemente considerata per qualità, relazioni, operazioni e collezioni; ad esempio:

per ogni qualità q e per ogni oggetto x si ha $q \downarrow\uparrow x$ se e solo se qx;
per ogni collezione C e per ogni x si ha $C \downarrow\uparrow x$ se e solo se $x \in C$;
per ogni relazione binaria r e per ogni x, y si ha $r \downarrow\uparrow xy$ se e solo se rxy;
per ogni operazione semplice f e per ogni x, y si ha $f \downarrow\uparrow xy$ se e solo se $y = fx$;
ecc.

Risulta comodo introdurre anche le notazioni seguenti, ove α e β sono oggetti della stessa arietà $h > 0$:

$\alpha \subseteq \beta$ se, per ogni $z_1, \ldots, z_h$, $\alpha \downarrow\uparrow z_1 \ldots z_h$ implica $\beta \downarrow\uparrow z_1 \ldots z_h$;
$\alpha \simeq \beta$ se $\alpha \subseteq \beta \subseteq \alpha$;
$\alpha \uparrow x_1 \ldots x_{h-1}$ se esiste un x_h tale che $\alpha \downarrow\uparrow x_1 \ldots x_{h-1} x_h$;
$\alpha \downarrow x_h$ se esistono $x_1, \ldots, x_{h-1}$ tali che $\alpha \downarrow\uparrow x_1 \ldots x_{h-1} x_h$.

Partendo da tali notazioni esprimiamo l'*univocità*, o *funzionalità*, e l'*estensionalità* per mezzo delle qualità *Qfun* e *Qest*. Precisamente diremo che un oggetto $h + 1$-ario f è *funzionale* (gode della qualità *Qfun*) se le condizioni $f \downarrow\uparrow x_1 \ldots x_h y$, $f \downarrow\uparrow x_1 \ldots x_h z$ implicano $y = z$. Ad esempio tutte le operazioni sono oggetti funzionali. Inoltre diremo che una collezione C è *estensionale* (gode della qualità *Qest*) se tutti gli elementi di C

hanno la stessa arietà e le condizioni $x, y \in C$, $x \simeq y$ implicano $x = y$. Ad esempio la collezione *Coll* è estensionale.

L'ultima specie fondamentale di oggetti introdotta in [9] è quella dei *sistemi finiti*, che comprende le coppie ordinate, terne ordinate, quaterne ordinate, ..., n-uple ordinate, le sostituzioni su un numero finito di elementi e vari altri concetti della Matematica e della vita comune ove vengono messi in relazione alcuni oggetti con alcuni indicatori. I sistemi finiti hanno tutti arietà 2, e formano una collezione estensionale che indicheremo col simbolo *Sif.* Diremo anche che h è un *indice* del sistema x quando $x \uparrow h$ e diremo che y è un *valore* del sistema x quando $x \downarrow y$. Tra i sistemi finiti vi sono quelli *univoci*, cioè i sistemi finiti in cui l'indice determina univocamente l'oggetto indicato (e che quindi sono funzionali nel senso precedente): essi formano la collezione *Siuf.* In [9] si postula che, dati comunque due oggetti x, y, esiste sempre il sistema univoco $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che ha come unico indice x e come unico valore y. Inoltre i sistemi ammettono le operazioni di unione binaria, indicata con il solito simbolo $\cup$, inversione (simbolo $^{-1}$) e composizione (simbolo $\circ$).

Si noti che, ad es., componendo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ si ottiene il sistema vuoto (unico per l'assioma di estensionalità della collezione *Sif*) che verrà indicato col simbolo $\emptyset_2$ per sottolineare che si tratta di un oggetto vuoto di arietà 2 (e quindi diverso dalla collezione vuota $\emptyset$ che ha arietà 1).

Disponendo dell'unione si possono costruire sistemi più complessi, per i quali useremo le notazioni mutuate dalla teoria dei gruppi di sostituzioni:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y \\ b \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix}$$

ecc.

Casi particolari di sistemi univoci sono:

le 1-uple, cioè i sistemi del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, che indicheremo anche con $[x]$,

le coppie ordinate $(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$,

le terne $(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, ecc.

Come abbiamo già ricordato, in [9] non viene introdotto il principio d'induzione, che dovrà essere trattato in successivi sviluppi della teoria, ma si postula esplicitamente che per ogni $n \in N$ esistono l'n-upla $(1, ..., n)$ e la collezione V^n di tutte le n-uple.

In generale se x è un oggetto binario funzionale, per esempio un sistema finito univoco, in luogo di $x \downarrow\uparrow hw$ scriveremo talvolta $x_h = w$, seguendo le notazioni usuali nel caso delle n-uple, oppure $xh = w$, ispirandoci alle notazioni delle operazioni.

Infine, disponendo dei sistemi finiti, si introduce un nuovo oggetto altamente autoreferente e di alto potere descrittivo che «assorbe» tutte le relazioni *Rfond h*, cioè l'operazione generatrice di relazioni universali *Runiv*, tale che

$$(Runiv\ k) \downarrow\uparrow 1\,2 \ldots k\alpha(t_1, \ldots, t_h) \text{ se e solo se } \alpha \downarrow\uparrow t_1 \ldots t_h .$$

L'assioma fondamentale F_ν di una teoria base dipende da un prefissato numero naturale $\nu > 0$ e afferma l'esistenza di *Runiv* k per $k \geqslant \nu$. Chiameremo TB_ν (Teoria Base ν-aria) la teoria comprendente l'assioma F_ν oltre agli altri assiomi esposti nella *Nota* [9] (che qui abbiamo richiamato nelle sue grandi linee).

Poiché $Ar(Runiv\ k) = k + 2$, l'assioma F_ν introduce solo relazioni di arietà non minore di $\nu + 2 \geqslant 3$ e quindi le relazioni universali non sono necessariamente sottoposte alle varie manipolazioni a cui si può decidere di sottoporre tutti gli oggetti unari e binari in occasione di ulteriori rafforzamenti delle «teorie aperte» TB_ν. Volendo avere una maggiore libertà di manipolazione di oggetti di arietà 3, 4 ecc. conviene considerare teorie TB_ν con un indice ν abbastanza alto: in questo modo si riesce nello stesso tempo a garantire un forte autoriferimento e un'ampia «libertà di innesto» e di manipolazione degli oggetti di arietà bassa senza correre troppi rischi di antinomie (vedi [9, 11]).

Certamente, tra i vari oggetti introdotti in [9], l'operazione *Runiv* sembra la meno «naturale», in particolare sembra «artificiosa» la presenza dei numeri $1 \ldots k$ nella formula che descrive l'azione di *Runiv* k; essa è comunque utile per garantire libertà e coerenza.

2. Trasposizione di oggetti binari

Stabiliamo anzitutto alcune locuzioni abbreviate riguardanti i sistemi finiti. Quando un sistema finito S ha per *valori* solo oggetti di una certa specie, diremo semplicemente che S è un sistema finito *di* oggetti di quella specie: ad esempio un «sistema finito di operazioni» è un sistema finito i cui valori sono operazioni.

Poiché inoltre in questo paragrafo e nel successivo si considereranno solo sistemi univoci finiti, in questi due paragrafi useremo semplicemente la parola «sistema» invece di «sistema univoco finito»; ad esempio scriveremo che «S è un sistema» invece di «$S \in Siuf$».

Per preparare l'innesto delle variabili cominciamo con l'introdurre una nuova operazione, la *trasposizione di oggetti binari*, denotata con *Trab*, che associa a un sistema di oggetti binari funzionali un oggetto binario funzionale a valori sistemi; ad esempio se f, g sono due operazioni definite in x si ha $(Trab(f, g))x = (fx, gx)$.

Gli assiomi che caratterizzano *Trab* sono i seguenti:

A1. *Trab è un'operazione semplice.*

A2. *Sia S un sistema a valori oggetti binari funzionali: allora Trab S esiste ed è un oggetto binario funzionale a valori sistemi non vuoti; in tal caso vale la relazione* $((Trab\ S)x)_i \equiv (S_i)x$, *ove il primo membro è definito se e solo se è definito il secondo.*

A3. *Se S è un sistema di sistemi allora lo è anche Trab S.*

Nel seguito useremo la notazione abbreviata $S^t = Trab\ S$.

Notiamo che, per l'estensionalità della collezione *Sif*, gli assiomi precedenti individuano univocamente la trasposizione dei sistemi di sistemi. Ad esempio consideriamo il sistema vuoto, $\emptyset_2$: risulta $(\emptyset_2)^t = \emptyset_2$; più in generale, poiché i valori del sistema trasposto debbono essere sempre sistemi non vuoti, si ha anche:

$$[\emptyset_2]^t = (\emptyset_2, \emptyset_2)^t = (\emptyset_2, \emptyset_2, \emptyset_2)^t = \ldots = \emptyset_2 .$$

Altri esempi si hanno considerando $m, n \in \mathbf{N}, m, n > 0, x = (x_1, \ldots, x_m)$ con $x_h = (a_{h1}, \ldots, a_{hn})$. Allora $x^t = (y_1, \ldots, y_n)$ con $y_k = (a_{1k}, \ldots, a_{mk})$. Dato che le m-uple di n-uple (con n fissato) possono essere identificate con le matrici $m \times n$, questo risultato ricorda l'usuale trasposizione di matrici, il che spiega il nome di «trasposizione» per l'operazione *Trab*. In generale la trasposizione di un sistema non vuoto S di n-uple (con n costante) è una n-upla di sistemi non vuoti aventi gli stessi indici di S.

Situazioni più complesse riguardano m-uple di n-uple con $n > 0$ variabile: in questo caso la trasposizione, in generale, non produrrà un oggetto analogo ma solo una k-upla di sistemi indicizzati da numeri naturali, ove k è il massimo degli n. Ad esempio:

$$((a, b), (c, d, e))^t = \left((a, c), (b, d), \begin{pmatrix} 2 \\ e \end{pmatrix}\right),$$

$$(\emptyset_2, (a, b), (c, d, e))^t = \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ e \end{pmatrix}\right).$$

Passando alla trasposizione di sistemi che non sono n-uple abbiamo per esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ (a, b) & [c] & (d, e, f) \end{pmatrix}^t = \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ a & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ b & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ f \end{pmatrix}\right).$$

Più in generale se S è un qualunque sistema di sistemi, la trasposizione può essere iterata su S: intuitivamente due trasposizioni dovrebbero cancellarsi; in realtà risulta $S^{tt} = S$ se e solo se $\emptyset_2$ non è un valore di S, mentre in ogni caso si ha $S^{ttt} = S^t$.

3. Introduzione delle variabili

Introduciamo ora l'oggetto principale di questa *Nota*, e cioè la collezione *Var* delle *variabili*, e postuliamo che esse sono oggetti unari mediante l'assioma:

B1. *Var è una collezione. Se $v \in Var$, allora $Ar\ v = 1$.*

Se v è una variabile e $v \downarrow\uparrow x$ diremo che x è un *valore* di v.

L'operazione fondamentale sulle variabili è la *trasposizione di n-uple di variabili, Trav*; il primo postulato riguardante *Trav* afferma:

B2. *Trav è un'operazione semplice. Se S è una n-upla di variabili, allora Trav S esiste ed è una variabile a valori sistemi non vuoti.*

Usiamo la notazione $S^* = Trav\ S$. Inoltre, poiché tra le n-uple a valori variabili c'è il sistema vuoto, postuliamo:

B3. *La variabile* $\emptyset_2^*$ *non ha valori, cioè* $\emptyset_2^* \simeq \emptyset$.

Resta da stabilire il legame tra la trasposizione di variabili e quella di oggetti binari funzionali. Vogliamo fare in modo che «localmente», cioè all'interno di ogni sistema di variabili S, la trasposizione di variabili sia un'immagine della trasposizione di opportuni oggetti binari funzionali mediante un «omomorfismo» τ, che «conserva i valori» e porta due oggetti funzionali equivalenti nella stessa variabile; diamo perciò l'assioma:

B4 (*Rappresentazione funzionale locale*). *Sia S un sistema di variabili. Allora esiste un sistema* τ *tale che*:

1) *gli indici di* τ *sono oggetti binari funzionali e i suoi valori sono variabili*;

2) *i valori di S sono anche valori di* τ;

3) *la variabile* τf *prende gli stessi valori dell'oggetto funzionale* f;

4) *se* f, g *sono indici di* τ *e inoltre* $f \simeq g$, *allora* $\tau f = \tau g$;

5) *se* $(v_1, \ldots, v_n)$ *è una n-upla di variabili, con* $n > 0$, *e le* $n+1$ *variabili* $v_1 = \tau f_1, \ldots, v_n = \tau f_n$, $(v_1, \ldots, v_n)^*$ *sono valori di S, allora* $(f_1, \ldots, f_n)^t$ *è un indice di* τ *e si ha:* $(v_1, \ldots, v_n)^* = \tau(f_1, \ldots, f_n)^t$.

L'assioma B4 è l'assioma fondamentale della teoria delle variabili esposta in questa *Nota*: per averne una motivazione intuitiva possiamo pensare al problema dello stato dell'Economia. Le quantità che possono essere facilmente misurate saranno, nella nostra impostazione, le *variabili* del sistema economico (per esempio: produzione di grano, cambio delle monete, numero dei lavoratori impiegati in diverse attività, produzione di automobili, livello dei salari, tassi d'interesse, ecc.); esse sono il risultato di moltissimi fattori eterogenei (scelte dei singoli consumatori, dei produttori, fattori politici, climatici, ecc.). L'economista non può conoscere tutti questi fattori, ma può prendere un sistema di variabili e vedere come sono legate l'una all'altra (cioè considerare le *correlazioni* tra le variabili di questo sistema): allo studio delle correlazioni esistenti tra le variabili di un certo sistema $(x_1, \ldots, x_n)$ corrisponde, nella nostra teoria assiomatica, lo studio dei valori di $(x_1, \ldots, x_n)^*$. Inoltre l'economista può proporre dei modelli teorici introducendo in sostanza certe funzioni $f_1, \ldots, f_n$ che, se il modello è ben scelto, prendono valori vicini a quelli delle $x_1, \ldots, x_n$ mentre i valori di $(f_1, \ldots, f_n)^t$ sono vicini a quelli di $(x_1, \ldots, x_n)^*$: l'assioma B4 è ispirato all'ipotesi limite di una perfetta aderenza fra modello teorico e realtà sperimentale.

Dagli assiomi B1-B4 deriva il seguente utile

Criterio di eguaglianza tra variabili. *Se* x, y *sono due variabili allora* $x = y$ *se e solo se* $(x, x)^* \simeq (x, y)^*$.

Notiamo che, in base a tale criterio, $\emptyset_2^*$ è l'unica variabile priva di valori.

La trasposizione di variabili consente di definire le qualità di *coerenza Qcoer*, di *indi-*

pendenza Qind e le relazioni binarie tra variabili di *dominanza Rdom* (ove *yRdomx* significa che la variabile y è dominata dalla variabile x), di *subordinazione Rsub* (*yRsubx* significa che y è subordinata a x) e di *dipendenza Rdip* (*yRdipx* significa che y dipende da x).

Queste qualità e relazioni hanno un ruolo molto importante nello studio delle variabili e sono caratterizzate dai seguenti assiomi:

B5. *Qcoer è una qualità. Se* $(x_1, \dots, x_n)$ *è una n-upla di variabili, allora si ha:* $Qcoer(x_1, \dots, x_n)$ *se e solo se tutti i valori di* $(x_1, \dots, x_n)^*$ *sono n-uple.*

B6. *Qind è una qualità. Se* $(x_1, \dots, x_n)$ *è una n-upla di variabili, allora* $Qind(x_1, \dots, x_n)$ *equivale alla condizione seguente:*

$(x_1, \dots, x_n)^* \downarrow\!\uparrow (y_1, \dots, y_n)$ *se e solo se si ha* $x_i \downarrow\!\uparrow y_i$ *per ogni* i *con* $1 \leqslant i \leqslant n$.

B7. Rdom, Rsub, Rdip sono relazioni binarie. Se x, y sono due variabili, allora si ha y Rdom x se e solo se:

1) $(x, y)^* \downarrow\!\uparrow a$ *implica* $a \in V^1$ *oppure* $a \in V^2$;

si ha y Rsub x se e solo se oltre alla 1) *si ha:*

2) $(x, y)^* \downarrow\!\uparrow [a]$, $(x, y)^* \downarrow\!\uparrow (b, c)$ *implicano* $a \neq b$;

infine si ha y Rdip x se e solo se oltre alla 1) *e alla* 2) *si ha:*

3) $(x, y)^* \downarrow\!\uparrow (a, b)$, $(x, y)^* \downarrow\!\uparrow (a, c)$ *implicano* $b = c$.

Notiamo che se (x, y) è una coppia coerente di variabili allora sono necessariamente verificate le condizioni 1), 2) dell'assioma precedente.

Osservazione. Mentre le nozioni di dipendenza e indipendenza sono ispirate all'uso comune di questi termini in varie scienze, le nozioni di coerenza, dominanza e subordinazione sono suggerite dall'assioma B4. Precisamente, se $v_1 = \tau f_1, \dots, v_n = \tau f_n$, allora $Qcoer(v_1, \dots, v_n)$ equivale alla condizione: *per ogni oggetto a e per ogni coppia di interi h, k compresi tra* 1 *ed n si ha* $f_h \uparrow a$ *se e solo se* $f_k \uparrow a$.

Sia inoltre $x = \tau f$, $y = \tau g$: la condizione y *Rdom* x equivale alla condizione:

1*) *per ogni oggetto a, se* $g \uparrow a$ *allora* $f \uparrow a$.

Se poi oltre alla 1*) consideriamo la condizione:

2*) *per ogni a, b se* $g \uparrow a$ *e inoltre* $fa = fb$ *allora* $g \uparrow b$,

si vede che si ha y *Rsub* x se e solo se valgono simultaneamente la 1*) e la 2*).

Dagli assiomi B4-B7 discende la seguente proposizione, che generalizza il precedente criterio di eguaglianza:

Proposizione 3.1. *Siano x, y, z variabili. Se y Rdip x, z Rdip x e inoltre* $(x, y)^* \simeq (x, z)^*$, *allora* $y = z$.

Un'importante manipolazione di variabili riguarda la *restrizione* di una variabile x che prende solo i valori assunti da x quando una variabile y assume un certo valore k. Perciò introduciamo l'operazione *Restr* e diamo il seguente assioma:

B8. *Restr è un'operazione binaria. Per ogni coppia* (x, y) *di variabili e per ogni oggetto* k *esiste una variabile* $z = Restr\, x\,(y, k)$ *tale che*:

1) $z\ Rdip\,(x, y)^*$;

2) $((x, y)^*, z)^* \downarrow\uparrow (a, b)$ *se e solo se si ha* $a = (b, k)$, $(x, y)^* \downarrow\uparrow (b, k)$.

Per la proposizione 3.1 la variabile z dell'assioma precedente è univocamente determinata dalle condizioni 1), 2); essa sarà chiamata la *restrizione* di x sotto la condizione $y = k$ e sarà denotata da $x|_{y=k}$. Notiamo che, se y *non* prende il valore k, allora $x|_{y=k} = \emptyset_2^*$. Inoltre osserviamo che, se x è dominata da y allora x è univocamente determinata dalle sue restrizioni $x|_{y=k}$.

Come motivazione intuitiva dell'introduzione della restrizione, possiamo pensare alle tre variabili della teoria cinetica dei gas, cioè temperatura, volume e pressione: spesso si considerano le correlazioni tra due di queste tre variabili ristrette al caso in cui la terza prende un valore fisso.

Un'operazione sulle variabili legata alla restrizione è l'*aggregazione*, qui indicata con *Aggr*, che soddisfa il seguente assioma:

B9. *Aggr è un'operazione semplice. Se* x *è una variabile a valori variabili allora esiste* $Aggr\, x$ *ed è una variabile dominata da* x *tale che, per ogni variabile* k, *si ha*

$$(Aggr\, x)|_{x=k} = k|_{x=k}.$$

Concludiamo questo paragrafo con un assioma che produce molte variabili che prendono un numero finito di valori.

B10. *Sia* S *un sistema non vuoto. Per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *esiste una* n*-upla coerente e indipendente di variabili aventi tutte gli stessi valori di* S.

4. Grafici, estensioni e correlazioni

Per collegare la nozione di variabile introdotta nel § 3 agli altri aspetti della teoria base in modo ispirato all'uso corrente, anche se informale, della parola «variabile» in Analisi, Algebra, Geometria, ecc., dopo l'assioma B4 che collega variabili ed oggetti binari, diamo alcune definizioni ed alcuni assiomi che collegano gli oggetti binari e le variabili con le collezioni.

Cominciamo perciò con l'introduzione degli usuali concetti di *grafico, dominio e codominio* di un oggetto binario mediante le operazioni *Graf, Dom, Cod*:

C1. *Graf, Dom e Cod sono operazioni semplici i cui valori sono collezioni.*

Se $Ar\alpha = 2$ *ed esiste* $Graf\alpha$, *allora* $Graf\alpha \subseteq V^2$ *e per ogni* (x_1, x_2) *si ha* $(x_1, x_2) \in Graf\alpha$ *se e solo se* $\alpha \downarrow\uparrow x_1 x_2$.

Se $Ar\alpha = 2$ *ed esiste* $Dom\alpha$, *allora per ogni* x *si ha* $x \in Dom\alpha$ *se e solo se* $\alpha \uparrow x$.

Se $Ar\alpha = 2$ *ed esiste* $Cod\alpha$, *allora per ogni* x *si ha* $x \in Cod\alpha$ *se e solo se* $\alpha \downarrow x$.

Notiamo che non si richiede che le operazioni *Graf, Dom, Cod* siano definite su *tutti* gli oggetti binari: questa sarebbe un'ipotesi molto forte, contraddittoria con l'introduzione (opportuna per varie ragioni) di molte operazioni sulle collezioni e in particolare con alcune conseguenze degli assiomi C6-C9.

L'analogo unario del grafico è l'*estensione*, che introduciamo mediante l'operazione *Ext*:

C2. *Ext è un'operazione semplice i cui valori sono collezioni. Se* $Ar\alpha = 1$ *ed esiste* $Ext\alpha$ *allora per ogni* x *si ha* $x \in Ext\alpha$ *se e solo se* $\alpha \downarrow\uparrow x$.

Dopo i grafici introduciamo la collezione estensionale *Corr* delle *correlazioni* o *corrispondenze* (i cui elementi sono univocamente determinati dal loro grafico) caratterizzata dall'assioma:

C3. *Corr è una collezione estensionale di oggetti binari. I sistemi finiti appartengono a Corr. Ogni elemento di Corr ha grafico, dominio e codominio.*

Data l'importanza delle *correlazioni funzionali* introduciamo pure la loro collezione *Corfun* individuata dall'assioma:

C4. *Corfun è una collezione i cui elementi sono tutti e soli gli elementi di Corr che godono della qualità Qfun.*

Possiamo ora introdurre un'operazione che collega correlazioni funzionali e variabili, la *composizione di correlazioni funzionali e variabili, Cov* che soddisfa il seguente assioma:

C5. *Cov è un'operazione binaria. Se* f *è una correlazione funzionale e* v *è una variabile allora esiste* $Cov\ f\ v$ *ed è una variabile denotata col simbolo* $f_{\#}v$. *Inoltre*:

1) $f_{\#}v$ *Rdip* v;

2) $(v, f_{\#}v)^* \downarrow\uparrow (a, b)$ *se e solo se* $v \downarrow\uparrow a$, $fa = b$.

Notiamo che l'assioma precedente determina univocamente $f_{\#}v$ per la Prop. 3.1.

Mediante il grafico e l'estensione è possibile definire, ove esiste, l'*astrazione* di una variabile w nel modo seguente: $Astr\, w = r$ se e solo se r è una correlazione e $Graf\, r = Ext\, w$.

Se poi y, z sono variabili tali che $Astr(y, z)^*$ esiste ed è una correlazione funzionale, allora la *sostituzione della variabile* x *con la variabile* y *nella variabile* z può essere definita da: $Sost(z, y/x) = (Astr((x, z)^*))_{\#}\, y$.

Concludiamo questa *Nota* indicando alcuni *assiomi forti* (che implicano l'esistenza di molte «grandi collezioni», «grandi variabili» e «grandi correlazioni») le cui conseguenze meriterebbero a nostro avviso un approfondito esame (sono state discusse tra l'altro nel seminario [8]). Cominciamo dal seguente assioma, che provvede «copie indipendenti e coerenti» di ogni variabile prefissata:

C6. *Data una n-upla di variabili* $(x_1, \ldots, x_n)$ *esiste una n-upla di variabili* $(z_1, \ldots, z_n)$ *tale che:*

1) $Qcoer(z_1, \ldots, z_n)$;

2) $Qind(z_1, \ldots, z_n)$;

3) $z_i \simeq x_i$ *per* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Seguono infine gli assiomi sull'esistenza dell'estensione delle variabili e sull'inversione delle operazioni *Ext* e *Graf*:

C7. *Per ogni variabile v esiste la collezione Ext v.*

C8. *Per ogni collezione C esiste una variabile v con Ext v = C.*

C9. *Per ogni collezione C esiste una correlazione r tale che, fissati comunque due oggetti x, y, si ha* $r \downarrow\uparrow xy$ *se e solo se* $(x, y) \in C$.

Notiamo che, nell'assioma C9, *Graf r* è la collezione di tutte le coppie appartenenti a C.

Dalle prime provvisorie analisi sulle conseguenze degli assiomi «forti» del presente paragrafo sembrano emergere l'incompatibilità degli assiomi B9 e C8 con il blocco di tutti gli altri assiomi e l'opportunità di sviluppare una teoria che consideri una collezione *Gvar* delle «grandi variabili», che soddisfa tutti gli assiomi tranne B9, e una collezione *Lvar* di variabili «piccole» o «locali» che li soddisfa tutti tranne C8. Le connessioni fra variabili locali e grandi variabili dovrebbero essere analoghe a quelle esistenti fra insiemi e classi proprie nelle teorie del tipo Gödel-Bernays.

Osserviamo infine che la nozione di variabile ora introdotta sembra rispecchiare in modo abbastanza completo l'uso corrente del termine «variabile» in Analisi, Geometria, Algebra, Fisica Matematica, Logica, Economia, ecc. (vedi ad es. [1, 7]). Se invece si volesse recuperare la nozione probabilistica di «variabile aleatoria», sarebbe necessario arricchire la nozione di variabile qui presentata con altri concetti che rispecchino l'idea di «probabilità che una variabile assuma certi valori» (vedi [2-4, 10]).

Ricerca parzialmente finanziata dai fondi 40% M.U.R.S.T.

Bibliografia

[1] V. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.* Mir, Mosca 1976.

[2] P. Baldi, *Calcolo delle Probabilità e Statistica.* Mc Graw-Hill, Milano 1992.

[3] P. Billingsley, *Probability and Measure.* Wiley & Sons, New York 1986.

[4] L. Breiman, *Probability.* Addison-Wesley, Reading, Mass. 1968.

[5] M. Clavelli, *Variabili e teoria A.* Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, (2), 59, 1985, 125-130.

[6] M. Clavelli - E. De Giorgi - M. Forti - V. M. Tortorelli, *A self-reference oriented theory for the Foundations of Mathematics.* In: *Analyse Mathématique et applications. Contributions en l'honneur de Jacques-Louis Lions.* Gauthiers-Villars, Paris 1988, 67-115.

[7] R. Courant - D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics.* Wiley & Sons, New York 1989.

[8] G. LENZI, *Seminario sui Fondamenti della Matematica*, diretto dal Prof. Ennio De Giorgi. Scuola Normale Superiore, Pisa a.a. 1993-1994 (note dattiloscritte).
[9] E. DE GIORGI - M. FORTI - G. LENZI, *Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica*. Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 5, 1994, 11-22.
[10] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* Wiley & Sons, New York 1968.
[11] G. LENZI, *Estensioni contraddittorie della teoria Ampia.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 83, 1989, 13-28.

E. De Giorgi, G. Lenzi:
Scuola Normale Superiore di Pisa
Piazza dei Cavalieri, 7 - 56126 PISA

M. Forti:
Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini»
Università degli Studi di Pisa
Via Bonanno, 25 B - 56100 PISA